

# ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

1 СЕМЕСТР, 1 ПОТОК, 2010/11 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЛЕКТОР — ПРОФ. Е. С. ГОЛОД

1. Элементарные преобразования над строками матрицы. Приведение к ступенчатому и сильно ступенчатому виду.
2. Решение и исследование систем линейных уравнений методом Гаусса. Случай однородных систем.
3. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем линейных уравнений.
4. Множества и отображения. Композиция отображений, ассоциативность. Обратное отображение.
5. Формулы для числа отображений и подмножеств. Бином Ньютона.
6. Понятие группы. Группа перестановок. Разложения перестановки в произведения независимых циклов и транспозиций.
7. Четность и знак перестановки.
8. Определитель квадратной матрицы, свойства полилинейности и кососимметричности. Определитель транспонированной матрицы.
9. Вычисление определителя приведением матрицы к треугольному виду.
10. Аксиоматическая характеристика определителя.
11. Определитель с углом нулей.
12. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
13. Теорема Крамера. Случай однородной системы.
14. Формула Крамера.
15. Задача об интерполяционном многочлене. Определитель Вандермонда.
16. Понятие линейной зависимости. Критерий равенства определителя нулю.
17. Свойства линейной зависимости.
18. Основная лемма о линейной зависимости.
19. Базис системы векторов. Стандартный базис пространства строк (столбцов).
20. Ранг системы векторов и его свойства.
21. Лемма о линейных соотношениях между столбцами матрицы. Алгоритм вычисления базиса и ранг конечной системы векторов.
22. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.
23. Теорема Кронекера–Капелли (критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов).
24. Подпространства. Линейная оболочка. Базис и размерность подпространства решений однородной системы линейных уравнений.
25. Операции над матрицами и их свойства.
26. Элементарные матрицы и их связь с элементарными преобразованиями.
27. Ранг произведения матриц.
28. Определитель произведения матриц.
29. Обратная матрица (единственность, формула, условие существования).
30. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
31. Множество с бинарной операцией. Обобщенный закон ассоциативности.
32. Полугруппа. Группа обратимых элементов в полугруппе с единицей. Примеры. Степени элемента в полугруппе и их свойства.
33. Порядок элемента в группе. Порядок степени элемента. Порядки элементов в симметрической группе.
34. Понятие подгруппы. Примеры. Циклические подгруппы и группы. Порождающие элементы циклической группы.
35. Порядок элемента – делитель порядка группы. Группы простого порядка.
36. Понятие кольца. Обратимые элементы и делители нуля. Примеры.
37. Кольца классов вычетов кольца целых чисел, обратимые элементы и делители нуля в них.

38. Понятие поля. Когда кольцо вычетов является полем? Характеристика поля. Малая теорема Ферма.
39. Построение поля комплексных чисел.
40. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корней в поле комплексных чисел.
41. Корни из единицы в поле комплексных чисел. Функция Эйлера.
42. Построение кольца многочленов. Обратимые элементы, отсутствие делителей нуля в кольце многочленов над областью целостности.
43. Деление с остатком в кольце многочленов.
44. Понятие делимости в области целостности. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель (определение и единственность).
45. Существование наибольшего общего делителя в кольце многочленов над полем и в кольце целых чисел.  $\text{НОД}(f, g) = uf + vg$ . Алгоритм Евклида.
46. Свойства взаимно простых элементов. Понятие неприводимого элемента (многочлена).
47. Однозначное разложение на неприводимые множители в кольце многочленов над полем и в кольце целых чисел. Приложение такого разложения к вычислению НОД и НОК. Бесконечность множеств неприводимых многочленов и простых чисел.
48. Теорема об остатках. Представления многочленов в виде  $h = uf + vg$  с ограничением степеней  $u$  и  $v$ .
49. Многочлены как функции. Теорема Безу. Кратные корни. Число корней с учетом кратности.
50. Функциональное и формальное равенство многочленов. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
51. Операция дифференцирования в кольце многочленов. Поведение кратности неприводимого множителя (корня) при дифференцировании. Освобождение от кратных неприводимых множителей (корней).
52. Формулировка теоремы об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. Разложение на неприводимые множители многочленов над полем комплексных чисел. Граница для корней комплексного многочлена.
53. Разложение на неприводимые множители многочленов над полем действительных чисел.
54. Теорема Штурма.
55. Поле частных области целостности.
56. Поле рациональных дробей. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
57. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Допустимый порядок на мономах. Свойства старшего члена. Лексикографически-степенной порядок.
58. Симметрические многочлены. Основная теорема.
59. Формулы Виета. Значения симметрического многочлена от корней многочлена от одной переменной.
60. Существование расширения поля, в котором заданный многочлен разлагается на линейные множители.
61. Доказательство теоремы об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел.
62. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп и колец. Примеры.
63. Подгруппы циклических групп. Теорема Кэли.
64. Разложение группы на смежные классы. Теорема Лагранжа.
65. Результат двух многочленов. Приложение к решению системы из двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными.
66. Формулы для результата. Дискриминант.