

## ОЧЕНЬ МАЛЕНЬКИЕ НЕЛЕЙТОНОВЫ КОМПЛЕКСЫ

Наталия С. Дергачёва Антон А. Клячко

*Механико-математический факультет Московского государственного университета  
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.*

*Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
nataliya.dergacheva@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su*

Сколько двумерных клеток должны содержать два конечных двумерных псевдосимплексиальных комплекса, имеющих общее накрытие, но не имеющих общего конечного накрытия? Мы получаем почти окончательный ответ: минимальное возможное число двумерных клеток — это 3, 4 или 5 (в каждом комплексе).

### 1. Введение

**Теорема Лейтона** [Lei82]. *Если два конечных графа имеют общее накрытие, то они имеют общее конечное накрытие.*

Альтернативные доказательства и различные обобщения этого результата можно найти, например, в [Neu10], [BaK90], [SGW19], [Woo21], [BrS21] и литературе там цитируемой.

Для двумерных CW-комплексов (и клеточных накрытий) аналогичная теорема перестаёт быть верной:

- первый пример такой *нелейтоновой* пары комплексов ([Wis96] и [Wis07]) содержал по шесть двумерных клеток в каждом комплексе;
- потом это число было понижено до четырёх [JaW09];
- потом — до двух [DK23].

Существует ли нелейтонова пара комплексов с одной двумерной клеткой (в каждом из двух комплексов, или хотя бы в одном) — неизвестно.

Мы рассматриваем другую меру сложности CW-комплексов — число двумерных симплексов (треугольников) в (обобщённых) триангуляциях. Другими словами, мы рассматриваем двумерные *псевдосимплексиальные* комплексы, то есть двумерные CW-комплексы, в которых характеристическое отображение для каждой клетки является отображением симплекса, и ограничение этого отображения на каждую грань является характеристическим отображением для некоторой другой клетки (смотрите, например, [БП04]). Грубо говоря, это означает, что двумерные клетки являются треугольниками, но разрешаются примыкания одного треугольника к другому (или к себе) по нескольким рёбрам или вершинам.

В этом смысле пример из [JaW09] лучше — там (обобщённая) триангуляция даёт нелейтонову пару псевдосимплексиальных двумерных комплексов, содержащую по 8 треугольников в каждом комплексе (тогда как в [Wis96] и [Wis07] получается 12, а в [DK23] — 24 треугольника в каждом комплексе).

**Основная теорема** (упрощённая формулировка). *Существуют два конечных двумерных псевдосимплексиальных комплекса, имеющих общее накрытие, но не имеющих общего конечного накрытия, и содержащих по пять двумерных клеток (треугольников) каждый.*

В конце параграфа 2 можно найти явный вид этих комплексов. А в параграфе 3 мы доказываем следующий факт.

**Утверждение 1.** *Если два конечных двумерных псевдосимплексиальных комплекса имеют общее накрытие, но не имеют общего конечного накрытия, то каждый из этих комплексов содержит не менее трёх двумерных клеток.*

Таким образом, минимальное возможное число двумерных клеток в псевдосимплексиальном комплексе, входящем в нелейтонову пару, это одно из трёх чисел: 3, 4 или 5.

**Обозначения**, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $x$  и  $y$  — элементы некоторой группы, то  $x^y$ ,  $x^{ky}$  и  $x^{-y}$  обозначают  $y^{-1}xy$ ,  $y^{-1}x^ky$  и  $y^{-1}x^{-1}y$ , соответственно. Символ  $\mathbb{Z}_n$  (или  $\langle x \rangle_n$ ) обозначает циклическую группу порядка  $n$  (порождённую элементом  $x$ ). Свободная группа ранга два (с базисом  $x, y$ ) обозначается символом  $F_2$  (или  $F(x, y)$ ). Символ  $*$  обозначает свободное произведение. *Группы Баумслага–Солитэра* — это  $BS(n, m) \stackrel{\text{опр}}{=} \langle c, d \mid c^{nd} = c^m \rangle$ .

