УДК 512.543.52 + 512.543.72 MSC: 57M07, 20E06, 20F06, 20F12, 20F70

КОММУТАТОРНАЯ ДЛИНА СТЕПЕНЕЙ В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП

Вадим Ю. Березнюк Антон А. Клячко

Механико-математический факультет Московского государственного университета

Москва 119991, Ленинские горы, МГУ

kuynzereb@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su

Для данных групп A и B, какова минимальная возможная коммутаторная длина 2020-й (например) степени элемента свободного произведения $A*B$, не сопряжённого элементам свободных множителей? Исчерпывающий ответ на этот вопрос пока неизвестен, но мы можем ответить почти точно: этот минимум есть одно из двух чисел (просто зависящих от A и B). Мы рассматриваем также другие подобные задачи.

0. Введение

Хорошо известно, что в свободной группе неединичные коммутаторы не являются истинными степенями [Sch59]. Произведение двух коммутаторов в свободной группе может, разумеется, оказаться квадратом неединичного элемента, а может даже оказаться кубом, как заметил Каллер [Cull81]: $[a,b]^3=[a^{-1}ba,a^{-2}bab^{-1}][bab^{-1},b^2]$. Это равенство выполнено в свободной группе $F(a,b)$ и, следовательно, для любых элементов a и b любой группы. Более того, в работе [Cull81] показано, что $[a,b]^n$ в свободной группе $F(a,b)$ раскладывается в произведение k коммутаторов, если $n\leqslant 2k-1$.

Для свободной группы оценка Каллера не может быть улучшена ни в каком смысле:

если для каких-то элементов x_i,y_i,z какой-то свободной группы выполняется равенство $[x_1,y_1]\dots[x_k,y_k]=z^n$, где $n\geqslant 2k$, то $z=1$.

Этот замечательный факт был доказан в [CCE91] для $k=2$ и в [DH91] в общем случае. В той же работе [DH91] доказано аналогичное утверждение для свободных произведений *локально индикабельных* групп (то есть групп, в которых каждая нетривиальная конечно порождённая подгруппа допускает эпиморфизм на $\mathbb{Z}$). А позже выяснилось, что это утверждение остаётся верным в свободных произведениях вообще любых групп без кручения:

если для каких-то элементов x_i,y_i,z свободного произведения каких-то групп без кручения выполняется равенство $[x_1,y_1]\dots[x_k,y_k]=z^n$, где $n\geqslant 2k$, то z сопряжён элементу одного из свободных множителей.

Это было показано в [Ch18] и [IK18] (независимо). При этом в обеих работах отмечено, что все рассуждения остаются верными, если условие отсутствия кручения заменить на более слабое условие отсутствие маленького кручения. Однако рассуждения в работах [Ch18] и [IK18] разные:
- рассуждение Чена основано на подходе Калегари [Cal09],
- а рассуждение в [IK18] основано на лемме о столкновениях [K93],

поэтому результаты в [Ch18] и [IK18] для групп с кручением получились разные (и даже, что забавно, несравнимые — ни про один из них нельзя сказать, что он сильнее другого):

пусть для элементов x_i,y_i,z свободного произведения каких-то групп без неединичных элементов порядка, меньшего N,
выполняется равенство $[x_1,y_1]\dots[x_k,y_k]=z^n$; тогда z сопряжён элементу одного из свободных множителей,

$$\text{если}\quad\begin{cases} n\geqslant 2k+\left[\frac{2n}{N}\right] & \text{[Ch18]}\quad (\text{здесь и далее } [x]\overset{\text{опр}}{=}\max\{p\in\mathbb{Z}\mid p\leqslant x\})\\ \text{или} & \\ n\geqslant 2k\quad\text{и}\quad N>n & \text{[IK18].}\end{cases}\tag{$*$}$$

В настоящей работе показано, что условие $(*)$ можно заменить на более слабое условие

$$n\geqslant 2k+2\left[\frac{n}{N}\right].\tag{$**$}$$

Нетрудно сообразить, что это усиливает и результат работы [Ch18], и результат работы [IK18]. Более того, полученную оценку, если и можно улучшить, то только чуть-чуть. А именно, ситуация следующая.

