

Задание №4 по ПРАКТИКУМУ по КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ: МАТРИЦЫ

1. Напишите функции, генерирующие следующие матрицы заданного размера n :

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & x_2 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Вычислите с помощью этих процедур определители матриц а) и б) и характеристический многочлен матрицы в) при некоторых значениях n . Установите закономерность и докажите ее.

2. Напишите функции, которые по заданной последовательности $x_1, \dots, x_{2n-1}$ генерируют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-2} & x_{2n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & & \ddots & \ddots & x_{n+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, а $B = (b_{ij})$ — матрица размера $r \times s$. Тензорным произведением матриц A и B называется матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

размера $mr \times ns$. Напишите функцию, генерирующую тензорное произведение двух матриц. Чему равен определитель тензорного произведения?

4. Заданы две системы векторов. Напишите функцию, возвращающую матрицу перехода от первой системы ко второй.

5. Даны две квадратные матрицы, являющихся жордановыми формами. Напишите функцию, которая проверяет, задают ли эти матрицы один и тот же линейный оператор.

6. Не используя функции построения жордановой нормальной формы и не вычисляя собственных значений, напишите свою функцию, определяющую, является ли матрица диагонализуемой над указанным полем. (Указание: рассмотрите линейную зависимость между степенями матрицы.)

7. Напишите функцию, которая по заданной системе векторов $v_1, \dots, v_n$ строит (в символьном виде) однородную систему линейных уравнений от переменных $x_1, \dots, x_n$, решением которой является подпространство $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

8. Напишите функцию, представляющую заданную невырожденную матрицу в виде произведения элементарных матриц. Функция должна вернуть список этих матриц.

9. Напишите функцию, определяющую по заданному вектору v и системе векторов L , принадлежит ли v линейной оболочке векторов из L . Напишите также функцию, дополняющую заданную систему векторов до базиса всего пространства.

10. Напишите свою функцию, применяющую процесс ортогонализации Грама-Шмидта к заданной системе векторов. Считайте, что скалярное произведение задано симметрической положительно определенной матрицей G .