Авторы благодарят фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## 2. Доказательство основной теоремы

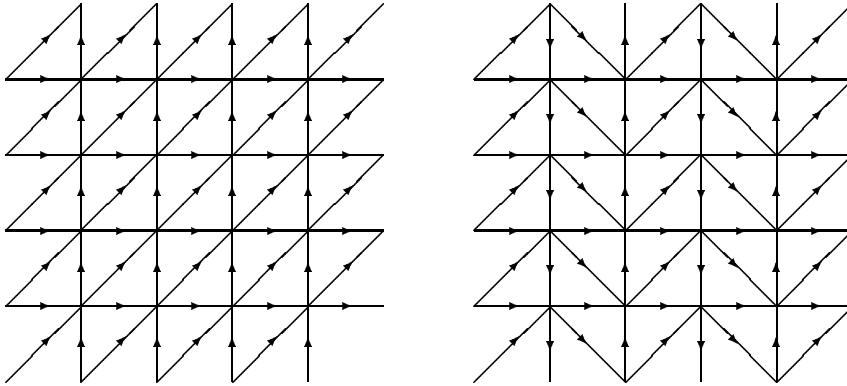
Возьмём «триангулированные» копредставления фундаментальных групп тора и бутылки Клейна:

$$G_1 = \langle a, b, z \mid ab = z = ba \rangle \simeq \text{BS}(1, 1) \quad \text{и} \quad G_{-1} = \langle a, b, z \mid ab = z = ba^{-1} \rangle \simeq \text{BS}(1, -1),$$

и рассмотрим свободные произведения  $H_\varepsilon = \underset{b=h}{\ast} G_\varepsilon * H$  с объединённой циклической подгруппой групп  $G_\varepsilon$  и некоторой группы  $H = \langle X \mid R \rangle \supseteq \langle h \rangle_\infty$  (здесь и везде далее  $\varepsilon = \pm 1$ ). Пусть  $K_\varepsilon$  — стандартные (одновершинные) комплексы следующих копредставлений групп  $H_\varepsilon$ :

$$H_\varepsilon = \left\langle \{a, z\} \sqcup X \mid \{a\hat{h}z^{-1}, \hat{h}a^\varepsilon z^{-1}\} \sqcup R \right\rangle, \quad \text{где } \hat{h} \text{ — слово в алфавите } X^{\pm 1}, \text{ представляющее элемент } h \in H.$$

Графы Кэли групп  $G_\varepsilon$ , разумеется, изоморфны (как абстрактные неориентированные графы), то же самое можно сказать про универсальные накрытия стандартных комплексов копредставлений групп  $G_\varepsilon$  (эти накрытия представляют собой плоскость, разбитую на правильные треугольники, рис. 1).



Универсальные накрытия стандартных комплексов копредставлений  $G_1$  (слева) и  $G_{-1}$  (справа); вертикальные, горизонтальные и диагональные рёбра помечены буквами  $a$ ,  $b$  и  $z$ , соответственно; каждый маленький треугольник заклеен двумерной клеткой.

Рис. 1

Чуть менее тривиальное наблюдение состоит в том, что изоморфизм универсальных накрытий имеет место также для групп  $H_\varepsilon$ :

для любой группы  $H$  и любого элемента  $h \in H$  бесконечного порядка универсальные накрытия комплексов  $K_\varepsilon$  изоморфны.

Этот факт (который читатель может назвать очевидным) подробно объясняется в [DK23], наблюдение (\*). Правда в [DK23] рассматриваются стандартные (нетриангулированные) копредставления групп  $G_\varepsilon \simeq \text{BS}(1, \varepsilon)$ , то есть копредставления с одним соотношением и двумя образующими; но нетрудно убедиться, что вспомогательный образующий  $z$  ничему не мешает.

Если же комплексы  $K_\varepsilon$  допускают общее конечное накрытие, то группы  $H_\varepsilon$  обязаны обладать изоморфными подгруппами одинарного конечного индекса. Действительно, накрытие степени  $k$  комплекса  $K_\varepsilon$  имеет  $k$  вершин (поэтому изоморфными могут оказаться только накрытия одинаковой степени), и фундаментальная группа накрывающего комплекса изоморфна подгруппе индекса  $k$  в  $H_\varepsilon$ .

