

Часть 1

1. Напишите семейство функций, вычисляющих старший моном и старший коэффициент многочлена при порядках lex , deglex , degrevlex , а также для порядка, заданного матрицей.

2. Напишите функцию, редуцирующую заданный многочлен по множеству других многочленов относительно выбранного упорядочения. Напишите также функцию, проверяющую, является ли заданное множество авторедуцированным. Напомним, что множество является авторедуцированным, если каждый его элемент не редуцируется относительно остальных.

3. Напишите функцию, проверяющую, является ли заданное множество базисом Гребнера при выбранном упорядочении.

4. Напишите функцию, вычисляющую НОД и НОК многочленов от нескольких переменных. Воспользуйтесь тем, что $(f) \cap (g) = (\text{НОК}(f, g))$. В вычислениях разрешается использовать функцию `groebner_basis`.

5. Реализуйте функцию, проверяющую принадлежность многочлена f радикалу идеала $I \triangleleft \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]$. Функция должна использовать следующее свойство:

$$\begin{aligned} f \in \sqrt{I} &\iff \exists m : f^m \in I \iff \exists m : 1 \in I : f^m \iff \\ &\iff \exists m : 1 \in I : f^\infty \iff 1 \in (I + (1 - tf)) \cap \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Здесь $I : h = \{g \mid gh \in I\}$ и $I : h^\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} I : h^k$ — так называемые дробные идеалы.

В вычислениях разрешается использовать функцию `groebner_basis`.

Часть 2

1. Известно, что даже если образующие полиномиального идеала имеют степень d , то вычисление базиса Гребнера может приводить к многочленам степени 2^{2^d} . Проиллюстрируйте это на примере идеала $(x^{n+1} - yz^{n-1}w, xy^{n-1} - z^n, x^n z - y^n w)$ при degrevlex -упорядочении с $x > y > z > w$. Покажите с помощью вычислений при небольших n , что в базисе Гребнера содержится многочлен степени $n^1 + 2$. Попробуйте в общем виде выразить его через образующие идеала.

2. а) Найдите базис Гребнера идеала $I = (x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^2 + z^2 - 1)$, используя упорядочения lex и degrevlex с $x > y > z$. Убедитесь, что в degrevlex -случае базис Гребнера выглядит проще. Теперь найдите базис Гребнера идеала $I = (x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^3 + z^2 - 1)$ при тех же порядках (здесь вторая образующая отличается только в одном слагаемом). Сколько элементов в lex -базисе? Чему равна максимальная полная степень? Найдите наибольший коэффициент, встречающийся в многочленах базиса.

б) Постройте какой-нибудь идеал в кольце многочленов, порожденный однородными нелинейными многочленами от трех переменных, для которого lex - и degrevlex -базисы совпадают.

3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ t^2 + 2x^2 - xy - z^2 = 0, \\ t + y^3 - z^3 = 0. \end{cases}$$

Исключите t из этой системы с помощью лексикографического упорядочения. Что можно сказать о числе решений системы?

4. Поверхность Эннепера задается следующей параметрической системой:

$$\begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y = 3v + 3u^2v - v^3, \\ z = 3u^2 - 3v^2. \end{cases}$$

Найдите уравнение наименьшего многообразия V , содержащего эту поверхность, исключая параметры из этой системы. Попробуйте построить график этой поверхности.

5. Запишите с помощью полиномиальных уравнений от координат условие и формулировку теоремы Эйлера об окружности 9 точек: середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности. Верно ли, что уравнение, отвечающее за формулировку, принадлежит идеалу, порожденному уравнениями условия? Как учесть в этой задаче вырожденный случай?

Дополнительные задачи (для желающих повысить баллы)

1. Найдите все возможные редуцированные базисы Гребнера (при различных упорядочениях) у идеала $(x + y + z, xy + xz + yz, xyz - 1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

2. а) Пусть M — матрица размера $2 \times n$, элементами которой являются независимые переменные. Покажите, что множество миноров максимального размера этой матрицы является базисом Гребнера при любом упорядочении.

б) Верно ли это утверждение для матрицы $m \times n$?

3. Докажите с помощью полиномиальных вычислений теорему Морлея: точки пересечения смежных трисектрис произвольного треугольника образуют равносторонний треугольник.

4. Известно, что задача о построении треугольника по трем биссектрисам циркулем и линейкой неразрешима. Пусть a, b, c — произвольные стороны треугольника. Постройте систему уравнений, из которых можно было бы найти эти стороны по биссектрисам l_a, l_b и l_c , и найдите число ее решений. С помощью исключения переменных постройте в этом идеале многочлен $g(a, l_a, l_b, l_c)$ с целыми коэффициентами от четырех переменных. Найдите явный вид этого многочлена при $l_a = 2, l_b = 3$ и $l_c = 6$. Что можно сказать о группе Галуа этого многочлена?

5. Пусть идеал $I \triangleleft \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]$ является нульмерным, то есть, соответствующая система имеет лишь конечное число решений над алгебраическим замыканием $\mathcal{F}$. Пусть $I \cap \mathcal{F}[x_i] = (f_i)$. Пусть также g_i — результат освобождения многочлена f_i от кратных корней. Докажите, что $\sqrt{I} = I + (g_1, \dots, g_n)$. Напишите на основе этого свойства функцию вычисления радикала в нульмерном случае.