# 21 Результант и дискриминант

• *Дискриминант.* Пусть $F$ – поле. Пусть $f \in F[t]$, $f = a_n t^n + \cdots a_1 t + a_0$ и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – корни, выписанные с учетом кратностей. Определим дискриминант многочлена $f$ следующим образом

$$D = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Дискриминант выражается через определитель Вандермонда:

$$D = a_n^{2n-2} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Предложение.** *$D$ выражается как многочлен с целыми коэффициентами от $a_i$.*

*Доказательство.* $D$ является многочленом (с целыми коэффициентами) от элементарных симметрических функций $\sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$D = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Для каждого одночлена $\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \cdots \sigma_n^{k_n}$ в $h$ имеем

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = 2n - 2.$$

По формулам Виета

$$D = h(-a_{n-1}/a_n, a_{a-2}/a_n, \ldots, (-1)^n a_0/a_n).$$

Домножая на $a_n^{2n-2}$, избавляемся от знаменателей. $\square$

**Пример.** Пусть $n = 2$. Тогда $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$,

$$D = a_2^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = a_2^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4a_2^2\alpha_1\alpha_2 = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

**Пример.** Пусть $f = t^3 + pt + q$. Тогда $D = -4p^3 - 27q^2$.

- *Формулы Кардано.* Найдем корни многочлена $f = t^3 + pt + q$.

Положим $t = u + v \Longrightarrow$

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0.$$

Потребуем $3uv + p = 0$. Тогда

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -p^3/27 \end{cases} \quad alpha$$

$u^3$ и $v^3$ находятся из решения $x^2 + qx - -p^3/27 = 0$. Таким образом,

$$u^3,\ v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{-D}.$$

• *Результант.* Пусть $F$ – поле. Пусть $f$, $g \in F[t]$, $f = a_n t^n + \cdots a_1 t + a_0$, $g = b_m t^m + \cdots b_1 t + b_0$ и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – корни, выписанные с учетом кратностей. Положим

$$R(f, g) := a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j).$$

**Предложение.**

- *$R(f, g) = (-1)^{nm} R(g, f)$;*
- *$R(f, g) = a_n^m \prod_i g(\alpha_i)$, $\quad R(g, f) = b_m^n \prod_j f(\beta_j)$;*
- *$R(f, g) = 0 \iff f$ и $g$ имеют общий корень (или $a_n b_m = 0$).*

*Доказательство.* Заметим, что $g(\alpha_i) = b_m \prod (\alpha_i - \beta_j)$, $f(\beta_j) = a_n \prod (\beta_j - \alpha_i)$. $\square$

**Теорема.** *$R(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_n D$.*

*Доказательство.* Имеем $R(f, f') = a_n^{n-1} \prod_i f'(\alpha_i)$.

$$f = a_n \prod_j (t - \alpha_j) \Longrightarrow f' = a_n \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (t - \alpha_j) \Longrightarrow$$

$$f'(\alpha_i) = a_n \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) \Longrightarrow$$

$$R(f,f') = a_n^{n-1} a_n^n \prod_i \prod_{j\neq i} (\alpha_i - \alpha_j) =$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_n \, a_n^{2n-2} \prod_{j>i} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

$\square$

**Теорема.**

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$