УДК 515.142.321+512.543.16+519.179.1 MSC: 57K20, 20F05, 05C65, 05C25

МАЛЕНЬКИЕ НЕЛЕЙТОНОВЫ ДВУМЕРНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Наталия С. Дергачёва Антон А. Клячко
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
nataliya.dergacheva@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su

Сколько двумерных клеток должны содержать два конечных CW-комплекса, имеющих общее накрытие, но не имеющих общего конечного накрытия? Теорема Лейтона говорит, что двумерные клетки в обоих комплексах должны быть. Мы строим почти (?) минимальный пример с двумя двумерными клетками в каждом комплексе.

0. Введение

Теорема Лейтона [Lei82]. *Если два конечных графа имеют общее накрытие, то они имеют общее конечное накрытие.*

Альтернативные доказательства и различные обобщения этого результата можно найти, например, в [Neu10], [BaK90], [SGW19], [Woo21], [BrS21] и литературе там цитируемой.

Верно ли аналогичное утверждение для произвольных CW-комплексов, то есть

> *верно ли, что, если для конечных CW-комплексов K_1 и K_2 существуют CW-комплекс K и клеточные накрытия $K_1 \leftarrow K \to K_2$, то найдётся и конечный CW-комплекс K с этим свойством?*

Этот естественный вопрос был поставлен (немного на другом языке) в [Tuc90] и [AFS91]. Обращаем внимание на требование клеточности отображений. Разумеется, его можно заменить на формально более сильное требование *комбинаторности*, то есть потребовать, чтобы образ каждой клетки был клеткой; вопрос при этом останется эквивалентным исходному. Если же это требование убрать, то ответ станет очевидно отрицательным: действительно, тор и крендель (сфера с двумя ручками) общего конечного накрытия не имеют (поскольку фундаментальная группа кренделя $\langle x, y, z, t \mid [x, y][z, t] = 1\rangle$ не содержит абелевых подгрупп конечного индекса), а универсальные накрытия этих поверхностей, разумеется, гомеоморфны, поскольку представляют собой плоскость. Требование клеточности разрушает этот пример: если мы возьмём, например, стандартные клеточные структуры на торе и кренделе (с одной вершиной), то на накрывающей плоскости получим

- в случае тора обычную квадратную решётку на (евклидовой) плоскости,
- а в случае кренделя — решётку из восьмиугольников на плоскости (Лобачевского);

(то есть универсальные накрытия хоть и гомеоморфны, но клеточные структуры на них принципиально разные). Исправить этот пример за счёт усложнения клеточной структуры на торе и кренделе невозможно (как замечено в [Tuc90] и в [AFS91]; в [AFS91] даже высказана гипотеза, что ответ на клеточный вариант вопроса положительный).

Тем не менее, ответ оказался отрицательным, как показано в [Wis07] (а на самом деле гораздо раньше [Wis96]), причём оба комплекса K_1, K_2 из [Wis07], образующих такую *нелейтонову* пару, содержат всего по шесть двумерных клеток каждый. В работе [JaW09] это число было понижено до четырёх:*)

> *существуют два двумерных комплекса, содержащие по четыре двумерные клетки каждый, имеющие общее накрытие, но не имеющие общего конечного накрытия.*

(Здесь и далее мы опускаем приставку «CW-» и слово «клеточное»: *комплекс* всегда понимается, как CW-комплекс, и все отображения комплексов считаются клеточными в этой работе.) В явном виде комплексы K_1 и K_2 из [JaW09] представляют собой *стандартные комплексы* следующих копредставлений групп Γ_i, то есть одновершинные комплексы, в которых рёбра соответствуют образующим, а двумерные клетки — определяющим соотношениям:

$$\Gamma_1 = F_2 \times F_2 = \langle a, b, x, y \mid [a, x],\ [a, y],\ [b, x],\ [b, y]\rangle \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \left\langle a, b, x, y \;\middle|\; axay,\ ax^{-1}by^{-1},\ ay^{-1}b^{-1}x^{-1},\ bxb^{-1}y^{-1} \right\rangle.$$

Оба этих комплекса накрываются декартовым произведением двух деревьев (графов Кэли свободной группы F_2); а общего конечного накрытия не может быть, поскольку если бы оно было, то фундаментальная группа

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00591, а также минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

*) хотя авторы [JaW09] не преследовали такой цели; это скорее побочный продукт их результатов.

