СВЕРХНАСЫЩЕННЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

ИВАН В. АРЖАНЦЕВ

Эта заметка посвящена комбинаторике наборов векторов с целыми координатами. Рассматриваемая проблема мотивирована задачами алгебры, алгебраической геометрии, теории чисел и теории представлений. Более точно, определяемое ниже свойство насыщенности равносильно нормальности замыкания торической орбиты; оно допускает интересные интерпретации в коммутативной и комбинаторной алгебре, в теории числовых полугрупп и теории представлений колчанов, см., например, [2], [3], [4, Sec. 1.4], [5], [6, Ch. 13], [7]. Здесь мы ограничимся элементарной версией проблемы, которая, собственно, и составляет наиболее содержательную ее часть.

Пусть $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}\}$ – множество наборов целых чисел, состоящих из n элементов. Множество $\mathbb{Z}^n$ часто называют *целочисленной решеткой* или просто *решеткой.* Также нам понадобится множество $\mathbb{Q}^n = \{(y_1, \ldots, y_n) : y_i \in \mathbb{Q}\}$ наборов рациональных чисел, которое мы будем называть *пространством.* Наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ называют *точками*, или *векторами*, а элементы этих наборов — их *координатами.*

Элементы решетки $\mathbb{Z}^n$ можно покоординатно складывать/вычитать и умножать на целые числа:

$$\text{если} \quad c = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n, \ c' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{Z}^n, \ r \in \mathbb{Z},$$

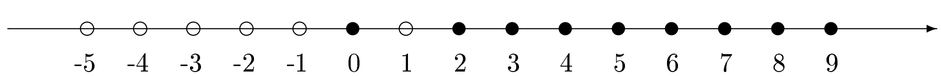
$$\text{то} \quad c \pm c' = (x_1 \pm x'_1, \ldots, x_n \pm x_n) \quad \text{и} \quad rc = (rx_1, \ldots, rx_n).$$

Аналогичные формулы определяют сложение/вычитание и умножение на рациональные числа для элементов пространства $\mathbb{Q}^n$.

С каждым подмножеством $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ мы свяжем:

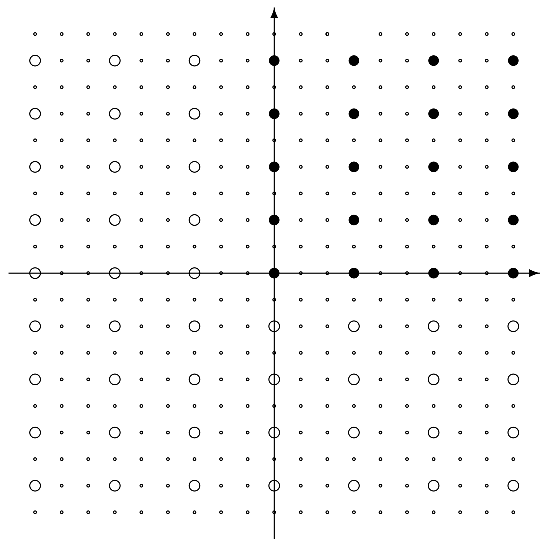
- подмножество $\mathbb{Z}_+\mathcal{A} = \{r_1a_1 + \cdots + r_sa_s : a_i \in \mathcal{A}, r_i \in \mathbb{Z}, r_i \geq 0\}$ элементов решетки $\mathbb{Z}^n$, которые можно получить, складывая (возможно, с повторениями) элементы из $\mathcal{A}$;
- подмножество $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \{r_1a_1 + \cdots + r_sa_s : a_i \in \mathcal{A}, r_i \in \mathbb{Z}\}$ элементов решетки $\mathbb{Z}^n$, которые можно получить, складывая/вычитая (возможно, с повторениями) элементы из $\mathcal{A}$;
- подмножество $\mathbb{Q}_+\mathcal{A} = \{q_1a_1 + \cdots + q_sa_s : a_i \in \mathcal{A}, q_i \in \mathbb{Q}, q_i \geq 0\}$ элементов пространства $\mathbb{Q}^n$, которые можно получить из элементов из $\mathcal{A}$ посредством сложения и умножения на неотрицательные рациональные числа.

