Задания от 09.09.2015

1. Напишите функцию `power`, получающую на вход a и неотрицательное целое n и вычисляющую a^n за время $O(\log n)$ («быстрое возведение в степень»).

2. Напишите функцию `gcd`, вычисляющую наибольший общий делитель двух целых чисел с помощью алгоритма Евклида.

3. Напишите функцию `xgcd`, вычисляющую наибольший общий делитель a и b и возвращающую тройку НОД $(a, b), x, y$, где $ax + by =$ НОД (a, b) (расширенный алгоритм Евклида).

Задания от 23.09.2015

4. Напишите функцию `primes_less_than_n`, возвращающую список простых чисел, не превосходящих заданного `n`. Используйте для этого решето Эратосфена.

5. Напишите функцию `prime_divisors`, возвращающую список простых делителей переданного целого числа (по возрастанию, с учётом кратностей).

6. Напишите функцию `primes`, раскладывающую целое число на простые множители. Функция должна вернуть словарь пар вида {простой множитель: его степень}.

7. Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

задана списком чисел $[i_1, \ldots, i_n]$. Напишите функцию `sign`, вычисляющую знак подстановки.

8. Напишите функцию `cycles`, раскладывающую перестановку на независимые циклы (и возвращающую список этих циклов, каждый из которых тоже должен быть представлен как список).

9. Напишите функцию `order`, вычисляющую порядок перестановки.

10. Напишите функцию `next_permutation`, принимающую на вход подстановку и возвращающую следующую за ней подстановку в лексикографическом порядке, либо `None`, если такой подстановки не существует.

11. Напишите серию функций, которые по заданной квадратной таблице размера $n \times n$ с элементами $0, 1, \ldots, n-1$ определяют, задает ли эта таблица

— коммутативную бинарную операцию;
— ассоциативную бинарную операцию;
— моноид (если да, то функция должна вернуть нейтральный элемент);
— группу.

12. Напишите функцию, которая по двум таблицам, задающим бинарную операцию, проверяет, является ли данная перестановка их изоморфизмом.

13. Напишите функцию, проверяющую, изоморфны ли множества с этой бинарной операцией.

14. В условиях предыдущей задачи найдите все полугруппы и моноиды из двух и трех элементов.

Задания от 07.10.2015

15. Напишите функцию `solve_quadratic`, получающую на вход три числа a, b и c и возвращающую кортеж из различных корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. В случае, если корней бесконечно много, верните значение `None`.

16. Многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ задан списком своих коэффициентов $[a_0, \ldots, a_n]$. Напишите функцию `evaluate`, вычисляющую значение многочлена в точке x_0 наиболее эффективным образом.

17. Дан многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Напишите функцию, возвращающую все целые корни этого многочлена.

В следующих задачах многочлен задается как объект в Sage.

18. Не используя функций `diff` и `integrate`, напишите алгоритмы дифференцирования и интегрирования многочлена от нескольких переменных по заданной переменной.

19. Напишите функцию, освобождающую от кратных множителей заданный многочлен от одной переменной над полем нулевой характеристики.

20. Напишите функцию, возвращающую k-й элементарный симметрический многочлен от n переменных.

21. Напишите функцию, проверяющую, является ли заданный многочлен симметрическим.

Задания от 21.10.2015

22. Напишите функции, генерирующие следующие матрицы заданного размера n:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{pmatrix}, \quad \text{в)}\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & x_2 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Вычислите с помощью этих процедур определители матриц а) и б) и характеристический многочлен матрицы в) при некоторых значениях n. Установите закономерность и докажите ее.

23. Напишите функции, которые по заданной последовательности $x_1, \dots, x_{2n-1}$ генерируют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-2} & x_{2n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & & \ddots & \ddots & x_{n+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

24. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, а $B = (b_{ij})$ — матрица размера $r \times s$. Тензорным произведением матриц A и B называется матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

размера $mr \times ns$. Напишите функцию, генерирующую тензорное произведение двух матриц. Чему равен определитель тензорного произведения?

25. Функция Эйлера $\varphi(n)$ равна количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Проверьте для $n \leqslant 100$ утверждение, что определитель матрицы $A = (\text{НОД}\,(i,j))$ размера $n \times n$ равен $\varphi(2)\varphi(3)\dots\varphi(n)$.