Теперь возьмём конкретную группу  $H$  и элемент  $h \in H$ :

$$H = \text{BS}(1, 2) = \langle c, d \mid c^d = c^2 \rangle \simeq \langle c, d, x, y \mid d^{-1}c = x, xd = y = c^2 \rangle \quad \text{и} \quad h = c.$$

Для завершения доказательства основной теоремы осталось доказать следующий факт.

**Лемма о слабой несоизмеримости.** Группы  $H_\varepsilon = \langle a, c, d \mid a^c = a^\varepsilon, c^d = c^2 \rangle$ , где  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ , не содержат изоморфных подгрупп одинарного конечного индекса (то есть если  $U_{+1} \subseteq H_{+1}$  и  $U_{-1} \subseteq H_{-1}$  — подгруппы одинарного конечного индекса, то  $U_{+1} \not\simeq U_{-1}$ ).

**Доказательство.** Пусть  $U \subseteq H_\varepsilon$  — подгруппа конечного индекса. Заметим, что её пересечение с нормальным замыканием  $C \stackrel{\text{опр}}{=} \langle\langle c \rangle\rangle$  элемента  $c \in H_\varepsilon$  обладает следующими свойствами:

- 1) индекс  $|C : C \cap U|$  нечётный;
- 2) подгруппа  $C \cap U$  нормальна в  $H_\varepsilon$ ;

$$3) C \cap U = \left\langle \left\{ u \in U \mid \exists k \in \mathbb{N} \exists u' \in U u^{u'} = u^{2^k} \right\} \right\rangle.$$

Действительно, Пусть  $\widehat{U} \subseteq U$  — нормальная в  $H_\varepsilon$  подгруппа конечного индекса (которая всегда существует, как известно). Выберем  $m$  так, что  $c^m \in \widehat{U}$  (для обоих  $\varepsilon = \pm 1$ , это можно сделать в силу конечности индексов  $|H_\varepsilon : \widehat{U}|$ ). Число  $m$  можно считать нечётным (поскольку  $c$  и  $c^2$  сопряжены). Пусть  $\varphi$  — естественный гомоморфизм

$$H_\varepsilon \xrightarrow{\varphi} \widetilde{H}_\varepsilon \xrightarrow{\text{опр}} H_\varepsilon / \langle\langle c^m \rangle\rangle = \begin{cases} (\langle d \rangle_\infty * \langle a \rangle_2) \times \langle \tilde{c} \rangle_m & \text{при } \varepsilon = -1 \\ F(d, a) \times \langle \tilde{c} \rangle_m & \text{при } \varepsilon = +1 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{где действия в полуправых произведениях} \\ \text{такие: } \tilde{c}^a = \tilde{c}, \tilde{c}^d = \tilde{c}^2 \end{array} \right).$$

- 1)  $|C : C \cap U| = |\varphi(C) : \varphi(C \cap U)|$ , а  $\varphi(C) = \langle \tilde{c} \rangle_m$  — подгруппа нечётного порядка  $m$ , поэтому индекс нечётный.
- 2) Нормальность подгруппы  $C \cap U$  вытекает из нормальности её образа  $\varphi(C \cap U)$ , которая очевидна, поскольку  $\varphi(C) = \langle \tilde{c} \rangle_m$  — нормальная циклическая подгруппа.
- 3) То, что  $C \cap U \supseteq X \xrightarrow{\text{опр}} \left\langle \left\{ u \in U \mid \exists k \in \mathbb{N} \exists u' \in U u^{u'} = u^{2^k} \right\} \right\rangle$ , очевидно ( $U \supseteq X$  по определению подгруппы  $X$ ; а включение  $C \supseteq X$  вытекает из того, что в  $H_\varepsilon/C$  нет неединичных элементов, сопряжённых своим чётным степеням, см. ниже). Для доказательства обратного включения заметим, что  $\ker \varphi = \langle\langle c^m \rangle\rangle$  содержится в  $C \cap U \cap X$  (действительно,  $\langle\langle c^m \rangle\rangle \subseteq X$ , поскольку выбрав  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  так, что  $d^q \in U$  мы получим  $(c^m)^{d^q} = (c^m)^{2^q}$ , так что  $c^m \in X$  по определению подгруппы  $X$ ; сопряжённые к  $c^m$  содержатся в  $X$  по аналогичным причинам). Поэтому достаточно показать, что  $\varphi(C \cap U) \subseteq \varphi(X)$ ; а это почти очевидно:  $\varphi(C) = \langle \tilde{c} \rangle$  и, если  $\varphi(C) \ni \tilde{c}^k \in \varphi(U)$ , то  $c^k \in U \cdot \ker \varphi = U$ , то есть  $c^k \in X$  и  $\tilde{c}^k \in \varphi(X)$ .

