

Задания от 18.02

1. Напишите функцию **power**, получающую на вход a и неотрицательное целое n и вычисляющую a^n за время $O(\log n)$ («быстрое возведение в степень»).
2. Напишите функцию **is_symmetric**, проверяющую, является ли матрица (заданная как список строк) симметрической. Функция должна вернуть логическое значение (**True** или **False**).
3. Напишите функцию **is_prime**, проверяющую, является ли заданное число простым. Функция должна вернуть логическое значение.
4. Напишите функцию **prime_divisors**, возвращающую список простых делителей переданного целого числа (по возрастанию, с учётом кратностей).
5. Напишите функцию **gcd**, вычисляющую наибольший общий делитель двух целых чисел с помощью алгоритма Евклида.
6. Напишите функцию **xgcd**, вычисляющую наибольший общий делитель a и b и возвращающую тройку $\text{НОД}(a, b), x, y$, где $ax + by = \text{НОД}(a, b)$ (расширенный алгоритм Евклида).

Задания от 25.02

7. Напишите функцию **primes**, раскладывающую целое число на простые множители. Функция должна вернуть словарь пар вида {простой множитель: его степень}.
8. Напишите функцию **solve_quadratic**, получающую на вход три числа a, b и c и возвращающую кортеж из различных корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. В случае, если корней бесконечно много, верните значение **None**.
9. Многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ задан списком своих коэффициентов $[a_0, \dots, a_n]$. Напишите функцию **evaluate**, вычисляющую значение многочлена в точке x_0 наиболее эффективным образом.
10. Дан многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Напишите функцию, возвращающую все целые корни этого многочлена.

Задания от 04.03

11. Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

задана списком чисел $[i_1, \dots, i_n]$. Напишите функцию **sign**, вычисляющую знак подстановки.

12. Напишите функцию **cycles**, раскладывающую перестановку на независимые циклы (и возвращающую список этих циклов, каждый из которых тоже должен быть представлен как список).
13. Напишите функцию **order**, вычисляющую порядок перестановки.
14. * Напишите функцию **next_permutation**, принимающую на вход подстановку и возвращающую следующую за ней подстановку в лексикографическом порядке, либо **None**, если такой подстановки не существует.
15. Напишите серию функций, которые по заданной квадратной таблице размера $n \times n$ с элементами $0, 1, \dots, n-1$ определяют, задает ли эта таблица
 - коммутативную бинарную операцию;
 - ассоциативную бинарную операцию;
 - моноид (если да, то функция должна вернуть нейтральный элемент);
 - группу.
16. Напишите функцию, которая по двум таблицам, задающим бинарную операцию, проверяет, является ли данная перестановка их изоморфизмом.
17. Напишите функцию, проверяющую, изоморфны ли множества с этой бинарной операцией.
18. * В условиях предыдущей задачи найдите все полугруппы и моноиды из двух и трех элементов.

Задания от 11.03

19. Напишите функции, генерирующие следующие матрицы заданного размера n :

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & x_2 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Вычислите с помощью этих процедур определители матриц а) и б) и характеристический многочлен матрицы в) при некоторых значениях n . Установите закономерность и докажите ее.

20. Напишите функции, которые по заданной последовательности $x_1, \dots, x_{2n-1}$ генерируют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-2} & x_{2n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & & \ddots & \ddots & x_{n+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

21. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, а $B = (b_{ij})$ — матрица размера $r \times s$. Тензорным произведением матриц A и B называется матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

размера $mr \times ns$. Напишите функцию, генерирующую тензорное произведение двух матриц. Чему равен определитель тензорного произведения?

22. Функция Эйлера $\varphi(n)$ равна количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Проверьте для $n \leq 100$ утверждение, что определитель матрицы $A = (\text{НОД}(i, j))$ размера $n \times n$ равен $\varphi(2)\varphi(3) \dots \varphi(n)$.

Задания от 25.03

23. Пусть $A = (a_{ij})$ — символьная кососимметрическая матрица четного¹ порядка. Проверьте при небольших n помощью компьютерных вычислений, что существует многочлен $\text{pf } A$ от элементов a_{ij} , называемый *пфаффианом* матрицы A , такой, что $\det A = (\text{pf } A)^2$.

24. *Континуантой* называется определитель

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Проверьте (в символьном виде) при небольших n , что

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

25. (*Метод вычисления определителя Льюиса Кэрролла.*) Проверьте с помощью компьютерных вычислений при разных n справедливость тождества

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_{12} \dots x_{1,n-1}} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{vmatrix},$$

где $x_{i,j}$ являются формальными переменными.

¹Чему равен определитель A , если порядок нечетен?

26. (Формула Якоби.) Пусть M — обратимая матрица порядка n . Пусть $P = \{p_1 < \dots < p_k\}$ и $Q = \{q_1 < \dots < q_k\}$ — наборы индексов от 1 до n . Пусть $\bar{P} = \{p_{k+1} < \dots < p_n\}$ и $\bar{Q} = \{q_{k+1} < \dots < q_n\}$ — оставшиеся индексы. Обозначим через $M_{P,Q}$ подматрицу матрицы M , образованную строками с индексами из P и столбцами с индексами из Q . Проверьте экспериментально в символьном виде при разных n следующую формулу, выражающую минор обратной матрицы:

$$\det((M^{-1})_{P,Q}) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \left(\det M_{\bar{Q},\bar{P}} \right) (\det M)^{-1},$$

где σ и τ — подстановки из $\mathbf{S}_n$, такие, что $\sigma(i) = p_i$ и $\tau(j) = q_j$. Во что превращается эта формула при одноэлементных P и Q или при пустых $\bar{P}$ и $\bar{Q}$?