накрывающего комплекса вкладывалась бы в обе группы Γ_i в качестве подгруппы конечного индекса, но в группе Γ_1 всякая подгруппа конечного индекса содержит в качестве подгруппы конечного индекса прямое произведение свободных групп, а в группе Γ_2 таких подгрупп конечного индекса нет [JaW09] (эта группа даже не финитно аппроксимируема [CaW18], [BoK21]). Из результатов работы [JaW09] также вытекает минимальность построенного там примера в том смысле, что

если ограничиться комплексами K_i, которые накрываются произведением двух деревьев, то уменьшить далее число двумерных клеток невозможно.

Если же ничем себя не ограничивать, то, как выяснилось, существуют и меньшие примеры.

Основная теорема (упрощённая формулировка). *Существуют два конечных двумерных комплекса, имеющих по две двумерные клетки каждый, такие, что у этих комплексов есть общее накрытие, но нет общего конечного накрытия.*

(Полную формулировку читатели могут найти в самом конце этой заметки.) Таким образом, открытым остаётся только вопрос о комплексах, содержащих одну двумерную клетку. Этот вопрос представляется нам трудным (хотя он тесно связан с хорошо разработанной теорией групп с одним соотношением). Дело в том, что классификация групп с одним соотношением с точностью до соизмеримости является непростой задачей даже для *групп Баумслага–Солитэра* $\mathrm{BS}(n,m) \overset{\text{опр}}{=} \langle c,d \mid c^{nd}=c^m \rangle$ (хотя в этом частном случае она недавно была решена [CKZ19]). Здесь и далее $x^{ky} \overset{\text{опр}}{=} y^{-1}x^k y$, где x и y — элементы некоторой группы, а $k \in \mathbb{Z}$.

В заключении отметим, что из результатов о накрытиях двумерных комплексов можно извлечь и нетривиальные факты о графах путём «моделирования» в графах двумерных клеток с помощью дополнительных вершин и рёбер, смотрите [BrS21]. Рассматривать же комплексы высших размерностей смысла нет: если комплексы K_1 и K_2 образуют нелейтонову пару, то их двумерные остовы тоже образуют такую пару, как нетрудно заметить. Подробное изложение общей теории накрытий CW-комплексов можно найти, например, в [ФоФ89].

1. Алгебраические леммы

Следующий факт хорошо и давно известен [Mes72], но мы приводим короткое доказательство для удобства читателей.

Лемма о коммутаторе. *В группе $H = \mathrm{BS}(3,5) = \langle c,d \mid c^{3d}=c^5 \rangle$ коммутатор $h=[c^d,c]$ содержится в любой подгруппе конечного индекса.*

Доказательство. Каждая подгруппа конечного индекса содержит, как известно, нормальную подгруппу конечного индекса (смотрите [KaM82], например). Поэтому достаточно показать, что h содержится в ядре любого гомоморфизма $\varphi\colon H \to K$ в любую конечную группу K.

Элементы $\varphi(c^3)$ и $\varphi(c^5)$ имеют одинаковый порядок (поскольку они сопряжены), а значит, порядок элемента $\varphi(c)$ не может делиться на три. Следовательно, $\varphi(c) \in \langle \varphi(c^3) \rangle$. Значит, $\varphi(c)^{\varphi(d)} \in \langle \varphi(c) \rangle$ и $h=[c^d,c]$ принадлежит ядру гомоморфизма φ, что и завершает доказательство.

Лемма о бутылке. *Если в некоторой группе G есть подгруппа $\langle a,b \rangle = \langle a,b \mid a^b=a^{-1} \rangle \simeq \mathrm{BS}(1,-1)$ и элемент b лежит во всех подгруппах конечного индекса в G, то любая подгруппа конечного индекса в G содержит подгруппу, изоморфную фундаментальной группе бутылки Клейна* $\mathrm{BS}(1,-1)$.