Продолжим доказательство леммы. Пусть  $U_{+1}$  и  $U_{-1}$  — изоморфные подгруппы конечного индекса  $i$  групп  $H_{+1}$  и  $H_{-1}$ . Тогда  $\widetilde{U}_\varepsilon \xrightarrow{\text{опр}} U_\varepsilon / (U_\varepsilon \cap C)$  окажутся изоморфными (в силу свойства 3)) подгруппами групп

$$H_\varepsilon / C = \begin{cases} \langle d \rangle_\infty * \langle a \rangle_2 & \text{при } \varepsilon = -1 \\ F(d, a) & \text{при } \varepsilon = +1 \end{cases}. \quad (*)$$

А индексы этих подгрупп (в  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$  и  $F_2$ ) будут  $i / |C : (U_\varepsilon \cap C)|$ . Действительно,

$$i = |H_\varepsilon : U_\varepsilon| = |H_\varepsilon : U_\varepsilon C| \cdot |U_\varepsilon C : U_\varepsilon| = |H_\varepsilon / C : \widetilde{U}_\varepsilon| \cdot |C : (U_\varepsilon \cap C)|.$$

Значит, частное  $|F_2 : \widetilde{U}_{+1}| / |\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 : \widetilde{U}_{-1}|$  этих индексов имеет нечётный числитель и знаменатель в силу свойства 1). Но это невозможно, поскольку подгруппа  $\widetilde{U}_{+1} \subseteq F_2$  свободна (по теореме Нильсена–Шрайера) и (по формуле Шрайера)  $\text{rk}(\widetilde{U}_{+1}) - 1 = |F_2 : \widetilde{U}_{+1}|$ , а, если  $\widetilde{U}_{-1}$  свободна, то  $\text{rk}(\widetilde{U}_{-1}) - 1 = \frac{1}{2}|\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 : \widetilde{U}_{-1}|$  в силу следующей леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $U$  — свободная подгруппа конечного индекса в группе  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ . Тогда (её индекс чётный и)  $\text{rk}(U) - 1 = \frac{1}{2}|\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 : U|$ .

**Доказательство.** Ядро  $F$  естественного отображения  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  имеет индекс два и ранг два (оно свободно порождается элементами  $x$  и  $x^y$ , где  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle x \rangle_\infty * \langle y \rangle_2$ ). Тогда

$$\begin{aligned} & |(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2) : U| \cdot \frac{\text{rk}(U \cap F) - 1}{\text{rk}(U) - 1} \stackrel{(III)}{=} \\ & \stackrel{(IV)}{=} |(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2) : U| \cdot |U : (U \cap F)| = |(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2) : (U \cap F)| = |(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2) : F| \cdot |F : (U \cap F)| = 2 \cdot |F : (U \cap F)| \stackrel{(V)}{=} \\ & \stackrel{(VI)}{=} 2 \cdot (\text{rk}(U \cap F) - 1) \quad (\text{где равенства } \stackrel{(IV)}{=} \text{ — это формула Шрайера}). \end{aligned}$$

Сокращая на  $\text{rk}(U \cap F) - 1$ , мы получаем то, что требуется. Это завершает доказательство леммы 1\*), леммы о слабой несоизмеримости (поскольку индексы  $|F_2 : \widetilde{U}_{+1}|$  и  $|(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2) : \widetilde{U}_{-1}|$  должны отличаться в нечётное число раз, как было замечено выше) и основной теоремы в следующей формулировке.