Пусть имеется группа G с фиксированным разложением в свободное произведение: $G=\mathop{\ast}\limits_{j\in J}A_j$. Определим число $k(G,n)$, как минимальное $k\in\mathbb{Z}$ такое, что n-я степень некоторого элемента, не сопряжённого элементам

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00591.

из $\bigcup_{j\in J} A_j$, раскладывается в произведение k коммутаторов. И пусть $N(G)$ — минимальный порядок неединичного элемента группы G. Таким образом, согласно (**) любое свободное произведение G удовлетворяет неравенству $k(G,n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 1$. Это оценка представляет собой почти окончательный ответ: теорема 1 (смотрите следующий параграф) утверждает, в частности, что

для любого свободного произведения $G = \mathop{\ast}\limits_{j\in J} A_j$ *величина* $k(G,n)$ *— это одно из двух чисел:*

$$\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 1 \quad \textit{или} \quad \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 2.$$

Приравняв $k(G,n)$ к единице, мы получим известный факт [CER94]:

коммутатор, не сопряжённый элементам свободных сомножителей группы G, может быть истинной степенью, только если $N(G) = 2$ или $N(G) = 3$, причём в последнем случае этот коммутатор может быть только кубом.

Для бóльших $k(G,n)$ наш результат является (по-видимому) новым.

На самом деле, мы изучаем уравнения, более общие, чем уравнение $[y,z][t,u]\ldots = x^n$, про которое мы пока говорили:

- вместо степени x^n мы рассматриваем «обобщённую степень», то есть произведение сопряжённых между собой элементов;
- а вместо произведения коммутаторов мы рассматриваем произведение коммутаторов и элементов, сопряжённых элементам свободных сомножителей.

Основная теорема (упрощённая форма). *Пусть в свободном произведении групп* $G = \mathop{\ast}\limits_{j\in J} A_j$ *нет неединичных элементов порядка, меньшего, чем* N, *и имеет место равенство*

$$c_1 \ldots c_k d_1 \ldots d_l = u_1^{n_1} \ldots u_m^{n_m},$$

где c_i — коммутаторы, d_i сопряжены элементам из $\bigcup_{j\in J} A_j$, элементы u_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам из $\bigcup_{j\in J} A_j$, и n_i — натуральные числа. Тогда

$$2k + l \geqslant \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) - 2\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i\right] + 2.$$

Этот результат значительно усиливает ранее известные факты на эту тему:

$$\textit{в условиях основной теоремы } 2k + l \geqslant \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) - \left[\frac{2}{N}\sum\limits_{i=1}^{m} n_i\right] + 2, & \textit{если } l = 0 \qquad \text{[Ch18]};\\ \sum\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) + 2, & \textit{если } N > \sum\limits_{i=1}^{m} n_i \quad \text{[IK18]}. \end{cases}$$

Из основной теоремы немедленно вытекает то, что мы говорили выше про неравенство (**).

Следствие 1. *Пусть в свободном произведении групп* $G = \mathop{\ast}\limits_{j\in J} A_j$ *имеет место равенство* $c_1 \ldots c_k = u^n$, *где c_i — коммутаторы, а u не сопряжён элементам свободных сомножителей. Тогда* $2k \geqslant n - 2\left[\frac{n}{N}\right] + 1$ (или, что то же самое, $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N}\right] + 1$).

Приведённая выше формулировка основной теоремы несколько упрощённая. На самом деле, мы доказываем более сильное неравенство при более слабых предположениях. Полную формулировку этой теоремы и её доказательство можно найти в последнем параграфе. В параграфе 2 мы выводим из основной теоремы теорему 1 о минимальной коммутаторной длине степеней, упомянутую выше. Параграфы 3 и 4 содержат необходимые сведения о диаграммах Хауи и о движениях на поверхностях, то есть о лемме о столкновениях. Эта лемма из [Kl93] (или её варианты) уже применялась в [FK12] и [IK18] к задачам, связанным с коммутаторной длиной (а, например, в [Kl93], [ClG95], [FeR96], [Кл05], [Кл06a], [Кл06b], [Кл07], [Cl03], [ClG01], [CoR01], [FoR05a], [FoR05b], [Kl09], [Le09] и [KlL12] она применялась к разным другим задачам). Нам понадобится некоторый новый вариант леммы о столкновениях, о котором речь пойдёт в параграфе 4. Забавно, что существенную роль в этом параграфе играет *задача о справедливом делении*, смотрите, например, [Me06].

