УДК 515.142.331+515.142.321+512.543.16 MSC: 57K20, 55U10, 05E45, 20F05

РЕШЁТКИ ФОРЕСТЕРА И МАЛЕНЬКИЕ НЕЛЕЙТОНОВЫ КОМПЛЕКСЫ

Наталия С. Дергачёва Антон А. Клячко
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
nataliya.dergacheva@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su

Мы строим два конечных CW-комплекса, один из которых гомеоморфен комплексу с одной двумерной клеткой, так, что эти комплексы имеют общее накрытие, но не имеют общего конечного накрытия.

1. Введение

Теорема Лейтона [Lei82]**.** *Если два конечных графа имеют общее накрытие, то они имеют общее конечное накрытие.*

Альтернативные доказательства и различные обобщения этого результата можно найти, например, в [Neu10], [BaK90], [SGW19], [Woo21], [BrS21] и литературе там цитируемой.
Для двумерных CW-комплексов (и клеточных накрытий) аналогичное утверждение неверно:
- первый пример такой *нелейтоновой пары* комплексов (то есть пары конечных CW-комплексов, имеющих общее накрытие, но не имеющих общего конечного накрытия) содержал по шесть двумерных клеток в каждом комплексе ([Wis96] и [Wis07]);
- потом это число было понижено до четырёх [JaW09];
- потом — до двух [DK23].

Существует ли нелейтонова пара комплексов с одной двумерной клеткой (в каждом из двух комплексов, или хотя бы в одном) — неизвестно. Мы «почти отвечаем» на этот открытый вопрос из [DK23]:

существует нелейтонова пара комплексов (K, L), в которой комплекс K гомеоморфен комплексу с одной двумерной клеткой.

Кроме этого, наш пример обладает ещё следующими экстремальными свойствами:
- комплекс $\overline{K}$ с одной двумерной клеткой, гомеоморфный комплексу K, является стандартным комплексом копредставления $\mathrm{BS}(2,4) \overset{\text{опр}}{=} \langle c, d \mid c^{2d} = c^4 \rangle$, и он (как нетрудно заметить) *лейтонов*, то есть не может входить ни в какую нелейтонову пару; а нелейтонов комплекс K получается из $\overline{K}$ добавлением ребра, разделяющего двумерную клетку на две части; это первый (и неожиданный) пример ситуации, когда подразбиение клетки приводит к таким последствиям;
- комплекс K содержит две двумерные клетки (это минимум из известных примеров, смотрите выше; правда комплекс L в данном случае довольно большой, а в [DK23] (и в [DK24]) была построена нелейтонова пара, в которой оба комплекса содержали по две двумерные клетки);
- триангуляция даёт нелейтонову пару псевдосимплициальных комплексов $(\widehat{K}, \widehat{L})$, в которой комплекс $\widehat{K}$ содержит пять двумерных клеток (треугольников); это опять минимум из известных примеров (но опять комплекс $\widehat{L}$ в данном случае получается немаленьким, а в [DK24] была построена нелейтонова пара псевдосимлициальных комплексов, в которой оба комплекса содержали по пять двумерных клеток);
- наконец, фундаментальная группа комплекса K является группой с одним соотношением, а фундаментальная группа комплекса L соизмерима с группой с одним соотношением, то есть переходя к подходящему конечному накрытию комплекса L мы получаем следующий нетривиальный факт:

существует нелейтонова пара комплексов $(K, \widetilde{L})$, в которой $\pi_1(K)$ есть группа с одним соотношением, а $\pi_1(\widetilde{L})$ — подгруппа конечного индекса в группе с одним соотношением. (1)

Напомним, что по теореме Брайдсона–Шеперда [BrS22] (в формулировке из [DK24])

в нелейтоновой паре фундаментальная группа ни одного из комплексов не может быть свободной (и даже почти свободной).

