Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет (отделение математики)

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности «Математика»

Экзамен состоит из общей и специальной части. От экзаменующихся требуется знание и свободное владение материалом, предусмотренным общей частью настоящей программы. Специальная часть предусматривает знание **основных и специальных** курсов по избранной узкой специальности и изложение представленного реферата.

I. Общая часть.

1. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши. Непрерывность функций одной переменной. Свойства непрерывных, функций. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции.

2. Непрерывность функций многих переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Локальный экстремум функций многих переменных. Достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа. Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

3. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточное условие сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций, периодических на отрезке $[0, 2\pi]$. Мера в смысле Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства.

4. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами: однородные и неоднородные.

5. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Коши о вычетах. Теорема Вейерштрасса об аналитичности суммы ряда из аналитических функций. Аналитическая функция в целом. Римановы поверхности.

6. Определители. Свойства полилинейности и кососимметричности. Определитель транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей, определитель произведения квадратных матриц. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица (существование и единственность). Способы вычисления.

7. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Системы линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема

Кронекера-Капелли. Теорема Крамера о системах линейных уравнений с квадратной матрицей.

8. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы, приведение к нормальному виду. Закон инерции квадратичных форм.

9. Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

10. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Ортогональные и самосопряженные преобразования, приведение квадратичной формы к главным осям. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Матрица Грама системы векторов, связь с объемом.

11. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка.

12. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп. Порядки элементов прямого произведения. Разложимость циклических групп в прямое произведение. Теорема о разложении конечно порожденной абелевой группы в прямое произведение циклических подгрупп.

13. Деление многочленов от одной переменной с остатком. Корни многочлена и теорема Безу. Кратность корня, связь с производной. Разложение многочленов от одной переменной над полем на неприводимые множители. Теорема о симметрических многочленах.

14. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности, ее геометрический смысл.

II. Специальная часть.

Дополнительные вопросы для аспирантов, поступающих на кафедру высшей алгебры

1. Классы сопряженных элементов. Центр и коммутант группы.
2. Теоремы Силова.
3. Строение конечно порожденных абелевых групп.
4. Представления групп. Теорема Машке.
5. Лемма Шура. Неприводимые представления конечных абелевых групп.
6. Тело кватернионов. Теорема Фробениуса.
7. Идеалы, факторкольца, теорема о гомоморфизмах для колец.
8. Простота алгебры матриц над полем.
9. Конечные расширения полей.
10. Поля алгебраических чисел.
11. Классификация конечных полей.

Список литературы

[1] Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
[2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
[3] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.
[4] Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.
[5] Зорич В. А. Математический анализ, тт. 1 и 2. М.: МЦНМО, 2007.
[6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
[7] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Части I–III. М.: МАИК Наука, 2000.
[8] Маркушевич А. И. Введение в теорию аналитических функций. М.: Наука, 1967.
[9] Михалев А. В., Михалев А. А. Начала алгебры, часть 1. М.: ИНТУИТ, 2005.
[10] Никольский С. М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
[11] Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987.
[12] Петровский И. Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1964.
[13] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
[14] Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2003.
[15] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966; Лань, 2004.
[16] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, тт. 1, 2. М.: Наука, 1987.