Доказательство. Любая подгруппа конечного индекса содержит все элементы сопряжённые с элементом b, поскольку пересечение R всех подгрупп конечного индекса, очевидно, нормально. Стало быть, $a^2 = b^{-1}b^a \in R$ и $\langle a^2,b \rangle \subseteq R$ Осталось заметить, что $a^{2b}=a^{-2}$, а группы $\langle a^2 \rangle$ и $\langle b \rangle$ бесконечны; то есть подгруппа $\langle a^2,b \rangle$ изоморфна группе $\mathrm{BS}(1,-1)$, поскольку

в любой группе элементы x и y бесконечного порядка такие, что $x^y=x^{-1}$, порождают подгруппу изоморфную фундаментальной группе бутылки Клейна. (1)

Действительно, имеется очевидный эпиморфизм $\varphi\colon \mathrm{BS}(1,-1) = \langle a,b \rangle \to \langle x,y \rangle$. Любой элемент $g \in \mathrm{BS}(1,-1)$ записывается в виде $g=a^kb^l$. Если $g=a^kb^l \in \ker\varphi$, то $\ker\varphi \ni [b,g] = b^{-1}b^{-l}a^{-k}ba^kb^l = a^{\pm 2k}$. Значит, $k=0$ (так как $|\langle x \rangle| = \infty$). Но тогда и $l=0$, поскольку $1=\varphi(g)=\varphi(b^l)=y^l$, а $|\langle y \rangle| = \infty$. Таким образом, $\ker\varphi=\{1\}$ и φ — изоморфизм. Это завершает доказательство.

Лемма об отсутствии бутылки. *Свободное произведение с объединённой циклической подгруппой*

$$G = \langle a,c,d \mid [a,[c^d,c]]=1,\ c^{3d}=c^5 \rangle = \langle a,b \mid [a,b]=1 \rangle \underset{b=[c^d,c]}{*} \langle c,d \mid c^{3d}=c^5 \rangle$$

свободной абелевой группы и группы Баумслага–Солитэра BS(3, 5) *не содержит подгрупп, изоморфных фундаментальной группе бутылки Клейна* $K = \mathrm{BS}(1, -1)$.

Доказательство. Группа BS(3, 5) не содержит подгрупп, изоморфных K [Lev15], и, конечно же, не имеет кручения. Следовательно, воспользовавшись ещё раз фактом (1), мы получаем, что в факторгруппе

$$G/\langle\langle [a, G]\rangle\rangle = \langle a\rangle_\infty \times \mathrm{BS}(3, 5)$$

по нормальному замыканию $\langle\langle [a, G]\rangle\rangle$ множества $[a, G]$ коммутаторов элемента a и всевозможных элементов группы G нет неединичных элементов, сопряжённых своим обратным. Стало быть, всякий элемент группы G, сопряжённый своему обратному, содержится в $N = \langle\langle [a, G]\rangle\rangle$. Эта подгруппа тривиально пересекает свободные сомножители (и сопряжённые к ним подгруппы), то есть не содержит элементов длины один. Остаётся воспользоваться критерием сопряжённости в свободных произведениях с объединённой подгруппой (смотрите, например, [ЛШ80]):

> *Циклически приведённые слова длины $\geqslant 2$ в свободном произведении с объединёнными подгруппами $U \underset{W}{*} V$ сопряжены тогда и только тогда, когда одно из них может быть получено из другого циклической перестановкой и последующим сопряжением при помощи элемента из W.*

Из равенства в $U \underset{W}{*} V$ приведённых слов $u_1 v_1 \ldots = u_1' v_1' \ldots$ вытекают, разумеется, равенства двойных смежных классов $W u_1 W = W u_1' W$, $W v_1 W = W v_1' W$,... Поэтому, если циклически приведённое слово

$$x \in N \lhd \langle a, b \mid [a, b] = 1\rangle \underset{b=[c^d,c]}{*} \left\langle c, d \,\middle|\, c^{3d} = c^5 \right\rangle$$

сопряжено своему обратному, то для одной из букв x_1 слова x мы получаем равенство $x_1 = b^k x_1^{-1} b^l$. Подставив $x_1 = b^k \widehat{x}_1$, мы приходим к тому, что

- либо $\widehat{x}_1^2 \in \langle b\rangle$ для некоторого $\widehat{x}_1 \in (\langle a\rangle_\infty \times \langle b\rangle_\infty) \setminus \langle b\rangle$,
- либо $\widehat{x}_1^2 \in \left\langle [c^d, c]\right\rangle$ для некоторого $\widehat{x}_1 \in \left\langle c, d \,\middle|\, c^{3d} = c^5\right\rangle \setminus \left\langle [c^d, c]\right\rangle$.

