Тропическая линейная алгебра

Александр Эмилевич Гутерман

guterman@list.ru

Определение.
Макс-алгебра или **тропическая** алгебра:

$$\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R}, \oplus, \otimes),$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \qquad a \otimes b = a + b,$$

нулевой элемент: $-\infty$, **единичный элемент:** 0.

Определение.
Макс-алгебра или тропическая алгебра:

$$\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R}, \oplus, \otimes),$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \qquad a \otimes b = a + b,$$

нулевой элемент: $-\infty$, единичный элемент: $\mathbf{0}$.

Примеры вычислений:

$$2 \oplus 3 = 3;\ 2 \otimes 3 = 5$$

Определение.
Макс-алгебра или **тропическая** алгебра:

$$\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R}, \oplus, \otimes),$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \qquad a \otimes b = a + b,$$

нулевой элемент: $-\infty$, **единичный элемент**: $\mathbf{0}$.

Примеры вычислений:

$$2 \oplus 3 = 3; \;\; 2 \otimes 3 = 5$$

$$2^{\otimes^3} =?$$

Определение.
Макс-алгебра или тропическая алгебра:

$$\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R}, \oplus, \otimes),$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \qquad a \otimes b = a + b,$$

нулевой элемент: $-\infty$, единичный элемент: $\mathbf{0}$.

Примеры вычислений:

$$2 \oplus 3 = 3; \;\; 2 \otimes 3 = 5$$

$$2^{\otimes^3} = 6$$

Определение.
Макс-алгебра или тропическая алгебра:

$$\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R}, \oplus, \otimes),$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \qquad a \otimes b = a + b,$$

нулевой элемент: $-\infty$, единичный элемент: $\mathbf{0}$.

Примеры вычислений:

$$2 \oplus 3 = 3; \;\; 2 \otimes 3 = 5$$

$$2^{\otimes^3} = 6$$

$$\sqrt{-1} = ?$$

Определение.

Макс-алгебра или тропическая алгебра:

$$\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R}, \oplus, \otimes),$$

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \qquad a \otimes b = a + b,$$

нулевой элемент: $-\infty$, единичный элемент: $\mathbf{0}$.

Примеры вычислений:

$$2 \oplus 3 = 3; \;\; 2 \otimes 3 = 5$$

$$2^{\otimes^3} = 6$$

$$\sqrt{-1} = -0.5$$

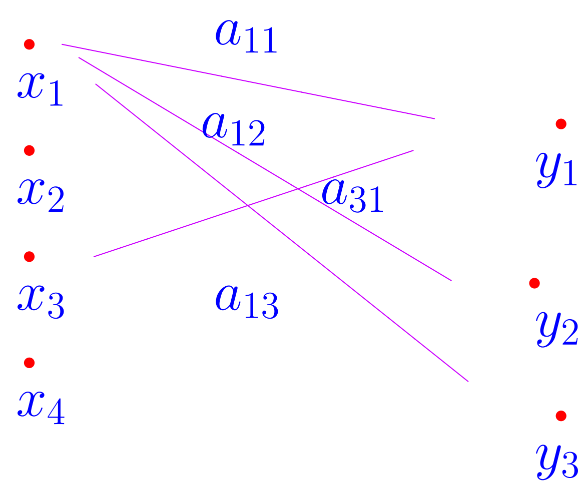
Уравнения

$$x \oplus 5 = 5 \iff \max\{5, x\} = 5 \iff x \in [-\infty;\ 5]$$

$$x \oplus 3 = 5 \iff \max\{3, x\} = 5 \iff x = 5$$

$$x \oplus 5 = 3 \iff \max\{5, x\} = 3 \iff x \in \emptyset$$

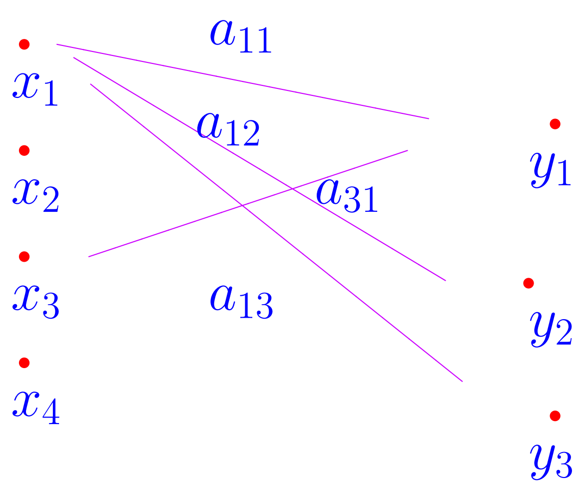
Проблема 1. Теория расписаний. Тропический подход