**Основная теорема.** Стандартные комплексы копредставлений

$$H_\varepsilon = \langle a, c, d, z, x, y \mid ac = z = ca^\varepsilon, d^{-1}c = x, xd = y = c^2 \rangle, \quad \text{где } \varepsilon \in \{\pm 1\},$$

содержащие по пять треугольных двумерных клеток (и по шесть рёбер, и по одной вершине) имеют общее накрытие, но не имеют общего конечного накрытия.

---

\*.) Лемма 1 — это, конечно, частный случай общего факта: для каждой свободной группы корректно определено рациональное число, называемое *виртуальным рангом* [KZ24]; причём эти виртуальные ранги подчиняются формуле Шрайера.

### 3. Доказательство утверждения 1

Минимальный подкомплекс двумерного комплекса  $K$ , содержащий все его двумерные клетки, мы называем *двумерной частью*  $K_2$  комплекса  $K$ . Тогда  $K = K_2 \cup K_1$ , где  $K_1$  (*одномерная часть*) — некоторый одномерный подкомплекс в  $K$  такой, что  $K_2 \cap K_1$  — нульмерный комплекс.

**Лемма о почти свободе.** *Если двумерный псевдосимплициальный комплекс  $P$  содержит не более двух двумерных клеток, то либо его фундаментальная группа  $\pi_1(P)$  почти свободна, либо его двумерная часть  $P_2$  содержит единственную вершину и гомеоморфна тору или бутылке Клейна.*

**Доказательство.** Поскольку стягивание ребра, соединяющего две разные вершины, не меняет фундаментальную группу, мы получаем, что фундаментальная группа нашего комплекса задаётся копредставлением с не более, чем двумя соотношениями, длины которых не превосходят трёх. Далее простой перебор.

- Если есть буква, входящая один раз в одно из этих соотношений и не входящая в другое, то применяя очевидное преобразование Тице, мы убеждаемся, что группа задаётся копредставлением с одним соотношением длины, не превосходящей трёх. Такая группа, очевидно, почти свободна (раскладываются в свободное произведение свободной группы и конечной группы порядка, не превосходящего трёх).
- Если есть буква  $a$ , входящая несколько раз (два или три) в одно из этих соотношений и не входящая в другое, то либо мы имеем дело со случаем, рассмотренным выше, либо копредставление имеет вид  $G = \langle a, b, c, \dots \mid a^{\pm 2}b^{\pm 1} = 1, b^{\pm 1}c^{\pm 2} = 1 \rangle = \text{BS}(1, -1) * F(d, e, \dots)$  или  $G = \langle a, b, c, \dots \mid a^\alpha = 1, b^\beta = 1 \rangle$ , где  $\alpha, \beta \in \{\pm 2, \pm 3\}$ . Все эти группы почти свободны.
- Значит, осталось рассмотреть случай, когда каждая буква входит в оба соотношения (или не входит ни в одно). Это следующие копредставления (с точностью до очевидных замен):  $\langle a, b, c, \dots \mid a^\alpha = 1, a^{\alpha'} = 1 \rangle$ ,  $\langle a, b, c, \dots \mid a^{\alpha}b^{\beta} = 1, a^{\alpha'}b^{\beta'} = 1 \rangle$  (где  $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \{\pm 1, \pm 2\}$ ) и  $\langle a, b, c, \dots \mid a^{\pm 1}b^{\pm 1}c^{\pm 1} = 1, a^{\pm 1}b^{\pm 1}c^{\pm 1} = 1 \rangle$ . Все эти группы почти свободны, кроме последнего случая, где опять возникают свободные произведения свободных групп и  $\text{BS}(1, \pm 1)$ .

Это завершает доказательство леммы.

