17 Основная теорема алгебры комплексных чисел

Определение. Поле F называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен $f \in F[t]$ положительной степени имеет по крайней мере один корень в F.

Теорема. *Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.*

Следствие. *Число корней многочлена $f \in \mathbb{C}[z]$, подсчитанных с учетом кратностей равно $\deg f$.*

Напомним:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 - z_2| \geq |z_1 - |z_2|$.

Определение. $z_n \longrightarrow z_0$ если $|z_n - z_0| \longrightarrow 0$.

Лемма. $z_n \longrightarrow z_0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z_n \longrightarrow \operatorname{Re} z_0 \quad \& \quad \operatorname{Im} z_n \longrightarrow \operatorname{Im} z_0$.

Доказательство. Запишем $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда

$$|z_n - z_0|^2 = (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2,$$

$$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leq |z_n - z_0|.$$

$\square$

Лемма. $z_n \longrightarrow z_0 \Longrightarrow |z_n| \longrightarrow |z_0|$.

Доказательство. $||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$. □

Следствие. $z_n \longrightarrow z_0 \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad |z_n| \leq c$.

Лемма. $z_n \longrightarrow z_0 \quad \& \quad w_n \longrightarrow w_0 \Longrightarrow z_n \pm w_n \longrightarrow z_0 \pm w_0$, $z_n w_n \longrightarrow z_0 w_0$.

Доказательство.

$$|z_n \pm w_n - (z_0 \pm w_0)| \leq |z_n - z_0| + |w_n - w_0|,$$

$$\begin{aligned} |z_n w_n - z_0 w_0| = |(z_n - z_0)w_n + (w_n - w_0)z_0| \leq \\ |(z_n - z_0)w_n| + |(w_n - w_0)z_0| \leq c|z_n - z_0| + |(w_n - w_0)z_0|. \end{aligned}$$

□

Следствие. $z_n \longrightarrow z_0 \Longrightarrow \forall f \in \mathbb{C}[z] \quad f(z_n) \longrightarrow f(z_0)$.

Лемма (о возрастании модуля многочлена). *Пусть* $f \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f > 0$. *Тогда* $\forall c > 0\ \exists R \in \mathbb{R}$ *такое, что* $|f(z)| \geq c$ *при* $|z| \geq R$.

Доказательство. Запишем

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Пусть $A := \max |a_i|$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|f(z)| = |a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0| = \\
= |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq \\
|z|^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \geq \\
\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\
\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|z|} - \dots - \frac{A}{|z|^{n-1}} - \frac{A}{|z|^n} \right).
\end{aligned}
$$

Мы можем считать, что

$$|z| \geq (nA+1)/a_n \geq 1.$$

Тогда $|z|^k > |z|$ и

$$|f(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{nA}{|z|} \right) = |z|^{n-1} \left(|a_n||z| - nA \right) \geq |z|^{n-1}.$$

Таким образом, при

$$|z| \geq \max((nA+1)/a_n, \ \sqrt[n-1]{c}) := R.$$

имеем $|f(z)| \geq c$. □

Лемма (лемма Даламбера). *Пусть* $f \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f > 0$, $f(z_0) \neq 0$. *Тогда* $\forall \epsilon > 0$ $\exists h \in \mathbb{C}$ *такое, что* $|h| < \epsilon$ *и* $|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|$.

Доказательство. Запишем

$$f(z) = b_0 + b_k(z-z_0)^k + \cdots + b_n(z-z_0)^n, \quad b_k \neq 0, \quad b_n \neq 0, \quad k \geq 1.$$

Пусть w_0 – один из корней многочлена $b_0 + b_k z^k$. Будем искать h в виде $h = tw_0$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f(z_0+h) &= b_0 + b_k w_0^k t^k + \cdots + b_n w_0^n t^n = \\ &= b_0(1-t^k) + \left(b_{k+1} w_0^{k+1} + \cdots + b_n w_0^n t^{n-k-1}\right) t^{k+1} \end{aligned}$$

Пусть $C := |b_{k+1}||w_0|^{k+1} + \cdots + |b_n||w_0|^n$. При $t < b_0/C$ имеем

$$\begin{aligned} |f(z_0+h)| &\leq |b_0|(1-t^k) + \left|b_{k+1} w_0^{k+1} + \cdots + b_n w_0^n t^{n-k-1}\right| \cdot t^{k+1} \leq \\ &\leq |b_0|(1-t^k) + \left(|b_{k+1}||w_0|^{k+1} + \cdots + |b_n||w_0|^n t^{n-k-1}\right) t^{k+1} \leq \\ &\leq |b_0|(1-t^k) + Ct^{k+1} = |b_0| + (Ct - |b_0|)t^k \leq |b_0| = |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Таким образом, можно взять $h = tw_0$, $0 < t < \min(b_0/C,\ 1)$. □

Доказательство основной теоремы алгебры. Пусть $f \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f > 1$. Предположим, что $|f(z)| > 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Положим $M := \inf |f(Z)|$. Существует последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ такая, что $|f(z_n)| \longrightarrow M$. Имеются два случая.

- $|z_n|$ *не ограничена.* $\forall R\ \exists z_n \quad |z_n| > R$. Но по лемме о возрастании модуля $\forall c\ \exists R \quad |f(z)| > c$ при $|z| > R$. Противоречие.

- $|z_n|$ *ограничена.* Запишем $z_n = x_n + iy_n$. Последовательности x_n и y_n ограничены. Выберем сходящиеся подпоследовательности x_{n_k} и y_{n_k}. Последовательность $z_{n_k} = x_{n_k} + iy_{n_k}$ сходится:

$z_{n_k} \longrightarrow z_0$. Тогда $f(z_{n_k}) \longrightarrow f(z_0)$. Это противоречит лемме Даламбера.