Следующий естественный вопрос остаётся открытым.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Вопрос. *Существует ли нелейтонова пара, в которой фундаментальные группы обоих комплексов являются группами с одним соотношением?*

Факт (1) сам по себе не отвечает на этот вопрос: например, свободные произведения $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ и $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ не могут быть реализованы, как фундаментальные группы конечных комплексов, имеющих общее накрытие [MSW03], хотя их подгруппы конечного индекса могут — эти группы вообще соизмеримы.

По сути наш пример нелейтоновой пары (K, L) легко вытекает из рассуждений работы Форестера [Fo24]. Наш скромный вклад состоит лишь в том, что мы

- это заметили (Макс Форестер в [Fo24] вообще не интересовался минимальными нелейтоновыми парами)
- и написали явное, короткое и почти самодостаточное доказательство. «Почти самодостаточность» здесь означает, что мы используем, кроме стандартных фактов, лишь следующий частный случай классификации групп Баумслага–Солитэра с точностью до соизмеримости [CKZ21] (смотрите также [Fo24]):

> *группы Баумслага–Солитэра* $\mathrm{BS}(2,4)$ *и* $\mathrm{BS}(4,16)$ ***несоизмеримы*** *(то есть никакая подгруппа конечного индекса в первой группы не изоморфна никакой подгруппе конечного индекса во второй группе).*

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. *Группы Баумслага–Солитэра* — это $\mathrm{BS}(n,m) \overset{\text{опр}}{=} \langle c, d \mid c^{nd} = c^m \rangle$.

Авторы благодарят Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Основная теорема

Рассмотрим следующие комплексы K и L.

Комплекс K — это стандартный (одновершинный) комплекс копредставления $\langle c, d, z \mid c^{-1}dc^2 = z = cdc^{-2} \rangle$ (в [Fo24] этот комплекс K обозначается $Z_{2,4}$). Понятно, что этот двуклеточный комплекс гомеоморфен одноклеточному: стандартному комплексу стандартного копредставления группы $\mathrm{BS}(2,4) \overset{\text{опр}}{=} \langle c, d \mid c^{2d} = c^4 \rangle$.

Комплекс L устроен так:

- две вершины: *чёрная* и *белая*;
- шесть рёбер:
  - рёбра $c_\bullet$ и $c_\circ$ суть петли при вершинах чёрной и белой вершинах, соответственно;
  - рёбра y и z ведут из чёрной вершины в белую
  - рёбра t и t_1 ведут из белой вершины в чёрную;
- четыре двумерные клетки A, B, C, D с границами $y^{-1}c_\bullet yc_\circ^{-2}$, $z^{-1}c_\bullet zc_\circ^{-2}$, $t_1^{-1}c_\circ tc_\bullet^{-2}$, $t^{-1}c_\circ t_1c_\bullet^{-2}$ (рис. 1).

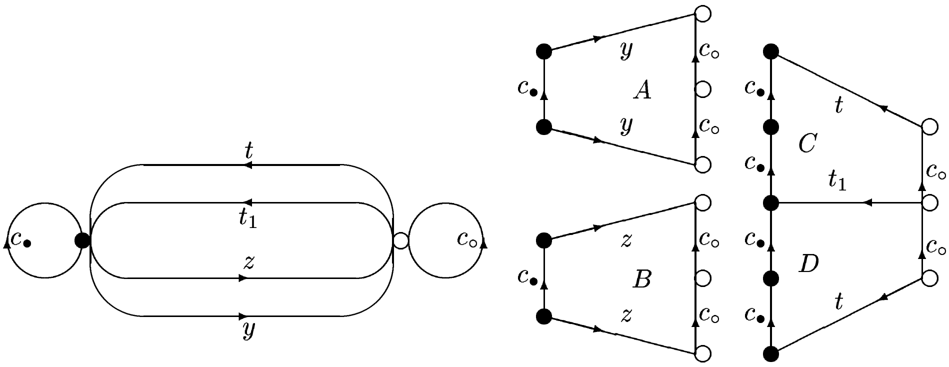

Рис. 1

(У Форестера [Fo24] этот комплекс никак не обозначается — в его обозначениях это факторкомплекс комплекса $X_{2,4}$ по действию группы G_2.)