Первое очевидно невозможно. А невозможность второго можно либо проверить непосредственно, либо рассуждать так:

- факторгруппа $Q = \left\langle c, d \,\middle|\, c^{3d} = c^5\right\rangle / \left\langle\left\langle [c^d, c]\right\rangle\right\rangle$ является группой без кручения;
  действительно, Q является HNN-расширением $Q = \left\langle c, e, d \,\middle|\, [e, c] = 1,\ e^3 = c^5,\ c^d = e\right\rangle$ абелевой группы $A = \left\langle c, e \,\middle|\, [e, c] = 1,\ e^3 = c^5\right\rangle$, которая не имеет кручения (и вообще, $A \simeq \mathbb{Z}$ и $Q \simeq \mathrm{BS}(3, 5)$; это мы оставляем читателям в качестве упражнения, поскольку пользоваться этим мы не будем);
- поэтому $\widehat{x}_1$ обязан содержаться в нормальном замыкании $F = \left\langle\left\langle [c^d, c]\right\rangle\right\rangle$, которое является свободной группой, поскольку по теореме Карраса–Солитэра (смотрите, например, [ЛШ80]) в HNN-расширении свободна всякая подгруппа, тривиально пересекающая подгруппы, сопряжённые с базой. Осталось показать, что элемент $[c^d, c]$ этой свободной группы не является квадратом; а это так, поскольку предположив противное и заметив, что автоморфные образы квадратов также квадраты, мы получили бы, что $F = \left\langle\left\langle [c^d, c]\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \widehat{x}^2\right\rangle\right\rangle \subseteq \left\langle \{f^2 \mid f \in F\}\right\rangle$, что, конечно же, не может выполняться ни для какой нетривиальной свободной группы F. Это завершает доказательство.

2. Доказательство основной теоремы

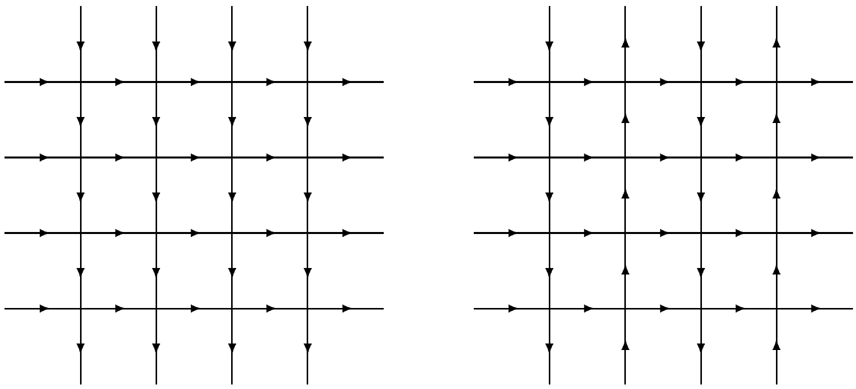
Возьмём фундаментальные группы тора и бутылки Клейна:

$$G_1 = \mathrm{BS}(1, 1) = \langle a, b \mid [a, b] = 1\rangle \quad \text{и} \quad G_{-1} = \mathrm{BS}(1 - 1) = \left\langle a, b \,\middle|\, a^b = a^{-1}\right\rangle$$

и рассмотрим свободные произведения $H_\varepsilon = G_\varepsilon \underset{b=h}{*} H$ с объединённой циклической подгруппой групп G_ε и некоторой группы $H = \langle X \mid R\rangle \supseteq \langle h\rangle_\infty$ (здесь и везде далее $\varepsilon = \pm 1$). Пусть K_ε — стандартные комплексы (стандартных) копредставлений групп H_ε:

$$H_\varepsilon = \left\langle \{a\} \sqcup X \,\middle|\, \{a^{\widehat{h}} a^{-\varepsilon}\} \sqcup R \right\rangle, \quad \text{где } \widehat{h} \text{ — слово в алфавите } X^{\pm 1}\text{, представляющее элемент } h \in H.$$

Графы Кэли групп G_ε, разумеется, изоморфны (как абстрактные неориентированные графы), то же самое можно сказать про универсальные накрытия стандартных комплексов копредставлений групп G_ε (эти накрытия представляют собой плоскость, разбитую на квадраты, рис. 1).