Наши обозначения в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Коммутатор $[x,y]$ мы понимаем как $x^{-1}y^{-1}xy$. Символом $\mathrm{cl}(g)$ мы обозначаем *коммутаторную длину* элемента g группы, то есть $\mathrm{cl}(g)$ есть наименьшее целое k такое, что g раскладывается в произведение k коммутаторов (и $\mathrm{cl}(1) = 0$). Слово «поверхность» всегда понимается, как замкнутая поверхность (необязательно связная). Эйлерову характеристику поверхности S мы обозначаем $\chi(S)$. Буквы $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множества вещественных, целых и натуральных (целых положительных) чисел, соответственно. Символом $[x]$ мы обозначаем целую часть вещественного числа x (то есть $[x]$ — это наибольшее целое, не превосходящее x).

1. Степени с маленькой коммутаторной длиной

Оценку Каллера, о которой шла речь в самом начале введения, можно сформулировать следующим образом.

Неравенство Каллера [Cull81]. *Для любых элементов a и b любой группы и любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$\mathrm{cl}\left([a,b]^n\right) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]_c + 1, \quad \text{где} \quad [x]_c \overset{\text{опр}}{=} \begin{cases} [x], & \text{если } x \neq 0; \\ -1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если a и b — элементы какой-то группы и $m \in \mathbb{N}$, то элемент $(ab)^m$ сопряжён элементу вида $a^m b^m c_1 c_2 \dots c_{[\frac{m}{2}]}$, где $c_i \in G$ — коммутаторы.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} &a^l(ba)^s b^l \cdot [a^{l-2}b^{l-1}, b^{2-l}a^{1-l}] = \\ &= a^l(ba)^s b^l \cdot b^{1-l}a^{2-l}a^{l-1}b^{l-2}a^{l-2}b^{l-1}b^{2-l}a^{1-l} = a^l(ba)^s bab^{l-2}a^{l-2}ba^{1-l} \sim a^{l-2}ba(ba)^s bab^{l-2} = a^{l-2}(ba)^{s+2}b^{l-2}. \end{aligned}$$

Очевидная индукция показывает, что для некоторых коммутаторов c_i элемент $a^m b^m c_1 c_2 \dots c_{[\frac{m}{2}]}$ сопряжён элементу $(ba)^m$, если число m чётно, или элементу $a(ba)^{m-1}b$, если число m нечётно, что и требовалось (поскольку $a(ba)^{m-1}b = (ab)^m \sim (ba)^m$, где символ $\sim$ означает сопряжённость).

Лемма 2. *Если a и b — элементы некоторой группы, m и s — натуральные числа, и $a^m = b^m = 1$, то $\mathrm{cl}\left((ab)^{ms}\right) \leqslant s([m/2]-1) + [s/2]_c + 1$.*

Доказательство. Заметим, что для любого неединичного элемента g коммутанта любой группы и для любого $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathrm{cl}(g^s) \leqslant s(\mathrm{cl}(g)-1) + \left[\frac{s}{2}\right]_c + 1.$$

Действительно, представим элемент g в виде $g = ch$, где c — коммутатор, а $\mathrm{cl}(h) = \mathrm{cl}(g) - 1$, получим

$$\mathrm{cl}(g^s) = \mathrm{cl}((ch)^s) = \mathrm{cl}(c^s h^{c^{s-1}} h^{c^{s-2}} \dots h^c h) \leqslant \mathrm{cl}(c^s) + s \cdot \mathrm{cl}(h) \leqslant \left[\frac{s}{2}\right]_c + 1 + s(\mathrm{cl}(g)-1) \quad \text{(по неравенству Каллера).}$$

Это завершает доказательство, поскольку по лемме 1 $\mathrm{cl}\left((ab)^m\right) \leqslant [m/2]$.