ЗАДАНИЯ ОТ 01.04

27. Не используя функций `diff` и `integrate`, напишите алгоритмы дифференцирования и интегрирования многочлена от нескольких переменных по заданной переменной.

28. Напишите функцию, освобождающую от кратных множителей заданный многочлен от одной переменной над полем нулевой характеристики.

29. Напишите функцию, возвращающую k -й элементарный симметрический многочлен от n переменных.

30. Напишите функцию, проверяющую, является ли заданный многочлен симметрическим.

ЗАДАНИЯ ОТ 08.04

31. Результатом двух многочленов $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ называется определитель матрицы Сильвестра размера $(m+n) \times (m+n)$:

$$\operatorname{Res}(f(x), g(x)) := \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & \dots & \dots & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_n & \dots & b_1 & b_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

Не используя функцию `resultant`, напишите наивный алгоритм вычисления результата двух многочленов. Когда результат равен нулю?

32. Пусть $f, g \in F[x]$, причем $m = \deg f$ и $n = \deg g$. Тогда

$$\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{mn} \operatorname{Res}(g, f).$$

Разделим f на g с остатком: $f = qg + r$, где $\deg r < \deg g$. В этом случае

$$\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{n(m-\deg r)} b_n^{m-\deg r} \operatorname{Res}(r, g).$$

Используя эти факты, предложите алгоритм для вычисления результата $\operatorname{Res}(f, g)$, аналогичный алгоритму Евклида.

33. Реализуйте функцию разложения данного симметрического многочлена f по элементарным симметрическим многочленам $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Функция должна возвращать многочлен h , такой, что $h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f$.

34. Пусть $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$. Проверьте при небольших n , что

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

и

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

Задания от 15.04

- 35.** Напишите семейство функций, вычисляющих старший моном и старший коэффициент многочлена от нескольких переменных при порядках `lex`, `deglex`, `degrevlex`.
- 36.** Напишите функцию, редуцирующую заданный многочлен по множеству других многочленов относительно зафиксированного упорядочения.
- 37.** Множество называется авторедуцированным, если каждый его элемент не редуцируется относительно остальных. Напишите также функцию, проверяющую, является ли заданное множество авторедуцированным.
- 38.** Напишите функцию, проверяющую, является ли заданное множество базисом Гребнера относительно зафиксированного упорядочения. (Проверьте, что S-полиномы каждой пары элементов редуцируются к нулю.)

Задание от 22.04

- 39.** Напишите собственную реализацию алгоритма Бухбергера вычисления базиса Гребнера.

Задания от 29.04

- 40.** Известно что вычисление базиса Гребнера может приводить к многочленам значительно большей степени, чем степень исходных образующих. Проиллюстрируйте это на примере идеала $(x^{n+1} - yz^{n-1}w, xy^{n-1} - z^n, x^n z - y^n w)$ при `degrevlex`-упорядочении с $x > y > z > w$. Покажите с помощью вычислений при небольших n , что в базисе Гребнера содержится многочлен степени $n^2 + 1$.
- 41.** Найдите базис Гребнера идеала $I = (x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^2 + z^2 - 1)$, используя упорядочения `lex` и `degrevlex` с $x > y > z$. Убедитесь, что в `degrevlex`-случае базис Гребнера выглядит проще. Теперь найдите базис Гребнера идеала $I = (x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^3 + z^2 - 1)$ при тех же порядках (здесь вторая образующая отличается только в одном слагаемом). Сколько элементов в `lex`-базисе? Чему равна максимальная полная степень? Найдите наибольший коэффициент, встречающийся в многочленах базиса.

- 42.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ t^2 + 2x^2 - xy - z^2 = 0, \\ t + y^3 - z^3 = 0. \end{cases}$$

Исключите t из этой системы с помощью лексикографического упорядочения. Что можно сказать о числе решений системы?

- 43.** Поверхность Эннепера задается следующей параметрической системой:

$$\begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y = 3v + 3u^2v - v^3, \\ z = 3u^2 - 3v^2. \end{cases}$$

Найдите уравнение наименьшего многообразия V , содержащего эту поверхность, исключая параметры из этой системы. Попробуйте построить график этой поверхности.

- 44.** Напишите функцию, вычисляющую НОД и НОК многочленов от нескольких переменных. Воспользуйтесь тем, что $(f) \cap (g) = (\text{НОК}(f, g))$. В вычислениях разрешается использовать функцию `groebner_basis`.

- 45.** Пусть $I \triangleleft \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]$ — идеал в кольце многочленов. *Радикалом* идеала I называется идеал

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n] \mid \exists m \in \mathbb{N} : f^m \in I\}.$$

Реализуйте функцию, проверяющую принадлежность многочлена f радикалу идеала I . Функция должна использовать следующее свойство:

$$f \in \sqrt{I} \iff 1 \in (I + (1 - tf)) \cap \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n],$$

где t — новая переменная. В вычислениях разрешается использовать функцию `groebner_basis`.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cox D., Little J., O'Shea D., *Ideals, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, New York, NY: Springer, 1998. [Имеется перевод: Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д., *Идеалы, многообразия и алгоритмы*, М., Мир, 2000.]