2008/09 учебный год

Компактные комплексные поверхности

Задачи

Ю. Г. Прохоров [1]

(1) Докажите, что неособая поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 4$ может содержать лишь конечное число прямых.

(2) Докажите, что неособая поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 4$ не содержит (-1)-кривых.

(3) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – неособая поверхность степени $d \geq 3$, $d \neq 4$. Докажите, что $\mathrm{Aut}(X) \subset PGL(4)$.

(4) Показать, что не существует проективных поверхностей с $p_g = P_2 = 1$, $q = 0$.

(5) Докажите, что группа автоморфизмов нерациональной поверхности с $q = 0$ не более чем счетна.

(6) Пусть X – поверхность такая, что антиканоническая линейная система $|-K_X|$ непуста. Каков бирациональный тип поверхности X? В каких случаях кривая $D \in |-K_X|$ может быть несвязна?

(7) Пусть C – кривая рода 2. Найдите минимальную модель для симметрического квадрата S^2C.

Проективность компактных комплексных поверхностей

(8) Привести пример компактной комплексной поверхности X алгебраической размерности $a(X) = 0$.

(9) Докажите, что компактная комплексная поверхность с $\kappa = 0$, $p_g = 0$ и $q = 0$ проективна (и является поверхностью Энриквеса).

(10) Докажите, что компактная комплексная поверхность с $b_1 = b_2 = 0$, проективна. Она или рациональна ($\simeq \mathbb{P}^2$) или является поверхностью общего типа.

Рациональные поверхности

(11) Пусть X – неособая рациональная поверхность. Может ли линейная система $|nK_X|$ быть непуста?

(12) Псть X – рациональная поверхность с $\rho := \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) \geq 3$. Докажите, что X содержит по крайней мере ρ кривых с отрицательным индексом самопересечения.

(13) Пусть X – рациональная поверхность. Докажите, что у *каждой* точки $P \in X$ существует окрестность изоморфная аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

(14) Пусть X – неособая проективная поверхность и пусть H – обильный дивизор на X.
  - (a) Показать, что $K_X + 3H$ численно эффективен.
  - (b) Предположим, что $K_X + 2H$ не численно эффективен. Докажите, что $X \simeq \mathbb{P}^2$ и H линейно эквивалентен прямой на $\mathbb{P}^2$.
  - (c) Предположим, что $K_X + H$ не численно эффективен. Докажите, что X изоморфно $\mathbb{P}^2$ или линейчатой поверхности.

Указание: воспользоваться теоремой о конусе.

(15) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – (возможно особая) поверхность степени 3. Докажите, что имеет место одно из следующих:
  - (a) X имеет лишь дювалевские особенности;

[1] Москва – 1999

(b) X – конус над плоской кубической кривой;
(c) X имеет прямую особенностей, нормализация X изоморфна $\mathbb{F}_1$ и X является проекцией поверхности $X' \simeq \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{P}^4$ степени 3 (см. зад. 17)

(16) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – (возможно особая) поверхность степени 3. Пусть $C, C' \subset X$ – неособые рациональные кривые степени 3. Докажите, что $C \cap C' \neq \varnothing$.

(17) Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$, $X \not\subset \mathbb{P}^3$ – гладкая поверхность степени 3, которая не лежит в гиперплоскости. Докажите, что X содержит в точности одну (-1)-кривую. Используя это, докажите, что X изоморфна раздутию $\mathbb{P}^2$ в точке. *Указание:* показать, что $K_X + H$ не численно эффективен, где H – гиперплоское сечение X, далее, используя задачу показать, что поверхность X – линейчатая.

(18) Показать, что на нерациональной поверхности число (-1)-кривых конечно. Привести пример поверхности с бесконечным числом (-1)-кривых (см. [2, 4.15, с. 513]).

(19) Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что $-K_X$ численно эффективен. Докажите, что имеет место одно из следующих:
(a) $K_X \equiv 0$ (численно тривиален);
(b) X рациональна;
(c) X бирационально изоморфно линейчатой поверхности над эллиптической кривой.

(20) Опишите поверхности степени 5 a) в $\mathbb{P}^5$ b) в $\mathbb{P}^4$ (см. [2, 4.1.3, с. 542]).

(21) Докажите, что любой автоморфизм рациональной поверхности имеет неподвижную точку.

(22) Пусть X – неособая проективная поверхность и пусть $D \subset X$ – приведенная кривая такая, что $X \setminus D \simeq \mathbb{A}^2$. Докажите, что группа $\mathrm{Pic}(X)$ порождается компонентами D.

(23) Опишите неособые поверхности $X \subset \mathbb{P}^n$ такие, что общее гиперплоское сечение $X \cap \mathbb{P}^{n-1}$ является эллиптической кривой. Какова может быть степень такой поверхности?

(24) При каких n и m линейчатые поверхности $\mathbb{F}_n$ и $\mathbb{F}_m$ гомеоморфны? Деформируются друг в друга?

