

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

3 СЕМЕСТР (2 КУРС), 2 ПОТОК, 2010/11 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЛЕКТОР — ПРОФ. Э. Б. ВИНБЕРГ

1. Нормальные подгруппы. Пример не нормальной подгруппы. Факторгруппа.
2. Ядро и образ гомоморфизма групп. Теорема о гомоморфизме.
3. Разложение группы в прямое произведение подгрупп. Случай двух множителей. Внешнее прямое произведение групп, его связь с внутренним.
4. Прямая сумма колец. Прямая сумма колец вычетов по взаимно простым модулям (китайская теорема об остатках).
5. Мультипликативная группа кольца вычетов. Функция Эйлера, ее вычисление.
6. Свободные (конечнопорожденные) абелевы группы. Равномощность всех базисов свободной абелевой группы.
7. Связь между различными базисами свободной абелевой группы.
8. Свобода и ранг подгруппы свободной абелевой группы.
9. Решетки в пространстве E^n .
10. Кристаллографические группы. Возможные порядки осей симметрии кристалла.
11. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму циклических подгрупп. Подгруппа кручения. Инвариантность числа бесконечных слагаемых.
13. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических подгрупп (без доказательства единственности).
14. Экспонента конечной абелевой группы. Критерий цикличности. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
15. Действия групп. Ядро неэффективности. Орбиты и стабилизаторы. Теорема о мощности (длине) орбиты для действия конечной группы.
16. Связь между стабилизаторами эквивалентных точек для заданного действия группы.
17. Действие группы на себе сопряжениями. Центр группы и классы сопряженности. Описание классов сопряженности в группах S_n и $GL_n(\mathbb{C})$.
18. Описание классов сопряженности в группе собственных движений плоскости.
19. Действие группы на множестве своих подгрупп сопряжениями. Нормализатор подгруппы. Число подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
20. Нетривиальность центра примарной конечной группы. Группы порядка p^2 .
21. Силовские подгруппы конечной группы. Силовские подгруппы группы A_5 .
22. Первая теорема Силова.
23. Вторая теорема Силова.
24. Третья теорема Силова.
25. Разложение группы в полупрямое произведение подгрупп. Внешнее полупрямое произведение групп, его связь с внутренним.
26. Группа автоморфизмов циклической группы. Группы порядка pq .
27. Коммутатор элементов группы и коммутант группы. Коммутант группы S_n .
28. Кратные коммутанты группы. Разрешимые группы. Критерий разрешимости.
29. Разрешимость группы треугольных матриц.
30. При каких n группа S_n разрешима?
31. Простые группы. Простота группы A_5 .
32. Линейные и матричные представления группы, связь между ними. Изоморфизм (эквивалентность) представлений. Сумма представлений.
33. Инвариантные подпространства. Неприводимые и вполне приводимые линейные представления. Разложение вполне приводимого представления в сумму неприводимых представлений.
34. Полная приводимость линейных представлений конечной группы над полем нулевой характеристики.
35. Мономиальное линейное представление группы S_n , его разложение в сумму неприводимых представлений.

36. Морфизмы линейных представлений группы. Лемма Шура. Неприводимые комплексные линейные представления абелевой группы.
37. Кратность вхождения неприводимого представления в данное комплексное линейное представление группы.
38. Регулярное (комплексное) линейное представление конечной группы. Кратность вхождения неприводимого представления в регулярное.
39. Разложение регулярного представления конечной циклической группы в прямую сумму неприводимых представлений.
40. Неприводимые комплексные линейные представления групп S_3 и S_4 .
41. Матричные элементы линейного представления группы. Теорема о том, что матричные элементы неприводимых комплексных линейных представлений конечной группы образуют базис в пространстве функций на группе.
42. Характер линейного представления группы. Теорема о том, что характеры неприводимых комплексных линейных представлений конечной группы образуют базис в пространстве центральных функций на группе. Число неприводимых представлений конечной группы.
43. Одномерные линейные представления групп. Одномерные комплексные линейные представления конечной абелевой группы.
44. Идеалы и факторкольца.
45. Образ и ядро гомоморфизма колец. Теорема о гомоморфизме для колец.
46. Идеалы и факторкольца евклидова кольца.
47. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
48. Конечные расширения полей. Теорема о башне конечных расширений.
49. Поле алгебраических чисел, его алгебраическая замкнутость.
50. Конечные поля. Построение поля из p^2 элементов.