**Теорема Брайдсона–Шеперда** (сравните с [BrS22], следствие 3.6). *Если два конечных симплициальных комплекса имеют общее накрытие, и фундаментальная группа одного из них почти свободна, то эти два комплекса имеют общее конечное накрытие.*

В оригинале требуется, чтобы фундаментальные группы обоих комплексов (а не одного из них) были свободны (а не почти свободны). Но разницы никакой нет:

- если у двух комплексов есть общее накрытие, то их универсальные накрытия изоморфны и, стало быть, можно заменить исходные комплексы на их конечные накрытия, и условия теоремы останутся выполненными; а комплекс с почти свободной фундаментальной группой, имеет, разумеется, конечное накрытие со свободной фундаментальной группой;
- если фундаментальная группа одного из комплексов (почти) свободна, то общее универсальное накрытие этих комплексов является квазидеревом; стало быть, фундаментальная группа второго комплекса действует свободно на этом квазидереве, а значит, эта группа является почти свободной в силу следующего факта:

конечно порождённая группа, действующая свободно на локально конечном  
графе, являющимся квазидеревом, почти свободна ([Bu21], следствие 5.8).

**Лемма о склейке.** Пусть  $K'$  и  $K''$  — подкомpleксы конечного комплекса  $K = K' \cup K''$ , а  $L'$  и  $L''$  — подкомpleксы конечного комплекса  $L = L' \cup L''$ , причём

- 1)  $K' \cap K''$  — это одна вершина  $v$ , а  $L' \cap L''$  — это конечное число вершин  $w_1, \dots, w_q$ ;
- 2) комплексы  $K'$  и  $L'$  имеют общее конечное накрытие  $K' \xleftarrow{\varkappa'} M' \xrightarrow{\lambda'} L'$ , согласованное на пересечении:  $(\varkappa')^{-1}(K' \cap K'') = (\lambda')^{-1}(L' \cap L'')$ ;
- 3) комплексы  $K''$  и  $L''$  имеют общее конечное накрытие  $K'' \xleftarrow{\varkappa''} M'' \xrightarrow{\lambda''} L''$ , согласованное на пересечении:  $(\varkappa'')^{-1}(K'' \cap K') = (\lambda'')^{-1}(L'' \cap L')$ .

Тогда комплексы  $K$  и  $L$  имеют общее конечное накрытие.

**Доказательство.** Пусть накрытия  $\varkappa'$  имеет степень  $k'$  а накрытие  $\varkappa''$  имеет степень  $k''$ . Тогда степени накрытий  $\lambda'$  и  $\lambda''$  равны  $k'/q$  и  $k''/q$ , соответственно, из-за согласованности.

Возьмём несвязное объединение  $M'_1 \sqcup \dots \sqcup M'_{k'} \sqcup M''_1 \sqcup \dots \sqcup M''_{k''}$  (где  $M'_i$  и  $M''_j$  — копии комплексов  $M'$  и  $M''$ ) и для каждого  $j \in \{1, \dots, q\}$  отождествим в них  $k'k''/q$  прообразов вершины  $w_j$ , лежащих в  $M'_i$ , с  $k'k''/q$  прообразами вершины  $w_j$ , лежащими в  $M''_i$ . Возьмём связную компоненту  $X$  получившегося конечного комплекса и очевидные накрытия  $K \leftarrow X \rightarrow L$ . Это завершает доказательство леммы.

**Цветная теорема Лейтона** [Neu10] (частный случай\*). Если два конечных графа  $A$  и  $B$ , вершины которых раскрашены в некоторые цвета, имеют общее накрытие  $C$ , причём отображения  $A \leftarrow C \rightarrow B$  сохраняют цвета, то  $A$  и  $B$  имеют общее конечное накрытие, причём соответствующие отображения тоже сохраняют цвета.

Приступим теперь к собственно доказательству утверждения 1. Пусть конечные псевдосимплексиальные двумерные комплексы  $K$  и  $L$  имеют общее накрытие, причём  $K$  имеет не более двух двумерных клеток. Мы хотим найти конечное общее накрытие.

Теорема Брайдсона–Шеперда и лемма о почти свободе сводят ситуацию к случаю, когда двумерная часть  $K_2$  комплекса  $K$  гомеоморфна тору или бутылке Клейна и содержит только одну вершину  $v$ .