Универсальные накрытия стандартных комплексов копредставлений G_1 (слева) и G_{-1} (справа);
вертикальные/горизонтальные рёбра помечены буквами a и b, соответственно;
каждый маленький квадратик заклеен двумерной клеткой.

Рис. 1

Чуть менее тривиальное наблюдение состоит в том, что изоморфизм универсальных накрытий имеет место также для групп H_ε:

для любой группы H и любого элемента $h \in H$ бесконечного порядка универсальные накрытия комплексов K_ε изоморфны. (∗)

Ниже мы очень подробно объясняем этот простой факт; читатели, которым это утверждение очевидно, могут пропустить всё до наблюдения (∗∗).

Достаточно показать, что для некоторых накрытий $\widehat{K}_\varepsilon \to K_\varepsilon$ комплексы $\widehat{K}_\varepsilon$ изоморфны; мы возьмём накрытия, отвечающие нормальному замыканию $\langle\langle a\rangle\rangle$ элемента $a \in H_\varepsilon$. В явном виде эти комплексы $\widehat{K}_\varepsilon$ устроены так:

- вершины суть элементы группы H;
- рёбра с метками из X нарисованы так же, как в граф Кэли группы H, то есть из каждой вершины $h' \in H$ исходит ориентированное ребро с каждой меткой $x \in X$ и ведёт в вершину $h'x \in H$;
- кроме того, к каждой вершине $h' \in H$ приделана ориентированная петля (ребро) $a_{h'}$ с меткой a;
- по каждому циклу, метка которого есть одно из определяющих соотношений из R, приклеена ориентированная двумерные клетка;
- по каждому циклу с меткой $\widehat{a^h}a^{-\varepsilon}$ тоже приклеена ориентированная двумерная клетка (*особая* клетка); таким образом, при обходе в положительном направлении на границе каждой из таких клеток встречаются два ребра с меткой a, а именно $a_{h'}$ и $a_{h'h}^{-\varepsilon}$, где, как обычно, $a_{h'h}^{-1}$ означает, что при обходе двумерной клетки в положительном направлении ребро $a_{h'h}$ проходится против его ориентации.

Изоморфизм $\Phi\colon \widehat{K}_1 \to \widehat{K}_{-1}$ между этими комплексами выглядит в явном виде так:

- вершины, рёбра с метками из X и двумерные клетки, отвечающие соотношениям из R переходят тождественно;
- чтобы определить отображение Φ на рёбрах с меткой a и особых двумерных клетках, выберем множество T представителей левых смежных классов группы H по подгруппе $\langle h\rangle$ и положим $\Phi(a_{th^k}) = a_{th^k}^{(-1)^k}$ для всех $t \in T$ и $k \in \mathbb{Z}$ (то есть обратим в каждом смежном классе каждую вторую петлю с меткой a); отображение особых клеток теперь определяется естественным образом: клетка комплекса $\widehat{K}_1$, содержащая рёбра $a_{h'}$ и $a_{h'h}^{-1}$ на границе, превращается в клетку комплекса $\widehat{K}_{-1}$, содержащую рёбра $a_{h'}$ и $a_{h'h}$ на границе.

Следующее несложное наблюдение состоит в том, что

если элемент $h \in H$ принадлежит любой подгруппе конечного индекса в H, и комплексы K_ε имеют общее конечное накрытие, то группа H_1 содержит подгруппу, изоморфную фундаментальной группе $\mathrm{BS}(1,-1)$ *бутылки Клейна.* (∗∗)

Действительно, в группе H_{-1} элемент $b = h$ содержится во всех подгруппах конечного индекса (поскольку пересечение каждой такой подгруппы с H имеет конечный индекс в H и, следовательно, содержит h). По лемме о бутылке (применённой к $G = H_{-1}$) получаем, что каждая подгруппа конечного индекса содержит подгруппу, изоморфную группе бутылки Клейна. Остаётся заметить, что если конечный комплекс $\widehat{K}$ накрывает как K_1, так и K_{-1}, то его фундаментальная группа $\pi_1(\widehat{K})$ вкладывается, как подгруппа конечного индекса, в $\pi_1(K_\varepsilon) = H_\varepsilon$.

