20 Симметрические многочлены

Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с 1 без делителей 0. Пусть $f \in R[t_1, \dots, t_n]$ и пусть $\delta \in S_n$ – подстановка. Определим

$$\delta(f)(t_1, \dots, t_n) := f(t_{\delta(1)}, \dots, t_{\delta(n)}).$$

Например, если $\delta = (1, 2, 3)$ и $f = t_1 + t_2^2 + t_3^3 + t_4^4$, то $\delta(f) = t_2 + t_3^2 + t_1^3 + t_4^4$.

Определение. Многочлен называется симметрическим, если $f^\delta = f$, $\forall \delta \in S_n$.

Поскольку S_n порождается транспозициями, то равенство $f^\delta = f$ достаточно проверить для транспозиций.

Пример. • Все многочлены от одной переменной – симметрические.

- *Степенные суммы* $s_m := t_1^m + \dots + t_n^m$.
- *Элементарные симметрические многочлены*

$$\sigma_m := \sum_{i_1 < \dots < i_m} t_{i_1} \cdots t_{i_m} \quad 1 \le m \le n.$$

Таким образом,

$$\sigma_1 = \sum x_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j, \quad \dots, \quad \sigma_n = \prod x_i.$$

- *Определитель Вандермонда*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(t_i - t_j)$$

Меняет знак при транспозициях. Поэтому Δ^2 – симметрический многочлен.

Предложение. *Все симметрические многочлены образуют подкольцо* $R[t_1, \dots, t_n]^{S_n} \subset R[t_1, \dots, t_n]$.

Теорема (основная теорема о симметрических многочленах). *Любой симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических.*

- *Обозначение:* $at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} \in f$ если $at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$ присутствует в $f \in R[t_1, \dots, t_n]$ с ненулевым коэффициентом a.
- *Лексикографический порядок:* $(k_1, \dots, k_n) \prec (l_1, \dots, l_n) \iff \exists i\colon \quad k_1 = l_1, \ \dots, \ k_i = l_i, \quad k_{i+1} < l_{i+1}$.

  Для одночленов пишем $at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} \prec bt_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$ если $(k_1, \dots, k_n) \prec (l_1, \dots, l_n)$.

Лемма. *Для одночленов имеем:*

- $u \succ v,\ v \succ w \Longrightarrow u \succ w;$
- $u \succ v \Longrightarrow uw \succ vw;$
- $u \succ v,\ u' \succ v' \Longrightarrow uu' \succ vv'.$

Доказательство. • Запишем $u = at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$, $v = bt_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$, $w = ct_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$. Пусть i – максимальное такое, что $k_1 = l_1 = m_1$, …, $k_{i-1} = l_{i-1} = m_{i-1}$ (т.е. t_i – первая переменная, входящая в u, v, w в различных степенях). $\Longrightarrow k_i \geq l_i \geq m_i$. Причем по крайней мере одно из этих неравенств – строгое.

• Запишем $u = at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$, $v = bt_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$, $w = ct_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$. Пусть i – максимальное такое, что $k_1 = l_1$, …, $k_{i-1} = l_{i-1}$. $\Longrightarrow$ $k_i > l_i \Longrightarrow k_1 + m_1 = l_1 + m_1$, …, $k_{i-1} + m_{i-1} = l_{i-1} + m_{i-1}$, $k_i + m_i > l_i + m_i$.

• $uu' \succ vu' \succ vv'$. □

Старший член многочлена $f \in R[t_1, \ldots, t_n]$: $at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} \in f$ – старший если $at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} \prec bt_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$ для любого другого $bt_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n} \in f$.

Введем временное обозначение $c(f)$ – старший член f. $o(f) = f - c(f)$

Пример. $f = t_1^2 t_2 + t_1 t_2 + t_1 t_2^2 + t_3^5 \Longrightarrow t_1^2 t_2$ – старший член.