(25) Приведите пример плоской рациональной кривой, которая не может быть переведена в проективную прямую преобразованиями Кремоны. *Указание.* Рассмотреть кривую C степени $d \geq 6$ такую, что пара $(\mathbb{P}^2, C)$ канонична

Поверхности дель Пеццо

(26) Пусть $F = F_5$ – поверхность дель Пеццо степени 5. Найти $\mathrm{Aut}(F)$.

(27) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая кубическая поверхность. Докажите, что
(a) любая (-1)-кривая на X является прямой в $\mathbb{P}^3$;
(b) если $L \subset X \subset \mathbb{P}^3$ – прямая, то она является (-1)-кривой на X;
(c) X содержит только конечное число прямых (не используя теорему о конусе!);
(d) X содержит по крайней мере одну прямую (не используя теорему о конусе!);

(e) предполагая, что $X \subset \mathbb{P}^3$ задана уравнением Ферма

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0,$$

найти уравнения всех прямых на X.

(28) Пусть $X \neq \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – поверхность дель Пеццо степени $d := K_X^2$ и пусть $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2$ – бирациональный морфизм (композиция раздутий). Рассмотрим базис $h, e_1, \dots, e_{9-d}$ в $\mathrm{Pic}(X)$, где h – полный прообраз прямой на $\mathbb{P}^2$, а $e_1, \dots, e_{9-d}$ – исключительные дивизоры морфизма σ ((-1)-кривые). Пусть $E \sim \alpha h - \sum \beta_i e_i$, $\alpha, \beta_i \in \mathbb{Z}$ – любая (-1)-кривая на X. Докажите, что $\sigma(E)$ – точка (т. е. $E = e_i$), прямая или коника на $\mathbb{P}^2$ (т. е. $\alpha \leq 2$). Найти число (-1)-кривых на X для $d = 8, 7, 6, 5$. Опишите конус Мори в случаях $d = 8$ и $d = 7, 6$.

(29) Пусть $F = F_d$ – поверхность дель Пеццо степени d. Предположим, что на F действует инволюция так, что неподвижные точки образуют конечное множество. Докажите, что d четно.

(30) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $1 < d < 8$ и пусть D – эффективный дивизор на X. Докажите, что имеет место разложение $D \sim \sum n_i C_i$, где C_i – (-1)-кривые, а n_i – целые неотрицательные числа. Верно ли то же самое для поверхностей дель Пеццо степени 1?

Линейчатые поверхности

(31) Предположим, что на минимальной линейчатой поверхности X над эллиптической кривой существуют два непересекающихся сечения C_1 и C_2. Докажите, что $-K_X = C_1 + C_2$.

(32) Предположим, что на минимальной линейчатой поверхности X существуют три непересекающихся сечения. Докажите, что X является произведением.

(33) Докажите, что минимальная линейчатая поверхность содержит не более одной кривой с отрицательным индексом самопересечения.

Эллиптические поверхности

(34) Пусть X – линейчатая поверхность над эллиптической кривой C. Предположим, что на X также имеется структура эллиптического расслоения. Докажите, что $X \simeq (C \times \mathbb{P}^1)/G$, где G – группа, действующая сдвигами на C.

(35) Приведите примеры эллиптических поверхностей с $\kappa = 1$ и $b_1 = 0$. *Указание.* Примените логарифмическое преобразование Кодаиры к $\mathbb{P}^1 \times E$.

Поверхности Энриквеса

(36) Пусть $|P|$ – эллиптический пучок на поверхности Энриквеса F. Докажите, что $|P|$ содержит в точности два кратных слоя.

(37) Пусть H – обильный дивизор на поверхности Энриквеса F. Докажите, что линейная система $|H|$ содержит неприводимую кривую.

(38) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $f\colon X \to Y$ конечный морфизм степени 2. Докажите, что поверхность Y особа.

Поверхности типа $K3$

(39) Какова может быть степень поверхности типа K3 в $\mathbb{P}^4$? Опишите такие поверхности (см. [2, 4.1.3, с. 542]).

(40) Пусть τ – инволюция, действующая на поверхности X типа K3 так, что имеется лишь конечное число неподвижных точек. Каков бирациональный тип факторповерхности X/τ? Сколько имеется неподвижных точек? Приведите примеры.

(41) Постройте пример проективной $K3$-поверхности с числом Пикара $\rho = 20$. *Указание.* Рассмотрите квартику в $\mathbb{P}^3$.

(42) Пусть $K3$-поверхность X представляется в виде двулистного накрытия (минимальной) линейчатой поверхности Y: $\pi\colon X \to Y$.
   (a) Докажите, что Y рациональна (т.е. $Y \simeq \mathbb{F}_n$).
   (b) Докажите, что $n \leq 2$ или 4 и найти дивизор ветвления.
   (c) Обобщите эти утверждения на случай, когда X – поверхность типа $K3$, имеющая дювалевские особенности.

(43) Пусть $K3$ поверхность X представляется в виде двулистного накрытия $X \to Y$ некоторой неособой поверхности Y. Каков может быть бирациональный тип Y? Приведите примеры.

