

## Экзаменационные вопросы по алгебре

3 семестр, 2 поток, 2009/10 учебный год

лектор – Ю. Г. Прохоров

- (1) Нормальные подгруппы. Примеры. Автоморфизмы групп. Внутренние автоморфизмы. Центр группы.
- (2) Смежные классы. Факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп.
- (3) Коммутант группы, его свойства. Примеры.
- (4) Разрешимые группы, их свойства. Примеры.
- (5) Коммутант знакопеременной группы.
- (6) Коммутант специальной линейной группы. Разрешимость группы треугольных матриц.
- (7) Прямые произведения групп. Внешнее и внутренние определения. Когда произведение циклических групп – циклическая группа.
- (8) Разложение конечной абелевой группы в произведение  $p$ -примарных компонент.
- (9) Экспонента группы. Существование в абелевой группе элемента, порядок которого равен экспоненте.
- (10) Кручение в абелевой группе. Линейная зависимость и базисы. Свободная абелева группа (различные определения и их эквивалентность).
- (11) Число элементов базиса в свободной абелевой группе не зависит от его выбора.
- (12) Подгруппы свободных конечно порожденных абелевых групп
- (13) Универсальное свойство свободных абелевых групп.
- (14) Целочисленные элементарные преобразования матриц. Приведение целочисленных матриц к диагональному виду.
- (15) Теорема о согласованных базисах. Лемма о факторизации по прямым слагаемым.
- (16) Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство существования).
- (17) Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство единственности).
- (18) Дискретные подгруппы в  $\mathbb{R}^n$ .
- (19) Действие группы на множестве. Его ядро, орбиты и стабилизаторы. Разложение в объединение орбит.
- (20) Примеры действий. Связь орбиты и стабилизатора. Регулярное действие группы, теорема Кэли.
- (21) Действие группы сопряжениями, разбиение на классы сопряжённых элементов. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы. Группа порядка  $p^2$  абелева. Разрешимость групп порядка  $p^k$ .
- (22) Первая теорема Силова.
- (23) Вторая теорема Силова.
- (24) Третья теорема Силова. Разрешимость групп порядка  $pq$ .
- (25) Классы сопряжённых элементов симметрической группы. Простота группы  $A_n$ .
- (26) Простота группы  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ .

- (27) Факторкольцо и факторалгебра по идеалу. Гомоморфизмы колец и алгебр. Теоремы о гомоморфизме для колец и алгебр.
- (28) Коммутативные кольца главных идеалов. Примеры. Кольцо многочленов над полем – кольцо главных идеалов.
- (29) Факториальные кольца. Факториальность колец главных идеалов.
- (30) Простые поля. Расширения полей. Алгебраические и трансцендентные элементы.
- (31) Минимальный многочлен алгебраического элемента, его свойства. Факторкольцо  $k[t]/(f)$ . Когда оно не имеет делителей нуля и когда оно – поле. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
- (32) Теорема о башне полей. Алгебраические элементы образуют подполе.
- (33) Поля разложения. Существование и единственность.
- (34) Автоморфизм Фробениуса. Строение конечных полей. Мультипликативная группа конечного поля.
- (35) Представления групп. Изоморфизмы и гомоморфизмы. Подпредставления. Неприводимые представления. Прямые суммы представлений. Унитарные представления.
- (36) Эквивалентность представления конечной группы над  $\mathbb{C}$  унитарному представлению. Теорема Машке.
- (37) Комплексные представления абелевых групп. Одномерные представления.
- (38) Характеры представлений, их свойства. Лемма Шура.
- (39) Соотношения ортогональности.
- (40) Регулярное представление. Разложение на неприводимые. Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений.
- (41) Совпадение числа неприводимых комплексных представлений с числом классов сопряжённых элементов.
- (42) \* Алгебра кватернионов. Конечномерные алгебры с делением. Теорема Фробениуса.