Теорема 1. *Для любого свободного произведения $G = \mathop{\ast}\limits_{j \in J} A_j$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется одно из равенств:*

$$k(G,n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 1 \quad \text{или} \quad k(G,n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 2,$$

$$\text{где } k(G,n) := \min\left\{ \mathrm{cl}(g^n) \;\middle|\; g \in G,\ g \text{ не сопряжён элементам из } \bigcup_{j \in J} A_j \right\} \text{ и } N(G) \overset{\text{опр}}{=} \min\{|\langle g \rangle| \mid g \in G \setminus \{1\}\}.$$

При этом $k(G,n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 1$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) *n чётно, а $\left[\frac{n}{N(G)}\right]$ нечётно;* б) *n делится на $N(G)$;* в) *$n \leqslant N(G)$;* г) *$N(G) = 2$.*

Доказательство. Число $N(G)$, разумеется, либо простое, либо бесконечное. Для $N(G) = 2$ утверждение выполнено, потому что группа G в этом случае содержит бесконечную диэдральную подгруппу, всякий элемент коммутанта которой является коммутатором (и не сопряжён элементам свободных сомножителей). Для $N(G) = \infty$ рассуждения, приведённые ниже проходят, но мы не будем на этом останавливаться, поскольку утверждение теоремы в этом случае немедленно вытекает из результатов работ [Ch18] и [IK18], упомянутых во введении. Таким образом, считаем, что число $N(G)$ нечётное.

Если $z^m = 1$, то мы имеем два неравенства:

$$\mathrm{cl}([x,y]^m) \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]_c + 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{cl}\left([z,u]^{ms}\right) \leqslant s\left(\left[\frac{m}{2}\right] - 1\right) + \left[\frac{s}{2}\right]_c + 1, \tag{***}$$

Первое неравенство — это оценка Каллера, а второе — лемма 2.

Рассмотрим в группе G коммутатор $[z,u]$, где $z^{N(G)} = 1$, а u не лежит в том же свободном сомножителе, что z. Разделим n на $N = N(G)$ с остатком: $n = rN + t$, где $0 \leqslant t < N$ (а $r = \left[\frac{n}{N}\right]$). Обозначим символами $\Delta_0(a,b,\ldots)$ и $\Delta_{\textit{неч}}(a,b,\ldots)$ число нулей и число нечётных чисел в наборе $(a,b,\ldots)$. Тогда для нечётного N мы получим

$$\begin{aligned}
k(G,n) &\leqslant \mathrm{cl}\left([z,u]^n\right) = \mathrm{cl}\left([z,u]^{rN+t}\right) \leqslant \mathrm{cl}\left([z,u]^{rN}\right) + \mathrm{cl}\left([z,u]^t\right) \overset{(***)}{\leqslant} \left(r\left(\left[\frac{N}{2}\right] - 1\right) + \left[\frac{r}{2}\right]_c + 1\right) + \left(\left[\frac{t}{2}\right]_c + 1\right) = \\
&= \left(r\left(\frac{N-1}{2} - 1\right) + \left[\frac{r}{2}\right]_c + 1\right) + \left(\left[\frac{n-rN}{2}\right]_c + 1\right) = \\
&= r\left(\frac{N-1}{2} - 1\right) + \frac{r}{2} + 1 + \frac{n-rN}{2} + 1 - \Delta_0(r, n-rN) - \frac{1}{2}\Delta_{\textit{неч}}(r, n-rN) = \\
&= \frac{n}{2} - r + 2 - \Delta_0(r, n-rN) - \frac{1}{2}\Delta_{\textit{неч}}(r, n-rN) = \\
&= \left[\frac{n}{2}\right] - r + 2 - \Delta_0(r, n-rN) - \frac{1}{2}\Big(\Delta_{\textit{неч}}(r, n-rN) - \Delta_{\textit{неч}}(n)\Big) = \\
&= \left[\frac{n}{2}\right] - r + 2 - \Delta_0(r, n-rN) - \Delta_{\textit{неч}}(r)\Big(1 - \Delta_{\textit{неч}}(n)\Big) = \begin{cases} \left[\frac{n}{2}\right] - r + 1, & \text{если выполнено а), б) или в);} \\ \left[\frac{n}{2}\right] - r + 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Сопоставляя это со следствием 1, мы приходим к выводу, что теорема 1 доказана (по модулю основной теоремы).

