Листок 3.
Центр. Группы автоморфизмов. Группы движений

Задача 1. Докажите, что если если элементы σ_1, σ_2 и π группы $\mathbf{S}_n$ связаны соотношением $\pi\sigma_1 = \sigma_2\pi$, то цикловая структура перестановок σ_1 и σ_2 совпадает.

Задача 2. Верно ли обратное утверждение для группы $\mathbf{S}_n$? А для группы $\mathbf{A}_n$?

Определение 1. *Центром* группы G называется множество

$$\{Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \forall g \in G\}.$$

Задача 3. Центр группы является нормальной подгруппой.

Задача 4. Найдите центры групп: а) $\mathbf{S}_n$; б) $\mathbf{A}_n$; в) $\mathbf{D}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$.

Задача 5. Докажите, что группа внутренних автоморфизмов группы G изоморфна факторгруппе группы G по центру.

Задача 6. Докажите, что факторгруппа некоммутативной группы по центру не может быть циклической.

Задача 7. Докажите, что факторгруппа группы $\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ по центру изоморфна группе $\mathbf{S}_4$.

Определение 2. *Автоморфизмом группы* G называется изоморфизм группы G на себя.

Задача 8. Найдите группы автоморфизмов групп:
а) $\mathbb{Z}_p$, p — простое;
б) $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$;
в) $\mathbf{V}_4$;
г) $\mathbf{S}_3$;
д)* $\mathbf{D}_4$;
е)* $\mathbf{Q}_8$;
ж)** $\mathbf{S}_n$;
з)** $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$.

Задача 9. Для любой фигуры (любого множества точек) в конечномерном аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ множество всех ее движений (преобразований, сохраняющих расстояния между точками) образуют группу относительно операции композиции.

Определение 3. Группа движений правильного n-угольника обозначается через $\mathbf{D}_n$.

Задача 10. Сколько элементов в группе $\mathbf{D}_n$? Каким минимальным количеством порождающих элементов обладает эта группа?

Задача 11. Нарисуйте плоские фигуры, для которых группа движений изоморфна
а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbf{V}_4$; в) $\mathbb{Z}_3$.

Задача 12. Найдите группы движений и собственных движений
а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г)* икосаэдра.