Предложение. $c(fg) = c(f)c(g)$ *(старший член произведения равен произведению старших членов).*

Доказательство. Пусть $\tilde{f} \in o(f)$, $\tilde{g} \in o(g)$. Тогда $c(f) \succ \tilde{f}$, $c(g) \succ \tilde{g} \Longrightarrow c(f)c(g) \succ \tilde{f}\tilde{g}$, $c(f)c(g) \succ c(f)\tilde{g}$, $c(f)c(g) \succ \tilde{f}c(g)$ $\Longrightarrow c(f)c(g)$ – старший член. $\square$

Лемма. *Пусть $f \in R[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$ и пусть $u = at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} = c(f)$. Тогда $k_1 \geq \cdots \geq k_n$.*

Доказательство. Предположим, что $k_i < k_{i+1}$. Возьмем это i минимальным. Рассмотрим $\delta = (i, i+1) \in S_n$. Тогда $u = at_1^{k_1} \cdots t_i^{k_i} t_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots t_n^{k_n} \in f \Longrightarrow \delta(u) = at_1^{k_1} \cdots t_{i+1}^{k_{i+1}} t_i^{k_i} \cdots t_n^{k_n} \in f$ $\Longrightarrow \delta(u) \succ u$. Противоречие. $\square$

Лемма. *Для любого одночлена $u = t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$ такого, что $k_1 \geq \cdots \geq k_n$ $\exists!$ $(l_1, \ldots, l_n)$ такой, что $c(\sigma_1^{l_1} \cdots \sigma_n^{l_n}) = u$.*

Доказательство. $c(\sigma_r) = t_1 \cdots t_r) \Longrightarrow$

$$c(\sigma_1^{l_1} \cdots \sigma_n^{l_n}) = t_1^{l_1}(t_1t_2)^{l_2} \cdots (t_1 \cdots t_n)^{l_n} = \\ = t_1^{l_1+\cdots+l_n} t_2^{l_2+\cdots+l_n} \cdots t_n^{l_n}.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} l_1 + \quad \cdots + l_n &= k_1 \\ \quad l_2 + \cdots + l_n &= k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad l_n &= k_n \end{cases}$$

Получаем единственное решение $l_n = k_n$, $l_i = k_i - k_{i+1}$, $i < n$. $\square$

Доказательство теоремы. • *Существование.* Предположим противное. Пусть M – множество всех $f \in R[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$, для которых теорема не верна. Выберем $f \in M$ с наименьшим $c(f)$. По лемме $\exists\, \sigma_1^{l_1} \cdots \sigma_n^{l_n}$ такой, что $\alpha c(\sigma_1^{l_1} \cdots \sigma_n^{l_n}) = c(f)$. Тогда для $f_1 = f - \alpha c(\sigma_1^{l_1} \cdots \sigma_n^{l_n})$ имеем $c(f_1) \prec c(f)$. Противоречие.

• *Единственность.* Пусть $g_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = g_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Положим $h = g_1 - g_2$. Разложим h в сумму одночленов

$$h = \sum h_i.$$

Ясно, что $h_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq 0$. Пусть $u_i := c(h_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$ и пусть u_1 – старший среди них. Тогда u_1 – старший среди всех одночленов в $h_(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и он не может сократиться. □

• *Практическая реализация.* Пусть $f \in R[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$. Можно считать, что f однороден степени d. Пусть $c(f) = at_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}$, $\sum k_i = d$. Выберем все наборы $(l_1, \ldots, l_n)$ неотрицательных целых чисел такие, что

- $l_1 \geq \cdots \geq l_n$;
- $\sum l_i = d$;
- $(l_1, \ldots, l_n) \prec (k_1, \ldots, k_n)$.

Тогда $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ содержит все одночлены вида $t_1^{l_1} \cdots t_n^{l_n}$. Их коэффициенты находятся методом неопределённых коэффициентов.

Следствие. *Пусть* F *– поле. Пусть* $f \in F[t]$, $f = a_n t^n + \cdots a_1 t + a_0$ *и пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *– корни, выписанные с учетом кратностей. Любой симметрический многочлен* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *выражается в виде многочлена от* $a_0/a_n, \ldots,\ a_{n-1}/a_n$.