2. Диаграммы Хауи

Пусть имеется замкнутая ориентированная поверхность S (возможно, несвязная) и (неориентированный) конечный граф Γ, который вложен в поверхность S и разбивает её на односвязные области. Такой граф задаёт клеточное разбиение поверхности S, то есть отображение M, называемое *картой* на S:

$$\mathrm{M}\colon \bigsqcup_{i=1}^{m} D_i \to S, \quad \text{где } D_i \text{ — двумерные диски,}$$

такое, что

- отображение M непрерывно, сюръективно, инъективно на внутренности (то есть на $\bigsqcup\limits_{i=1}^{m}(D_i \setminus \partial D_i)$);
- прообраз каждой точки конечен, а прообраз графа Γ есть объединение границ граней: $\mathrm{M}^{-1}(\Gamma) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} \partial D_i$.

Прообразы вершин графа Γ называют *углами* карты и говорят, что угол c находится *при* вершине v, если $\mathrm{M}(c) = v$. Вершины и рёбра графа Γ называют *вершинами и рёбрами* карты M. Диски D_i называют *гранями* или *клетками* карты. Такую карту мы называем *диаграммой* над свободным произведением $A * B$, если

- граф Γ двудольный, то есть вершины разделены на два класса: A-вершины и B-вершины, и каждое ребро соединяет A-вершину с B-вершиной;
- углы при A-вершинах помечены элементами группы A, а углы при B-вершинах помечены элементами группы B;
- некоторые вершины выделены и называются *внешними*, остальные вершины называются *внутренним*;
- метка каждой внутренней A-вершины равна единице в группе A, а метка каждой внутренней B-вершины равна единице в группе B, где под *меткой вершины* понимается произведение меток углов при этой вершине, перечисленных по часовой стрелке (таким образом, метка вершины определена с точностью до сопряжённости в группах A и B).

Подобные диаграммы рассматривались в [How83], [How90], [Kl93], [Le09] и многих других работах, но наши определения слегка отличаются и соответствуют определениям из [IK18] (за исключением того, что в [IK18] внешние и внутренние вершины называются иррегулярными и регулярными).

Метка грани такой диаграммы определяется естественным образом как произведение меток всех углов этой грани против часовой стрелки. Метка грани представляет собой элемент свободного произведения $A * B$, определённый с точностью до сопряжённости.

Например, на рисунке 1 изображена диаграмма на торе (который нарисован в виде прямоугольника с отождествлёнными противоположными сторонами), содержащая две вершины, три ребра, одну грань и шесть углов с метками $a \in A$ и $b \in B$. Если вершины внутренние, то a^3 должно быть равно единице в группе A, а b^3 должно быть равно единице в группе B. Метка грани здесь равна $(ab)^3$. Эта диаграмма показывает, что куб произведения двух элементов порядка три всегда является коммутатором (в любой группе).

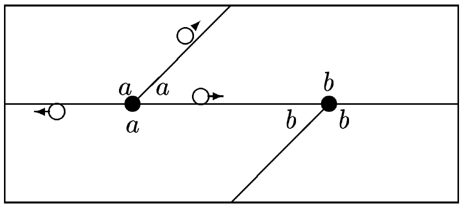


Рис. 1

3. Движения

Этот параграф по сути повторяет соответствующий параграф из работы [FK12] (и [IK18]) и состоит из определений и утверждений, которые мы позаимствовали из [Кл05] (слегка упростив их применительно к интересующему нас случаю).

Пусть на замкнутой ориентированной поверхности S имеется карта М, соответствующая графу $\Gamma \subset S$. *Автомобилем*, объезжающим грань D этой карты, называют сохраняющий ориентацию гомеоморфизм из ориентированной окружности R (*окружности времени*) в границу ∂D грани D.

Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени t в точке $p \in \Gamma$, равно степени d этой точки, то мы говорим, что в точке p в момент t происходит *полное столкновение* (степени d), а точку p называем *точкой полного столкновения* (степени d). Здесь *степенью* точки $p \in \Gamma$ мы называем число рёбер, инцидентных вершине p, если p является вершиной; если же p не является вершиной (то есть, если p — внутренняя точка ребра), то мы считаем, что $\deg p = 2$.

Обращаем внимание, что согласно этому определению вершина степени один (то есть тупик), в которую заезжает хоть один автомобиль, всегда является точкой полного столкновения.

