

Следующее утверждение установлено Ли в работе [1].

В любой свободной группе F_r , $r \geq 2$ существуют такие элементы u_1 и u_2 , что любой эндоморфизм ψ группы F_r с не циклическим образом полностью определен значениями $\psi(u_1)$ и $\psi(u_2)$.

Для доказательства этого факта в упомянутой работе были построены C -тестовые слова Ли. А именно, C -тестовым словом Ли для свободной группы ранга r от m переменных называют элемент $L_m(z_1, \dots, z_m)$ свободной группы ранга m такой, что:

- 1) если $L_m(g_1, \dots, g_m) = L_m(g'_1, \dots, g'_m) \neq 1$ в F_r , то элементы $g'_i \in F_r$ получаются из элементов $g_i \in F_r$ одновременным сопряжением, то есть для некоторого $s \in F_r$ имеют место равенства $g'_i = g_i^s$ для всех $i = 1, \dots, m$;
- 2) $L_m(g_1, \dots, g_m) = 1$ тогда и только тогда, когда элементы $g_1, \dots, g_m$ группы F_r лежат в одной циклической подгруппе;
- 3) если $L_m(g_1, \dots, g_m) \neq 1$ для некоторых элементов $g_1, \dots, g_m$ группы F_r , то $L_m(g_1, \dots, g_m)$ не является собственной степенью в F_r .

В работах [2, 3] эти слова были использованы для доказательства сильной вербальной замкнутости ряда групп.

Мы обсудим аналог (в определенном смысле) C -тестовых слов Ли для свободных произведений групп, а именно слова $M_{\underline{x}}(z_0, \dots, z_{n-1})$, $M'_{\underline{x}}(z_0, \dots, z_{n-1})$ и $M''_{\underline{x}}(z_0, \dots, z_{n-1})$ из нижеприведенной леммы, установленной в работе [4]. В частности, опираясь на эту лемму и некоторые известные факты, мы установим, что все нетривиальные свободные произведения групп сильно вербально замкнуты.

Лемма о словах. Пусть группа $H = \bigstar_{a \in \mathfrak{A}} H_a$ есть нетривиальное свободное произведение групп H_a и пусть $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$ есть такой кортеж элементов из H , что подгруппа $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ содержит хотя бы два некоммутирующих гиперболических элемента группы H . Тогда:

- а) существует слово $M_{\underline{x}}(z_0, \dots, z_{n-1}) \in F_n(z_0, \dots, z_{n-1})'$, вообще говоря, зависящее от кортежа $\underline{x}$, такое, что если для некоторого кортежа $(y_0, \dots, y_{n-1})$ элементов группы H выполнено равенство:

$$M_{\underline{x}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = M_{\underline{x}}(y_0, \dots, y_{n-1}),$$

то найдется такой элемент $v \in \langle M_{\underline{x}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \rangle_{\infty}$, что $x_i = v^{-1}y_i v$ при $i = 0, \dots, n-1$;

- б) существуют слова $M'_{\underline{x}}(z_0, \dots, z_{n-1}), M''_{\underline{x}}(z_0, \dots, z_{n-1}) \in F_n(z_0, \dots, z_{n-1})'$, вообще говоря, зависящие от кортежа $\underline{x}$, такие, что если для некоторого кортежа $(y_0, \dots, y_{n-1})$ элементов группы H одновременно выполнены равенства:

$$M'_{\underline{x}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = M'_{\underline{x}}(y_0, \dots, y_{n-1}) \quad \text{и} \quad M''_{\underline{x}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = M''_{\underline{x}}(y_0, \dots, y_{n-1}),$$

то $x_i = y_i$ при $i = 0, \dots, n-1$.

Список литературы

- [1] D. Lee, On certain C-test words for free groups, *J. Algebra*, 247 (2002), 509–540.
- [2] A. A. Klyachko, A. M. Mazhuga, Verbally closed virtually free subgroups, *Sb. Math.*, 209 (2018), DOI: 10.1070/SM8942. See also arXiv: 1702.07761.
- [3] A. M. Mazhuga, Strongly verbally closed groups, *J. Algebra*, 493 (1) (2018), 171–184.
- [4] A. M. Mazhuga, Free products of groups are strongly verbally closed, arXiv: 1803.10634.