Теорема. *Комплексы K и L образуют* ***нелейтонову пару:***

- *их универсальные накрытия изоморфны*
- *а общего конечного накрытия нет.*

При этом комплекс K, содержащий две двумерные клетки, гомеоморфен комплексу с одной двумерной клеткой (а комплекс L, содержащий четыре двумерные клетки, гомеоморфен комплексу с тремя двумерными клетками).

Следующие два параграфа составляют доказательство этой теоремы.

3. Почему у комплексов K и L нет общего конечного накрытия?

Потому что фундаментальные группы несоизмеримы. Фундаментальная группа комплекса K — это, конечно же, $\mathrm{BS}(2,4)$. А фундаментальная группа комплекса L устроена так:

$$\pi_1(L) = \langle c_\bullet, c_\circ, y, z, t, t_1 \,|\, y^{-1}c_\bullet y c_\circ^{-2} = 1,\ z^{-1}c_\bullet z c_\circ^{-2} = 1,\ t^{-1}c_\circ t_1 c_\bullet^{-2} = 1,\ t_1^{-1}c_\circ t c_\bullet^{-2} = 1,\ z = 1\rangle.$$

Очевидные упрощения (преобразования Тице) дают следующее копредставление:

$$\pi_1(L) = \langle c_\circ, y, t \,|\, [y, c_\circ^2] = 1,\ c_\circ^{2t} = c_\circ^8\rangle.$$

Ядро H гомоморфизма из $\pi_1(L)$ в $\mathbb{Z}_2 \overset{\text{опр}}{=} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, переводящего $c_\circ$ в единицу, а y и t в ноль, имеет индекс два в $\pi_1(L)$ и задаётся копредставлением

$$H = \left\langle q, y, t, \widehat{y}, \widehat{t} \,\middle|\, q^y = q^t = q^{\widehat{y}} = q^{\widehat{t}} = q^4 \right\rangle \quad (\text{где } q = c_\circ^2,\ \widehat{y} = y^{c_\circ} \text{ и } \widehat{t} = t^{c_\circ}),$$

из которого очевидными преобразованиями Тице получаем

$$H = \langle q, y, x_1, x_2, x_3 \,|\, q^y = q^4,\ [q, x_1] = [q, x_2] = [q, x_3] = 1\rangle \quad (\text{где } x_1 = yt^{-1},\ x_2 = y\widehat{y}^{-1} \text{ и } x_3 = y\widehat{t}^{-1}). \qquad (*)$$

А ядро $\widetilde{H}$ гомоморфизма из $\mathrm{BS}(4,16) = \langle a, b \,|\, a^{4b} = a^{16}\rangle$ в $\mathbb{Z}_4$, переводящего a в один, а b в ноль, имеет индекс четыре в $\mathrm{BS}(4,16)$ и задаётся копредставлением

$$\widetilde{H} = \left\langle q, b, b', b'', b''' \,\middle|\, q^b = q^{b'} = q^{b''} = q^{b'''} = q^4 \right\rangle \quad (\text{где } q = a^4,\ b' = b^a,\ b'' = b^{a^2} \text{ и } b''' = b^{a^3}),$$

из которого очевидными преобразованиями Тице получаем

$$\widetilde{H} = \langle q, b, x_1, x_2, x_3 \,|\, q^b = q^4,\ [q, x_1] = [q, x_2] = [q, x_3] = 1\rangle \quad (\text{где } x_1 = b(b')^{-1},\ x_2 = b(b'')^{-1} \text{ и } x_3 = b(b''')^{-1}). \quad (**)$$

Сравнивая $(*)$ и $(**)$, мы убеждаемся, что $H \simeq \widetilde{H}$, то есть $\pi_1(L)$ соизмерима с группой $\mathrm{BS}(4,16)$, которая не соизмерима с $\mathrm{BS}(2,4) = \pi_1(K)$ [CKZ21] (смотрите также [Fo24]). Так что, общего конечного накрытия у комплексов K и L быть не может (поскольку, как известно, фундаментальная группа конечного накрытия комплекса изоморфна подгруппе конечного индекса фундаментальной группы этого комплекса).