Пример 1. Пусть $n = 1$ и $\mathcal{A} = \{2, 3\}$.



Тогда $\mathbb{Z}_+\mathcal{A} = \{c \in \mathbb{Z} : c \geq 2\} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}_+\mathcal{A} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$.

Пример 2. Пусть $n = 2$ и $\mathcal{A} = \{(3, 0), (0, 2)\}$.



Здесь $\mathbb{Z}_+\mathcal{A} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in 3\mathbb{Z}, x_1 \geq 0, x_2 \in 2\mathbb{Z}, x_2 \geq 0\}$, $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in 3\mathbb{Z}, x_2 \in 2\mathbb{Z}\}$ и $\mathbb{Q}_+\mathcal{A} = \{(y_1, y_2) : y_i \in \mathbb{Q}, y_i \geq 0\}$.

Ясно, что для любого $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ имеем $\mathbb{Z}_+\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A}$.

Определение 3. Подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ называется *насыщенным* (поанглийски saturated), если $\mathbb{Z}_+\mathcal{A} = \mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A}$.

Пример 4. Подмножество $\mathcal{A}$ в примере 2 является насыщенным, а в примере 1 – нет.

Задача 5. Приведите как можно больше разнообразных примеров насыщенных и ненасыщенных подмножеств.

Задача 6. Докажите, что подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ насыщенно тогда и только тогда, когда условие "$rc \in \mathbb{Z}_+\mathcal{A}$ для некоторого натурального r и некоторого $c \in \mathbb{Z}\mathcal{A}$" влечет $c \in \mathbb{Z}_+\mathcal{A}$.

Сейчас нам будет полезно определить понятие выпуклого полиэдрального конуса, который мы для краткости будем называть просто конусом.

Определение 7. Подмножество $K \subseteq \mathbb{Q}^n$ называется *конусом*, если найдется конечное подмножество $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ такое, что $K = \mathbb{Q}_+\mathcal{A}$.

Теорема 8. *Подмножество $K \subseteq \mathbb{Q}^n$ является конусом тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством решений некоторой конечной системы однородных линейных неравенств с рациональными коэффициентами.*

Доказательство этой теоремы не совсем элементарно, его можно найти, например, в книге [1].

Элементы множества $(\mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A}) \setminus \mathbb{Z}_+\mathcal{A}$ удобно представлять себе как "дырки" во множестве целых точек конуса $\mathbb{Q}_+\mathcal{A}$. Так, в примере 1 "дыркой" является число 1.

Задача 9. Докажите, что при $n = 1$ для любого подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} \neq \{0\}$, множество $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ совпадает с $d\mathbb{Z}$, где d – наибольшее натуральное число, на которое делятся все элементы подмножества $\mathcal{A}$. Объясните также, почему такое число d существует.

Задача 10. Докажите, что если подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ содержит как положительные, так и отрицательные числа, то $\mathcal{A}$ насыщенно.

Задача 11. Докажите, что для любого подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ множество "дырок" $(\mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A}) \setminus \mathbb{Z}_+\mathcal{A}$ конечно.

Пример 12. Пусть $\mathcal{A} = \{6, 10\}$. Тогда $\mathbb{Z}_+\mathcal{A} = \{0, 6, 10, 12\} \cup \{2c : c \in \mathbb{Z}, c \geq 8\}$, $\mathbb{Z}\mathcal{A} = 2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}_+\mathcal{A} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$. Тем самым, "дырками" в этом примере являются числа 2, 4, 8 и 14. Обоснование этого примера следует из решения старинной олимпиадной задачи: *докажите, что любую сумму денег большую 7 копеек можно выдать монетами 3 коп. и 5 коп.*

Задача 13. Приведите пример конечного подмножества $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^2$, для которого множество "дырок" $(\mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A}) \setminus \mathbb{Z}_+\mathcal{A}$ бесконечно.