Кратным движением периода T на карте М называется набор автомобилей $\alpha_{D,j}\colon R \to \partial D$, где $j = 1, \ldots, d_D$, такой что

1) $d_D \geqslant 1$ для любой грани D (то есть каждую грань объезжает по крайней мере один автомобиль);
2) $\alpha_{D,j}(t+T) = \alpha_{D,j+1}(t)$ для любого $t \in R$ и $j = \{1, \ldots, d_D\}$ (здесь индексы берутся по модулю d_D, а сложение точек окружности R производится естественным образом: $R = \mathbb{R}/P\mathbb{Z}$);
3) существует такое разбиение каждой из окружностей ∂D на d_D дуг (с непересекающимися внутренностями), что на протяжении интервала времени $[0, T]$ каждый автомобиль $\alpha_{D,j}$ движется по j-й дуге.

Говоря по-простому, границу ∂D каждой грани D объезжает несколько (d_D) автомобилей против часовой стрелки (внутренность грани остается слева от автомобиля), не разворачиваясь и не останавливаясь. При этом движение периодично в том смысле, что граница грани разбита на d_D участков, и за период каждый автомобиль проезжает свой участок (и, таким образом, по прошествии периода автомобили меняются местами).

Лемма о столкновениях (для кратных движений) [Кл05], [Kl97]. *Для любого кратного движения на карте на замкнутой ориентированной поверхности S число точек полного столкновения не меньше чем $\chi(S) + \sum\limits_D (d_D - 1)$, где сумма распространяются на все грани карты.*

В упомянутых работах эта лемма была сформулирована и доказана для связных поверхностей, но она остаётся верной и в несвязном случае по очевидным причинам — и левая, и правая часть неравенства аддитивна относительно несвязного объединения.

Рассмотрим, например, такое движение на одноклеточной карте на торе, изображённой на рисунке 1: три автомобиля объезжают единственную имеющуюся грань с постоянной скоростью одно ребро в минуту, а в нулевой момент времени эти три автомобиля находятся в трёх разных углах с меткой a. На рисунке 1 изображено положение автомобилей в момент времени $t = 1/3$. Это периодическое движение с периодом две минуты. Полные столкновения происходят в обеих вершинах карты, а вне вершин (то есть во внутренних точках рёбер) столкновений нет. Лемма о столкновениях говорит, что должно выполняться неравенство

$$\begin{pmatrix}\text{число точек полного столкновения,}\\ \text{то есть 2}\end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix}\text{эйлерова характеристика тора,}\\ \text{то есть 0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d_D\text{, то есть число автомобилей,}\\ \text{объезжающих единственную грань } D,\\ \text{то есть 3}\end{pmatrix} - 1,$$

которое в данном случае оказалось равенством.

4. Кластеры

Идея кластеров состоит в том, что, столкновения, происходящие близко друг от друга, можно трактовать, как одно столкновение; таким образом, модифицированная лемма о столкновениях (лемма о кластерах, смотрите ниже) говорит, что не только число точек полного столкновения достаточно велико, велико также число точек полного столкновения, находящихся далеко друг от друга.

Пусть имеется кратное движение с периодом T на некоторой карте на поверхности, причём все автомобили движутся с одинаковой постоянной скоростью одно ребро в минуту.

Набор K точек полного столкновения назовём *кластером* с центром $v \in K$, если каждую точку $w \in K$ посещает хотя бы один из автомобилей, сталкивающихся в точке v, в течении менее, чем $T/2$ минут после столкновения в точке v. Автомобили, сталкивающиеся в центре v кластера K, мы называем *связывающими автомобилями* кластера K, а пути (длины $< T/2$), по которым эти автомобили едут из центра кластера в другие его точки, мы называем *связывающими путями* кластера K. Мы называем набор кластеров *независимым*, если центр никакого из этих кластеров не лежит на связывающих путях других кластеров этого набора.

В формулировке леммы о кластерах (смотрите ниже) используется *функция справедливого деления* $\mathbf{fp}(\mathcal{M})$ мультимножества $\mathcal{M}$, состоящего из натуральных чисел:

$$\mathbf{fp}(\mathcal{M}) \overset{\text{опр}}{=} \min\left\{\max\left(\sum_{i\in\mathcal{A}} i,\ \sum_{i\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{A}} i\right)\ \middle|\ \mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}\right\}. \quad \text{Например, } \mathbf{fp}(10,4,4,3,2) = \max(10+2,\ 4+4+3) = 12.$$