4. Почему универсальные накрытия комплексов K и L изоморфны?

Для обоих комплексов универсальным накрытием служит *комплекс Баумслага–Солитэра* $X_{2,4}$ из [Fo24], который устроен следующим образом.

Рассмотрим регулярное ориентированное дерево T, в котором из каждой вершины выходят два ребра, а входят четыре ребра в каждую вершину. Припишем каждому ребру e числа $\gamma(e), \delta(e) \in \{0,1\}$ так, чтобы

- в каждую вершину входили рёбра со всеми четырьмя значениями пары $\big(\gamma(e), \delta(e)\big)$
- и из каждой вершины выходили рёбра с обоими значениями $\gamma(e)$ и с обоими значениями $\delta(e)$.

Комплекс Баумслага–Солитэра $X_{2,4}$ гомеоморфен декартовому произведению $T \times \mathbb{R}$, а разбиение на клетки устроено так:

- множество вершин такое: $V(X_{2,4}) = \{v_i \mid v \in V(T),\ i \in \mathbb{Z}\}$;
- множество (ориентированных) рёбер такое:
  - есть рёбра $\varepsilon_{v,i}$ (где $v \in V(T)$ и $i \in \mathbb{Z}$), ведущие из вершины v_i в вершину v_{i+1};
  - и есть ещё рёбра e_i (где $e \in E(T)$ и $i \in \mathbb{Z}$), ведущие из вершины v_i в вершину $w_{2i+\gamma(e)}$, где v и w — это начало и конец ребра e, соответственно;
- двумерные клетки $D_{e,i}$ приклеены по циклам вида $e_i^{-1}\varepsilon_{v,i}e_{i+1}\varepsilon^{-1}_{w,2i+1+\gamma(e)}\varepsilon^{-1}_{w,2i+\gamma(e)}$, где $e \in E(T)$, $i \in \mathbb{Z}$, а v и w — это начало и конец ребра e, соответственно (рисунок 2).

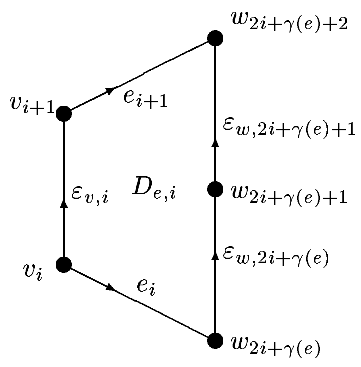

Рис. 2

Накрытие $X_{2,4} \to K$ выглядит естественным образом:
– все вершины переходят в единственную вершину комплекса K;
– а на рёбрах отображение действует так: $\varepsilon_{v,i} \mapsto c$; $e_i \mapsto \begin{cases} d, & \text{если } i \text{ чётно,} \\ z, & \text{если } i \text{ нечётно;} \end{cases}$
– при этом двумерная клетка $D_{e,i}$ переходят в одну из двух двумерных клеток комплекса K в зависимости от чётности числа i.

А накрытие $X_{2,4} \to L$ устроено так:
– все вершины дерева T покрасим в чёрный и белый цвет так, чтобы рёбра соединяли вершины разных цветов; и скажем, что накрытие переводит вершину v_i в соответствии с цветом вершины v;
– а на рёбрах накрытие действует так:

$$\varepsilon_{u,i} \mapsto \begin{cases} c_\bullet, & \text{если вершина } u \text{ чёрная,} \\ c_\circ, & \text{если вершина } u \text{ белая,} \end{cases} \quad \text{и } e_i \mapsto \begin{cases} y, & \text{если начало ребра } e \text{ чёрное и } \delta(e)=0, \\ z, & \text{если начало ребра } e \text{ чёрное и } \delta(e)=1, \\ t, & \text{если начало ребра } e \text{ белое и } i+\delta(e) \text{ чётно,} \\ t_1, & \text{если начало ребра } e \text{ белое и } i+\delta(e) \text{ нечётно,} \end{cases}$$