Порты **Аэропорты**

$$\max\{x_1 + a_{11}, x_2 + a_{21}, \ldots, x_k + a_{k1}\} = y_1$$

Проблема 1. Теория расписаний. Тропический подход



Порты **Аэропорты**

$$\begin{cases} \max\{x_1 + a_{11}, x_2 + a_{21}, \ldots, x_k + a_{k1}\} \;=\; y_1 \\ \max\{x_1 + a_{12}, x_2 + a_{22}, \ldots, x_k + a_{k2}\} \;=\; y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\{x_1 + a_{11}, x_2 + a_{21}, \ldots, x_k + a_{k1}\} & = & y_1 \\ \max\{x_1 + a_{12}, x_2 + a_{22}, \ldots, x_k + a_{k2}\} & = & y_2 \\ \max\{x_1 + a_{13}, x_2 + a_{23}, \ldots, x_k + a_{k3}\} & = & y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\{x_1 + a_{11}, x_2 + a_{21}, \ldots, x_k + a_{k1}\} &= y_1 \\ \max\{x_1 + a_{12}, x_2 + a_{22}, \ldots, x_k + a_{k2}\} &= y_2 \\ \max\{x_1 + a_{13}, x_2 + a_{23}, \ldots, x_k + a_{k3}\} &= y_3 \\ \max\{x_1 + a_{14}, x_2 + a_{24}, \ldots, x_k + a_{k4}\} &= y_4 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\max\{x_1 + a_{11}, x_2 + a_{21}, \ldots, x_k + a_{k1}\} & = & y_1 \\
\max\{x_1 + a_{12}, x_2 + a_{22}, \ldots, x_k + a_{k2}\} & = & y_2 \\
\max\{x_1 + a_{13}, x_2 + a_{23}, \ldots, x_k + a_{k3}\} & = & y_3 \\
\max\{x_1 + a_{14}, x_2 + a_{24}, \ldots, x_k + a_{k4}\} & = & y_4 \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
\max\{x_1 + a_{1s}, x_2 + a_{2s}, \ldots, x_k + a_{ks}\} & = & y_s
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\max\{x_1 + a_{11}, x_2 + a_{21}, \ldots, x_k + a_{k1}\} & = & y_1 \\
\max\{x_1 + a_{12}, x_2 + a_{22}, \ldots, x_k + a_{k2}\} & = & y_2 \\
\max\{x_1 + a_{13}, x_2 + a_{23}, \ldots, x_k + a_{k3}\} & = & y_3 \\
\max\{x_1 + a_{14}, x_2 + a_{24}, \ldots, x_k + a_{k4}\} & = & y_4 \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
\max\{x_1 + a_{1s}, x_2 + a_{2s}, \ldots, x_k + a_{ks}\} & = & y_s
\end{cases}
$$

