

ЗАДАНИЕ №5 ПО ПРАКТИКУМУ ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ: МНОГОЧЛЕНЫ

1. Результатом двух многочленов $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ называется определитель матрицы Сильвестра размера $(m+n) \times (m+n)$:

$$\text{Res}(f(x), g(x)) := \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

Не используя функцию **resultant**, напишите наивный алгоритм вычисления результата двух многочленов. Когда результат равен нулю?

2. Реализуйте функцию разложения данного симметрического многочлена f по элементарным симметрическим многочленам $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Функция должна возвращать многочлен h , такой, что $h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f$.

3. Пусть $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$. Проверьте при небольших n , что

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & \sigma_1 & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

и

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

4. Напишите функцию, которая по двум многочленам $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ определяла бы

- а) изоморфны ли векторные пространства $\mathbb{C}[x]/(f)$ и $\mathbb{C}[x]/(g)$;
- б) изоморфны ли алгебры $\mathbb{C}[x]/(f)$ и $\mathbb{C}[x]/(g)$.

5. Напишите функцию, которая получала бы на вход квадратичную форму над $\mathbb{R}$, заданную как многочлен второй степени от переменных $x_1, \dots, x_n$, и выясняла бы, является ли она положительно (отрицательно) определенной.