(44) Докажите, что для любого $g \geq 3$ существует $K3$-поверхность $X \subset \mathbb{P}^g$ степени $2g-2$. *Указание.* Рассмотреть вложения полных пересечений с эллиптическим пучком $|E|$ при помощи линейной системы $|\mathcal{O}(1)+mE|$.

(45) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неособая поверхность такая, что ее общее гиперплоское сечение $X \cap \mathbb{P}^{n-1}$ является канонической кривой. Докажите, что X – поверхность типа $K3$.

(46) (Пример Фано-Севери поверхности типа $K3$ с бесконечной группой автоморфизмов.)
   (a) Докажите, что существует неособая гиперэллиптическая кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ рода 2 и степени 6.
   (b) Докажите, что через C можно провести неособую квартику X. Оцените размерность пространства этих квартик.
   (c) Пусть H – гиперплоское сечение квартики X. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что для дивизора $D = aC + bH$ мы имеем $D^2 = 2$.
   (d) Докажите, что линейная система $|D|$ не имеет неподвижных компонент и базисных точек. Она определяет двулистный морфизм $X \to \mathbb{P}^2$, а инволюция Галуа этого накрытия является автоморфизмом X.
   (e) Выведите отсюда, что группа автоморфизмов K3 поверхности X бесконечна (и дискретна).

(47) Может ли на куммеровой поверхности число (-2)-кривых быть бесконечно?

(48) Приведите примеры поверхностей типа K3, группа автоморфизмов которых содержит простую подгруппу. *Указание.* Рассмотрите "достаточно симметричнную" кавартику или пересечение квадрики и кубики.

Абелевы поверхности

(49) Опишите абелевы поверхности с числом Пикара $\rho(X) \geq 4$.

(50) Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – абелева поверхность. Какова может быть степень X? (см. [2, 4.1.3, с. 542]).

(51) Пусть A – абелева поверхность и пусть $f\colon A \to Z$ – сюръективный морфизм на кривую со связными слоями. Показать, что f – эллиптическое расслоение без кратных и особых слоев и Z – эллиптическая кривая.

(52) Пусть A – абелева поверхность и пусть $f\colon A \to X$ – сюръективный морфизм на (неособую) поверхность. Каков может быть бирациональный тип X?

Поверхности с $\kappa = 0$

(53) Пусть X – минимальная нелинейчатая поверхность с $\chi_{\mathrm{top}} = 0$. Предположим, что существует сюръективный морфизм из X на кривую. Докажите, что существуют две гладкие кривые F, E , E – эллиптическая и группа G, действующая на F и E, такая, что $X \simeq (F \times E)/G$.

(54) Показать, что поверхность с $K_X = 0$, $q = 0$ односвязна.

Поверхности общего типа

(55) Пусть X – минимальная поверхность общего типа с $p_g(X) = q(X) = 0$, $K_X^2 = 1$. Докажите, что $|H^1(X, \mathbb{Z})| \leq 5$. Когда достигается равенство?

(56) Показать, что число Пикара минимальных поверхностей общего типа не ограничено (привести пример).

(57) Докажите, что группа автоморфизмов поверхности общего типа конечна.

(58) Пусть X – поверхность общего типа. Докажите, что X не может содержать семейства рациональных или эллиптических кривых.

(59) Пусть X – минимальная поверхность общего типа. Докажите, что
- (a) число (-2)-кривых конечно;
- (b) все (-2)-кривые линейно независимы в $N^1(X) = (\mathrm{Pic}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R}$;
- (c) число (-2)-кривых не превосходит $\rho(X) - 1$, где $\rho(X)$ – число Пикара X;
- (d) на подпространстве в $N^1(X)$, порожденным (-2)-кривыми, форма пересечения отрицательно определена.

(60) Пусть X, X_1 – минимальные нелинейчатые поверхности и пусть $\psi\colon X \dashrightarrow X_1$ – бирациональное отображение. Докажите, что ψ – изоморфизм.

Особенности поверхностей

(61) Разрешите следующую особенность

$$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

в $\mathbb{A}^3$ при помощи последовательности раздутий. Докажите, что эта особенность – дювалевская (т. е. исключительное множество состоит из (-2)-кривых).

Список литературы

[1] Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии,* Т. **1-2**, М. Наука (1988)

[2] Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия,* М. Мир (1981)

[3] Гриффитс Ф., Харрис Дж. *Принципы алгебраческой геометрии,* Т. **1-2**, М. Мир (1982)

[4] Barth W., Peters C., Van de Ven A. *Compact omplex surfaces,* Springer, (1984)

[5] Beauville A. *Compact complex surfaces,* Astérisque **54** (1978)

Дополнительная литература

[1] Reid M. *Chapters on algebraic surfaces,* in “Complex algebraic geometry” J. Kollár ed. AMS (1997) V. **3**, 1–334

[2] Клеменс Х., Коллар Я., Мори С. *Многомерная комплексная геометрия,* М.: Мир, (1993)

[3] Исковских В. А., Шафаревич И. Р. *Агебраические поверхности,* Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. **35** (1989) 131–263