Теперь в качестве H, возьмем конкретную группу, а именно группу Баумслага–Солитэра:

$$H = \mathrm{BS}(3,5) = \left\langle c, d \,\middle|\, c^{3d} = c^5 \right\rangle,$$

а в качестве элемента элемент $h \in H$ возьмём коммутатор: $h = [c^d, c]$. Этот элемент h содержится в любой подгруппе конечного индекса в H по лемме о коммутаторе. Согласно $(**)$ это означает, что если бы комплексы K_ε имели общее конечное накрытие, то группа $H_1 = \left\langle a, c, d \,\middle|\, [a, [c^d, c]] = 1, c^{3d} = c^5 \right\rangle$ содержала бы подгруппу, изоморфную группе бутылки Клейна, что противоречит лемме об отсутствии бутылки. Значит, общих конечных накрытий у комплексов K_ε нет; а общее бесконечное накрытие есть согласно $(*)$.

Таким образом, доказан следующий факт о нелейтоновых двумерных комплексах, содержащих две двумерные клетки.

Основная теорема. *Стандартные комплексы копредставлений* $H_\varepsilon = \left\langle a, c, d \,\middle|\, a^{[c^d, c]} = a^\varepsilon,\ c^{3d} = c^5 \right\rangle$, *где* $\varepsilon = \pm 1$, *содержащие по две двумерные клетки (и по одной вершине, и по три ребра) каждый, имеют общее накрытие, но не имеют общего конечного накрытия.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[KaM82] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, Наука, М., 1982.

[ЛШ80] Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп, Мир, М., 1980.

[ФоФ89] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, Наука, М., 1989.

[AFS91] J. Abello, M. R. Fellows, J. C. Stillwell, On the complexity and combinatorics of covering finite complexes, Australasian Journal of Combinatorics, 4 (1991), 103-112.

[BaK90] H. Bass, R. Kulkarni, Uniform tree lattices, J. Amer. Math. Soc., 3:4 (1990), 843-902.

[BoK21] I. Bondarenko, B. Kivva, Automaton groups and complete square complexes, Groups, Geometry, and Dynamics (в печати). См. также arXiv:1707.00215.

[BrS21] M. Bridson, S. Shepherd, Leighton's theorem: extensions, limitations, and quasitrees, Algebraic and Geometric Topology (в печати). См. также arXiv:2009.04305..

[CaW18] P.-E. Caprace, P. Wesolek, Indicability, residual finiteness, and simple subquotients of groups acting on trees, Geometry and Topology, 22:7 (2018), 4163-4204. См. также arXiv:1708.04590.

[CKZ19] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, A. Zakharov, Commensurability of Baumslag–Solitar groups, arXiv:1910.02117.

[JaW09] D. Janzen, D. T. Wise, A smallest irreducible lattice in the product of trees, Algebraic and Geometric Topology, 9:4 (2009), 2191-2201.

[Lei82] F. T. Leighton, Finite common coverings of graphs, J. Combin. Theory, Series B, 33:3 (1982), 231-238.

[Lev15] G. Levitt, Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups, J. Group Theory, 18:1 (2015), 1-43. См. также arXiv:1308.5122.

[Mes72] S. Meskin, Nonresidually finite one-relator groups, Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972), 105-114.

[Neu10] W. D. Neumann, On Leighton's graph covering theorem, Groups, Geometry, and Dynamics, 4:4 (2010), 863-872. См. также arXiv:0906.2496.

[SGW19] S. Shepherd, G. Gardam, D. J. Woodhouse, Two generalisations of Leighton's Theorem, arXiv:1908.00830.

[Tuc90] T. W. Tucker, Some topological graph theory for topologists: A sampler of covering space constructions. In: Latiolais P. (eds) Topology and Combinatorial Group Theory. Lecture Notes in Mathematics, 1440 (1990). Springer, Berlin, Heidelberg.

[Wis96] D. T. Wise, Non-positively curved squared complexes: Aperiodic tilings and non-residually finite groups. PhD Thesis, Princeton University, 1996.

[Wis07] D. T. Wise, Complete square complexes, Commentarii Mathematici Helvetici, 82:4 (2007), 683-724.

[Woo21] D. Woodhouse, Revisiting Leighton's theorem with the Haar measure, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 170:3 (2021), 615-623. См. также arXiv:1806.08196.