Общее накрытие  $K \leftarrow M \rightarrow L$  комплексов  $K$  и  $L$  даёт общее накрытие  $K_2 \leftarrow M_2 \rightarrow L_2$  комплексов  $K_2$  и  $L_2$ , а также общее накрытие  $K_1 \leftarrow M_1 \rightarrow L_1$  комплексов  $K_1$  и  $L_1$ . Это означает, что

- 2) у комплексов  $K_2$  и  $L_2$  есть общее конечное накрытие  $K_2 \leftarrow P \rightarrow L_2$ , причём  $L_2$  тоже гомеоморфен тору или бутылке Клейна (и содержит вершины  $w_1, \dots, w_q$ );
- 1) у комплексов  $K_1$  и  $L_1$  есть общее конечное накрытие  $K_1 \leftarrow R \rightarrow L_1$ , причём полный прообраз вершины  $v$  совпадает с полным прообразом множества  $\{w_1, \dots, w_q\}$ .

Действительно,

- 2) универсальное накрытие тора или бутылки Клейна (то есть плоскость) обязано накрывать  $L_2$ , то есть  $L_2$  тоже обязан быть гомеоморфен поверхности, причём эта поверхность может быть только тором или бутылкой Клейна (поскольку фундаментальные группы других поверхностей несоизмеримы с  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ );
- 1) прообразы вершин  $v$  и  $w_i$  в  $M$  (и в  $M_1$ ) обязаны, очевидно, совпадать (так как это в точности  $M_2 \cap M_1$ ); поэтому достаточно покрасить вершины  $v, w_i$  и все их прообразы в  $M_1$  в красный цвет, а все остальные вершины графов  $K_1, L_1$  и  $M_1$  — в чёрный цвет, и воспользоваться цветной теоремой Лейтона.

Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой о склейке (положив  $K' = K_1, L' = L_1, K'' = K_2$  и  $L'' = L_2$ ).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [БП04] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Комбинаторика симплексиально клеточных комплексов и торические действия, Труды МИАН, 247 (2004), 41-58.
- [BaK90] H. Bass, R. Kulkarni, Uniform tree lattices, J. Amer. Math. Soc., 3:4 (1990), 843-902.
- [BrS22] M. Bridson, S. Shepherd, Leighton's theorem: extensions, limitations, and quasitrees, Algebraic and Geometric Topology, 22:2 (2022), 881-917. См. также arXiv:2009.04305..
- [Bu21] J. O. Button, Groups acting on hyperbolic spaces with a locally finite orbit. arXiv: 2111.13427 (2021).
- [DK23] N. S. Dergacheva, A. A. Klyachko, Small non-Leighton two-complexes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 174:2 (2023), 385-391. См. также arXiv:2108.01398.
- [KZ24] A. A. Klyachko, A. O. Zakharov, An analogue of the strengthened Hanna Neumann conjecture for virtually free groups and virtually free products, Michigan Mathematical Journal (в печати). См. также arXiv:2106.05821.
- [JaW09] D. Janzen, D. T. Wise, A smallest irreducible lattice in the product of trees, Algebraic and Geometric Topology, 9:4 (2009), 2191-2201.
- [Lei82] F. T. Leighton, Finite common coverings of graphs, J. Combin. Theory, Series B, 33:3 (1982), 231-238.
- [Neu10] W. D. Neumann, On Leighton's graph covering theorem, Groups, Geometry, and Dynamics, 4:4 (2010), 863-872. См. также arXiv:0906.2496.
- [SGW19] S. Shepherd, G. Gardam, D. J. Woodhouse, Two generalisations of Leighton's Theorem, arXiv:1908.00830.
- [Wis96] D. T. Wise, Non-positively curved squared complexes: Aperiodic tilings and non-residually finite groups. PhD Thesis, Princeton University, 1996.
- [Wis07] D. T. Wise, Complete square complexes, Commentarii Mathematici Helvetici, 82:4 (2007), 683-724.
- [Woo21] D. Woodhouse, Revisiting Leighton's theorem with the Haar measure, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 170:3 (2021), 615-623. См. также arXiv:1806.08196.

---

\*) Общий случай состоит в том, что можно раскрашивать не только вершины, но и рёбра. В [Neu10] содержится доказательство этой теоремы, в также отмечено, что, во-первых, эта цветная теорема легко формально выводится из классической теоремы Лейтона, а во-вторых, рассуждения самого Лейтона [Lei82] фактически доказывают именно цветную теорему.