$$\max\{7,2\}+\max\{5,8\}=15\neq 12=\max\{7+5,2+8\}$$

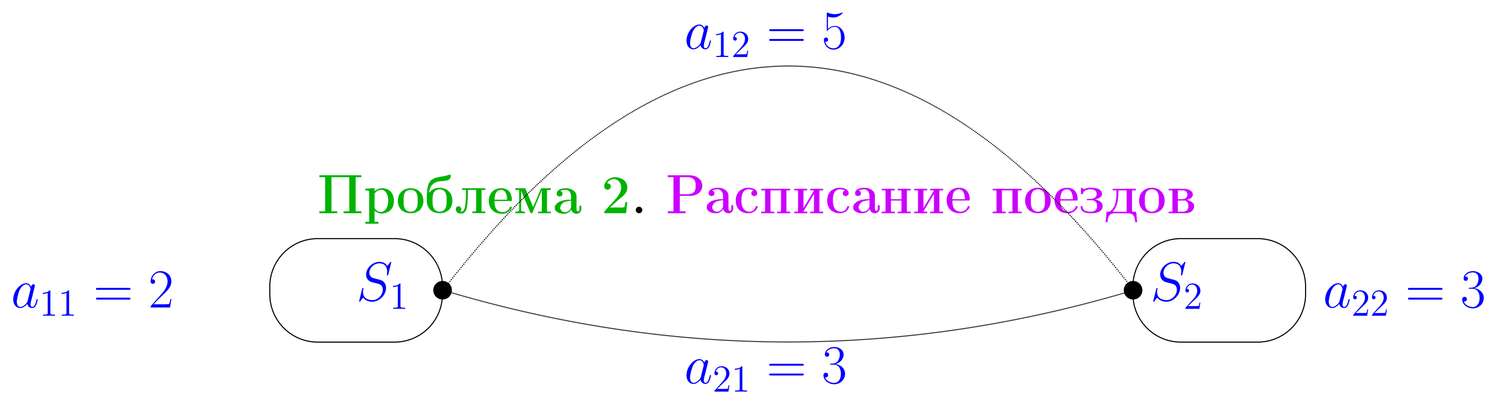
$$\max \longleftrightarrow \oplus$$

$$+ \longleftrightarrow \otimes$$

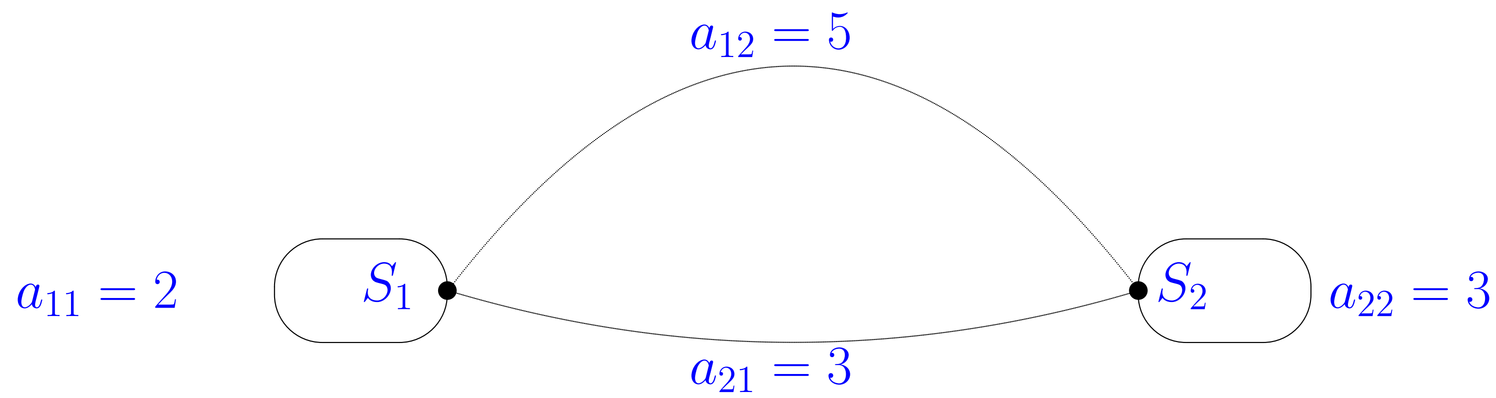
$$\begin{cases}
x_1\otimes a_{11}\oplus x_2\otimes a_{21}\oplus\ldots\oplus x_k\otimes a_{k1} & = & y_1\\
x_1\otimes a_{12}\oplus x_2\otimes a_{22}\oplus\ldots\oplus x_k\otimes a_{k2} & = & y_2\\
x_1\otimes a_{13}\oplus x_2\otimes a_{23}\oplus\ldots\oplus x_k\otimes a_{k3} & = & y_3\\
x_1\otimes a_{14}\oplus x_2\otimes a_{24}\oplus\ldots\oplus x_k\otimes a_{k4} & = & y_4\\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\\
x_1\otimes a_{1s}\oplus x_2\otimes a_{2s}\oplus\ldots\oplus x_k\otimes a_{ks} & = & y_s
\end{cases}$$

$$A\otimes x=y$$

Проблема 2. Расписание поездов



1. Время движения каждого поезда задано и фиксировано.
2. Частота должна быть сколь возможно максимальной.
3. Частота должна быть постоянной по всем маршрутам (регулярное расписание).
4. Пассажиры должны иметь возможность пересесть с поезда на поезд на станции.
5. Поезда должны стоять на станции наименьшие возможные промежутки времени.



$a_{11} = 2$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 3 = a_{22}$. **Тогда**

$$\begin{cases} x_1(k+1) \ \geq \ \max\{x_1(k)+2, x_2(k)+5\} \\ x_2(k+1) \ \geq \ \max\{x_1(k)+3, x_2(k)+3\} \end{cases}$$

По п. 3

$$\begin{cases} x_1(k+1) \ = \ \max\{x_1(k)+2, x_2(k)+5\} \\ x_2(k+1) \ = \ \max\{x_1(k)+3, x_2(k)+3\} \end{cases}$$

Если $x(0)$ **дано, то остальное определяется единственным образом!**

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & \max\{x_1(k)+2, x_2(k)+5\} \\ x_2(k+1) & = & \max\{x_1(k)+3, x_2(k)+3\} \end{cases}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0 \Rightarrow$

$$x(k)\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0 \Rightarrow$

$$x(k)\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

По п. 3 последнее лучше.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \max\{x_1(k)+2, x_2(k)+5\} \\ x_2(k+1) = \max\{x_1(k)+3, x_2(k)+3\} \end{cases}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0 \Rightarrow$

$$x(k):\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0 \Rightarrow$

$$x(k):\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

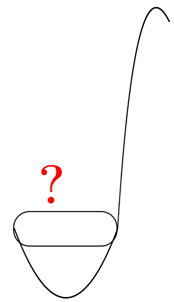
По п. 3 последнее лучше.

Как его найти ?

?

?

Интервал регулярного расписания определяется тропическим спектром, а само расписание — тропическим собственным вектором.



Интервал регулярного расписания определяется тропическим спектром, а само расписание — тропическим собственным вектором.

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

$$A \otimes v = \lambda \otimes v (= \lambda + v)$$

Практический вопрос

Пусть администрация железной дороги набрала денег на пятый поезд. На какой путь его поставить, чтобы расписание не ухудшилось? Можно ли за счет этого улучшить расписание?

Как решать тропические системы

линейных алгебраических уравнений?

Например, так устроены функции ранга в тропическом мире