26. *Континуантой* называется определитель

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Проверьте (в символьном виде) при небольших n, что

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}.$$

27. *(Метод вычисления определителя Льюиса Кэролла.)* Проверьте с помощью компьютерных вычислений при разных n справедливость тождества

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_{12} \dots x_{1,n-1}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{2,n-1} & x_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{n1} & x_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{n2} & x_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{n,n-1} & x_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

где $x_{i,j}$ являются формальными переменными.

28. *(Формула Якоби.)* Пусть M — обратимая матрица порядка n. Пусть $P = \{p_1 < \ldots < p_k\}$ и $Q = \{q_1 < \ldots < q_k\}$ — наборы индексов от 1 до n. Пусть $\overline{P} = \{p_{k+1} < \ldots < p_n\}$ и $\overline{Q} = \{q_{k+1} < \ldots < q_n\}$ — оставшиеся индексы. Обозначим через $M_{P,Q}$ подматрицу матрицы M, образованную строками с индексами из P и столбцами с индексами из Q. Проверьте экспериментально в символьном виде при разных n следующую формулу, выражающую минор обратной матрицы:

$$\det\left((M^{-1})_{P,Q}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\left(\det M_{\overline{Q},\overline{P}}\right)(\det M)^{-1},$$

где σ и τ — подстановки из $\mathbf{S}_n$, такие, что $\sigma(i) = p_i$ и $\tau(j) = q_j$. Во что превращается эта формула при одноэлементных P и Q или при пустых $\overline{P}$ и $\overline{Q}$?

29. *Результантом* двух многочленов $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ называется определитель матрицы Сильвестра размера $(m+n)\times(m+n)$:

$$\operatorname{Res}(f(x), g(x)) := \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

Не используя функцию `resultant`, напишите наивный алгоритм вычисления результанта двух многочленов. Когда результант равен нулю?

30. Пусть $f, g \in F[x]$, причем $m = \deg f$ и $n = \deg g$. Тогда

$$\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{mn}\operatorname{Res}(g, f).$$

Разделим f на g с остатком: $f = qg + r$, где $\deg r < \deg g$. В этом случае

$$\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{n(m-\deg r)} b_n^{m-\deg r}\operatorname{Res}(r, g).$$

Используя эти факты, предложите алгоритм для вычисления результанта $\operatorname{Res}(f, g)$, аналогичный алгоритму Евклида.

Задания от 11.11

31. Реализуйте функцию разложения данного симметрического многочлена f по элементарным симметрическим многочленам $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Функция должна возвращать многочлен h, такой, что $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f$.

32. Пусть $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Проверьте при небольших n, что

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \ldots & \sigma_1 & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \ldots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

и

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ldots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

Задания от 02.12

33. Напишите функцию, редуцирующую заданный многочлен по множеству других многочленов относительно зафиксированного упорядочения.

34. Множество называется авторедуцированным, если каждый его элемент не редуцируется относительно остальных. Напишите также функцию, проверяющую, является ли заданное множество авторедуцированным.

35. Напишите функцию, проверяющую, является ли заданное множество базисом Гребнера относительно зафиксированного в кольце многочленов упорядочения. (Проверьте, что S-полиномы каждой пары элементов редуцируются к нулю.)

36. Напишите собственную реализацию алгоритма Бухбергера вычисления базиса Грёбнера.

37. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ t^2 + 2x^2 - xy - z^2 = 0, \\ t + y^3 - z^3 = 0. \end{cases}$$

Исключите t из этой системы с помощью лексикографического упорядочения. Что можно сказать о числе решений системы?

38. Поверхность Эннепера задается следующей параметрической системой:

$$\begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y = 3v + 3u^2v - v^3, \\ z = 3u^2 - 3v^2. \end{cases}$$

Найдите уравнение наименьшего многообразия V, содержащего эту поверхность, исключая параметры из этой системы. Попробуйте построить график этой поверхности.

39. Напишите функцию, вычисляющую НОД и НОК многочленов от нескольких переменных. Воспользуйтесь тем, что $(f) \cap (g) = (\text{НОК}\,(f, g))$. В вычислениях разрешается использовать функцию `groebner_basis`.

40. Пусть $I \triangleleft \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]$ — идеал в кольце многочленов. *Радикалом* идеала I называется идеал

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n] \mid \exists m \in \mathbb{N} : f^m \in I\}.$$

Реализуйте функцию, проверяющую принадлежность многочлена f радикалу идеала I. Функция должна использовать следующее свойство:

$$f \in \sqrt{I} \iff 1 \in (I + (1 - tf)) \cap \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n],$$

где t — новая переменная. В вычислениях разрешается использовать функцию `groebner_basis`.