

РАЦИОНАЛЬНЫЕ G -ПОВЕРХНОСТИ

ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2009/2010 УЧЕБНОГО ГОДА

ЗАДАЧИ

- (1) Докажите, что любое квадратичное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ в некоторых координатах может быть приведено к одному из следующих форм:

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{cases} (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) \\ (x_0x_2 : x_1x_2 : x_0^2) \\ (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 + x_0x_2) \end{cases}$$

- (2) Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – рациональная кубическая кривая. Можно ли ее отобразить на прямую преобразованием Кремоны?
 (3) Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – рациональная кривая степени 4. Можно ли ее отобразить на прямую преобразованием Кремоны?
 (4) Разложите квадратичное преобразование

$$(x, y) \longrightarrow (x, y + x^2)$$

в композицию проективных преобразований и стандартных квадратичных инволюций.

- (5) Когда преобразование де Жонкьера сопряжено проективному?
 (6) Пусть $G \subset \mathrm{St}_2(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа вида $G \simeq (\mu_p)^r$, где p – простое. Докажите, что $r \leq 2 + 2\delta_{2,p} + \delta_{3,p}$. Когда достигается равенство?
 (7) Рассмотрим композицию $\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ двух элементарных преобразований. Какое бирациональное отображение плоскости она индуцирует?
 (8) Обязательно ли кубическое отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является преобразованием де Жонкьера?
 (9) Обязательно ли отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ степени 4 является преобразованием де Жонкьера?
 (10) Обязательно ли отображения χ и $\chi^{-1} \in \mathrm{St}_2(\mathbb{C})$ имеют одинаковую степень?
 (11) Пусть бирациональное отображение $\chi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является бирегулярным в некоторой аффинной карте \mathbb{A}^2 . Какими свойствами обладает базисное множество системы $\chi_*^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$?