Задача 14. Приведите пример конечного насыщенного множества, в котором есть ненасыщенное подмножество.

Теперь мы готовы определить наш основной персонаж.

Определение 15. Подмножество $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ называется *сверхнасыщенным* (в [7] использован термин "hereditarily normal"), если любое подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ является насыщенным.

Задача 16. Докажите, что подмножество $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ является сверхнасыщенным.

В настоящее время известно достаточно мало примеров сверхнасыщенных подмножеств. Пожалуй, самым красивым результатом в этом направлении является следующая теорема.

Теорема 17. [5], [7] *Пусть $\Phi_n \subset \mathbb{Z}^n$ – подмножество векторов, у которых ровно одна координата равна 1, ровно одна равна -1, а все остальные координаты равны нулю. Тогда подмножество Φ_n является сверхнасыщенным.*

Эта теорема допускает элементарное доказательство, и мы настоятельно рекомендуем читателю его найти.

Ясно, что подмножество сверхнасыщенного подмножества сверхнасыщенно. Поэтому естественно определить

Определение 18. Сверхнасыщенное подмножество $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ называется *максимальным*, если $\mathcal{A}$ не содержится ни в каком большем сверхнасыщенном подмножестве $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z}^n$.

Основная проблема. *Описать все максимальные сверхнасыщенные подмножества $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$.*

Покажем, что для любого n максимальное сверхнасыщенное подмножество в $\mathbb{Z}^n$ существует. Если подмножество не является сверхнасыщенным, то в нем есть конечное ненасыщенное подмножество (объясните!). Рассмотрим объединение элементов некоторой цепи сверхнасыщенных подмножеств. Если оно не является сверхнасыщенным, то сожержащееся в нем конечное ненасыщенное подмножество попало бы в объединение конечного числа элементов цепи, а значит и в некоторый элемент цепи, что противоречит сверхнасыщенности этого элемента. Теперь существование максимального сверхнасыщенного подмножества следует из леммы Цорна.

Задача 19. Докажите, что $\{\pm 2^n : n \geq 0\} \cup \{0\} \subset \mathbb{Z}$ — максимальное сверхнасыщенное подмножество.

Задача 20. Опишите все максимальные сверхнасыщенные подмножества в $\mathbb{Z}$.

(*Указание.* Такие подмножества можно задавать двумя бесконечными последовательностями простых чисел.)

Наконец, сформулируем два частных случая основной проблемы, решения которых автору неизвестны.

Проблема 1. *Описать все максимальные сверхнасыщенные подмножества* $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^2$.

Проблема 2. *Описать, или хотя бы привести примеры конечных максимальных сверхнасыщенных подмножеств* $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$. *В частности, является ли сверхнасыщенное подмножество* $\Phi_n \cup \{0\} \subset \mathbb{Z}^n$ *из теоремы 17 максимальным?*

Литература

[1] В.А. Артамонов и В.Н. Латышев, Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М.: Факторил Пресс, 2004

[2] J.B. Carrel and A. Kurth, Normality of torus orbit closures in G/P. J. Algebra **233** (2000), 122-134

[3] C. Chindris, Orbit semigroups and representation type of quivers. Preprint `arXiv:0708.3413`

[4] W. Fulton, Intorduction to Toric Varieties. Annals of Math. Studies **131**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993

[5] J. Morand, Closures of torus orbits in adjoint representations of semisimple groups. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **328:3** (1999), 197–202

[6] B. Sturmfels, Gröbner Bases and Convex Polytopes. Universiy Lecture Series **8**, AMS, Providence RI, 1996

[7] B. Sturmfels, Equations defining toric varieties. Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Part 2, AMS, Providence RI (1997), 437–449

кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова

E-mail address: `arjantse@mccme.ru`