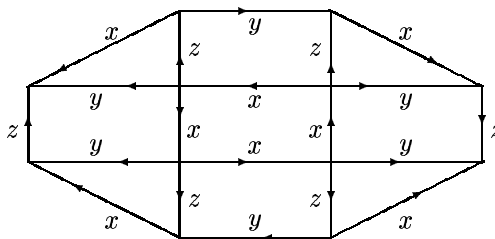


Задачи к главе 5

1.

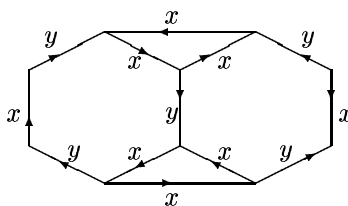


Этот рисунок показывает, что в группе $\langle x, y, z \mid \dots \rangle$ выполнено равенство $[x, y] = z$. Является ли эта диаграмма приведённой?

2. Нарисуйте диаграмму ван Кампена вывода равенства $[x, (xy)^n] = 1$ в (диэдральной) группе

$$\langle x, y \mid (xy)^{2n} = x^2 = y^2 = 1 \rangle.$$

3.



Пользуясь этим рисунком (заимствованном из книжки [Ольш89]) покажите, что в группе с тождеством $x^3 = 1$ каждый элемент коммутирует со всеми своими сопряжёнными. Выведите отсюда, что группы с таким тождеством являются

- а) локально разрешимыми;
- б) локально конечными.

4. Расчлените диаграмму из предыдущей задачи на клетки с хвостиками и покажите, что (в любой группе) коммутатор $[[x, y], y]$ представляется в виде произведения четырёх кубов.

5. Покажите, что копредставление $\langle x, y, \dots \mid w^n = 1 \rangle$ удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, если $n \geq 6$, а w — любой элемент свободной группы $F(x, y, \dots)$. Покажите, что это утверждение перестает быть верным при $n = 5$.

6. Покажите, что группа

$$\langle x, y, \dots \mid w_1^{n_1} = 1, w_2^{n_2} = 1, \dots \rangle$$

может быть задана копредставлением с условием $C'(\frac{1}{6})$, если $n_i \geq 6$, а w_i — циклически несократимые элементы свободной группы $F(x, y, \dots)$ одинаковой длины, причём w_i не сопряжено $w_j^{\pm 1}$ при $i \neq j$.

7. Покажите, что в группе G с условием $C'(\frac{1}{6})$

- а) элемент, k -я степень которого является определяющим соотношением, имеет порядок ровно k ;
- б) все конечные подгруппы являются циклическими;
- в) все абелевы подгруппы являются циклическими;
- г) централизатор каждого неединичного элемента является циклическим;
- д) не может выполняться нетривиальное тождество;
- е) содержится неабелева свободная подгруппа, если группа G нециклическая;
- ё) в каждой нециклической подгруппе содержится неабелева свободная подгруппа;
- ж) нет нетривиальных полных подгрупп.

8. Может ли группа с условием $C'(\frac{1}{6})$ быть неабелевой простой?

9. Верно ли, что каждая конечно определённая группа с условием $C'(\frac{1}{6})$ является финитно аппроксимируемой? (Это известная нерешённая задача.)

10. Приведите пример группы, которая

- а) вкладывается в группу с условием $C'(\frac{1}{6})$, но не может быть задана копредставлением с условием $C'(\frac{1}{6})$;
- б) не вкладывается ни в какую группу с условием $C'(\frac{1}{6})$.

11. Оцените время работы и расход памяти для алгоритма Дэна.

12. Приведите пример копредставления, удовлетворяющего условиям $C'(\lambda)$ при всех $\lambda > \frac{1}{6}$, к которому неприменим алгоритм Дэна.

13. Покажите, что в конечно определённой группе с условием $C'(\frac{1}{8})$ разрешима проблема сопряжённости.
14. Покажите, что конечно определённая группа с условием $C'(\frac{1}{8})$ является гиперболической.