(на рисунке 3 $p, p', v, v', w, w', u, u'$ — вершины дерева T, а пары чисел обозначают $\big(\gamma(e), \delta(e)\big)$ для соответствующего ребра дерева T);

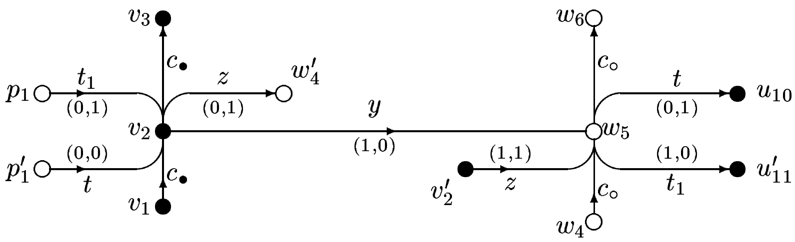

Рис. 3

– при этом двумерная клетка $D_{e,i}$ отображается в $\begin{cases} A, & \text{если начало ребра } e \text{ чёрное и } \delta(e)=0, \\ B, & \text{если начало ребра } e \text{ чёрное и } \delta(e)=1, \\ C, & \text{если начало ребра } e \text{ белое и } i \text{ чётно,} \\ D, & \text{если начало ребра } e \text{ белое и } i \text{ нечётно.} \end{cases}$

Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[BaK90] H. Bass, R. Kulkarni, Uniform tree lattices, J. Amer. Math. Soc., 3:4 (1990), 843-902.
[BrS22] M. Bridson, S. Shepherd, Leighton's theorem: extensions, limitations, and quasitrees, Algebraic and Geometric Topology, 22:2 (2022), 881-917. См. также arXiv:2009.04305..
[CKZ21] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, A. Zakharov, Commensurability of Baumslag–Solitar groups, Indiana Univ. Math. J., 70:6 (2021), 2527-2555. См. также arXiv:1910.02117.
[DK23] N. S. Dergacheva, A. A. Klyachko, Small non-Leighton two-complexes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 174:2 (2023), 385-391. См. также arXiv:2108.01398.
[DK24] N. S. Dergacheva, A. A. Klyachko, Tiny non-Leighton complexes, arXiv:2403.09803.
[Fo24] M. Forester, Incommensurable lattices in Baumslag-Solitar complexes, J. London Math. Soc., 109:3 (2024), e12879. См. также arXiv:2207.14703.
[JaW09] D. Janzen, D. T. Wise, A smallest irreducible lattice in the product of trees, Algebraic and Geometric Topology, 9:4 (2009), 2191-2201.
[Lei82] F. T. Leighton, Finite common coverings of graphs, J. Combin. Theory, Series B, 33:3 (1982), 231-238.
[MSW03] L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte, Quasi-actions on trees I. Bounded valence, Annals of Mathematics 158:1 (2003), 115-164. См. также arXiv:math/0010136.
[Neu10] W. D. Neumann, On Leighton's graph covering theorem, Groups, Geometry, and Dynamics, 4:4 (2010), 863-872. См. также arXiv:0906.2496.
[SGW19] S. Shepherd, G. Gardam, D. J. Woodhouse, Two generalisations of Leighton's Theorem, arXiv:1908.00830.
[Wis96] D. T. Wise, Non-positively curved squared complexes: Aperiodic tilings and non-residually finite groups. PhD Thesis, Princeton University, 1996.
[Wis07] D. T. Wise, Complete square complexes, Commentarii Mathematici Helvetici, 82:4 (2007), 683-724.
[Woo21] D. Woodhouse, Revisiting Leighton's theorem with the Haar measure, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 170:3 (2021), 615-623. См. также arXiv:1806.08196.