18 Простейшие дроби

Теорема. *Всякая рациональная дробь f/g, где $g = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ – разложение в произведение неприводимых, является суммой многочлена и простейших дробей со знаменателями $p_1, \ldots, p_1^{m_1}, p_2, \ldots, p_2^{m_2}, \ldots, p_r, \ldots, p_r^{m_r}$. Это разложение единственно с точностью до порядка.*

Можно считать, что f/g – правильная дробь.

Лемма. *Пусть f/g – правильная рациональная дробь и пусть $g = g_1 g_2$ – разложение в произведение взаимно простых многочленов степеней $< \deg g$. Тогда существует разложение $f/g = f_1/g_1 + f_2/g_2$ в сумму правильных дробей. Это разложение единственно.*

Доказательство. Существуют многочлены u, v такие, что $g_1 u + g_2 v = 1$. Отсюда $f/g = fv/g_1 + fu/g_2 = f_1/g_1 + f_2/g_2 + f^*$, где f_1/g_1, f_2/g_2 – правильные дроби, а f^* – многочлен. Предположим, что $f^* \neq 0$. Тогда $\deg(gf^*) = \deg(f - f_1 g_2 - f_2 g_1) < \deg g$. Противоречие.

Пусть имеется два разложения $f/g = f_1/g_1 + f_2/g_2 = h_1/g_1 + h_2/g_2$. Тогда $(f_1 - h_1)g_2 = (h_2 - f_2)g_1$, g_1 делит $f_1 - h_1$, g_2 делит $h_2 - f_2 \Longrightarrow \deg(f_1 - h_1) \geq \deg g_1$. Противоречие. □

Предложение. *Всякая правильная рациональная дробь f/g, где $g = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ – разложение в произведение различных* *неприводимых, является суммой правильных дробей со знаменателями* $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \dots, p_r^{m_r}$. *Это разложение единственно с точностью до порядка.*

Доказательство. Индукция по r с использованием леммы. $\square$

Предложение. *Всякая правильная рациональная дробь* f/g, *где* $g = p^m$ – *степень неприводимого многочлена представляется в виде*

$$f/g = f_m/p^m + f_{m-1}/p^{m-1} + \cdots + f_1/p,$$

где $\deg f_i < \deg p$.

Доказательство. Индукция по m. Делим f на p с остатком: $f = gp + f_m$, $\deg f_m < \deg p$, $\deg g < \deg p^{m-1} \Longrightarrow f/g = f_m/p^m + g/p^{m-1}$.

Предположим, что имеется другое разложение

$$f/g = f_m^*/p^m + f_{m-1}^*/p^{m-1} + \cdots + f_1^*/p$$

и пусть $g_i = f_i - f_i^*$. Тогда

$$0 = g_m/p^m + g_{m-1}/p^{m-1} + \cdots + g_1/p,$$

Пусть g_k – первый член $\neq 0 \Longrightarrow$

$$0 = g_k + g_{k-1}p + \cdots + g_1 p^{k-1} \Longrightarrow g_k = 0.$$

- *Единственность.* .... $\square$