

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

3 СЕМЕСТР (2 КУРС), 1 ПОТОК, 2010/11 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЛЕКТОР — ПРОФ. А. В. МИХАЛЕВ

1. Порядок элемента группы, порядок степени элемента.
2. Циклические группы, их подгруппы.
3. Подгруппа, порожденная подмножеством элементов группы.
4. Смежные классы по подгруппе, теорема Лагранжа, ее следствия (теоремы Эйлера и Ферма).
5. Нормальные подгруппы.
6. Центр группы, централизатор элемента.
7. Коммутант группы.
8. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
9. Факторгруппы по коммутанту и центру.
10. Гомоморфизмы групп, нормальность ядра, канонический гомоморфизм на факторгруппу.
11. Изоморфизмы групп, классификация циклических групп.
12. Теорема о гомоморфизме (первая теорема об изоморфизме).
13. Теорема о гомоморфизме (вторая теорема об изоморфизме).
14. Теорема о гомоморфизме (третья теорема об изоморфизме).
15. Группа автоморфизмов группы, подгруппа внутренних автоморфизмов.
16. Прямые произведения (суммы) групп. Факторизация по прямым слагаемым.
17. Критерий циклическости прямой суммы циклических групп. Разложение конечной циклической группы в прямую сумму примарных циклических групп.
18. Условия расщепляемости короткой точной последовательности абелевых групп.
19. Периодическая часть абелевой группы.
20. Свободная абелева группа, ее ранг, равенство нулю ее периодической части.
21. Свойства свободной абелевой группы (универсальное, накрывающее, расщепляющее).
22. Подгруппы свободных и конечно порожденных абелевых групп.
23. Задание конечно порожденных абелевых групп образующими и соотношениями.
24. Целочисленные матрицы, приведение к каноническому диагональному виду.
25. Теорема о разложении конечно порожденных абелевых групп в прямую сумму циклических групп (свободных и конечных примарных циклических групп).
26. Примарные компоненты.
27. Единственность разложения конечной примарной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических групп.
28. Действие групп на множествах, орбиты и стабилизаторы.
29. Разложение подстановки в произведение непересекающихся циклов.
30. Регулярное действие группы, теорема Кэли.
31. Действие группы сопряжениями, разбиение на классы сопряженных элементов.
32. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы.
33. Группа порядка  $p^2$  абелева.
34. Первая теорема Силова.
35. Вторая теорема Силова.
36. Третья теорема Силова.
37. Разрешимые группы. Разрешимость примарной конечной группы.
38. Разрешимость группы порядка  $pq$ .
39. Разрешимость группы треугольных матриц.
40. Классы сопряженных элементов групп подстановок, центр и коммутант группы  $S_n$ .
41. Простота группы  $A_5$ .
42. Идеалы и гомоморфизмы колец. Факторкольцо по идеалу. Теорема о гомоморфизме для колец.
43. Простота кольца матриц над полем (телом).
44. Факторкольца колец многочленов. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.

45. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
46. Строение конечных полей.
47. Алгебра кватернионов.
48. Конечномерные алгебры с делением.
49. Теорема Фробениуса.
50. Модули, подмодули, фактормодули, теорема о гомоморфизме для модулей.
51. Циклические и неприводимые модули. Лемма Шура.
52. Прямые суммы модулей.
53. Представления групп, матричные представления, модули над групповой алгеброй. Изоморфизм представлений.
54. Одномерность комплексных неприводимых представлений конечной абелевой группы, их число.
55. Одномерные комплексные представления конечных групп.
56. Центр групповой алгебры, его размерность.
57. Теорема Машке, ее следствия.
58. Всякое неприводимое комплексное представление конечной группы содержится в регулярном.
59. Конечность множества неизоморфных неприводимых комплексных представлений конечной группы. Кратности вхождения неприводимых представлений.
60. Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений.
61. Совпадение числа неприводимых комплексных представлений с числом классов сопряженных элементов.
62. Характеристики представлений групп и их свойства.