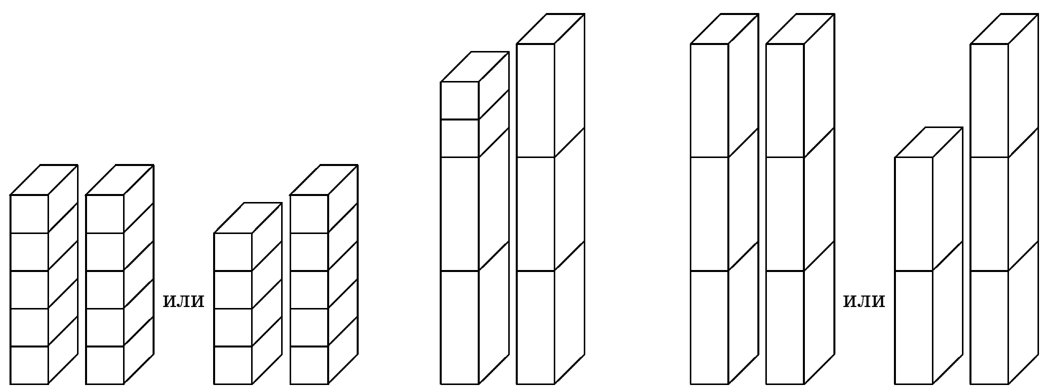
Задачу нахождения такого справедливого деления называют иногда «самой лёгкой из NP-трудных задач» [Me06]. Нам понадобится простейший пример такого вычисления:

$$\mathbf{fp}(\overbrace{\underbrace{1,1,1,1,1\ldots,1}_{\min(l,\varkappa)\text{ штук}},N,N,\ldots,N}^{\varkappa\text{ штук}}) = \begin{cases} \left[\frac{\varkappa+1}{2}\right], & \text{если } \varkappa \leqslant l;\\ \left[\frac{l+1}{2}\right] + N\cdot\frac{\varkappa-l}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \text{ чётно;}\\ \left[\frac{l+1-\min(l,N)}{2}\right] + N\cdot\frac{\varkappa-l+1}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \text{ нечётно.}\end{cases} \tag{1}$$

Это верно для всех $\varkappa, N \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Дело в том, что при справедливом делении такого мультимножества $\mathcal{M}$ на две части: $\mathcal{M} = \mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}$, самым разумным будет поступить так:

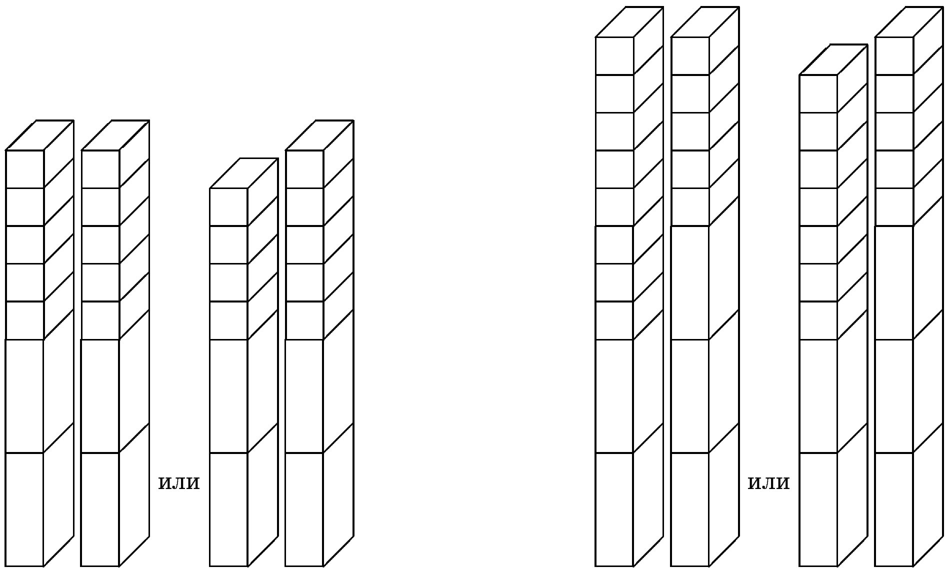
- поделить большие элементы (то есть равные N) поровну (насколько возможно), то есть $[(\varkappa - l)/2]$ этих элементов включить в $\mathcal{A}$ (при $\varkappa > l$);
- а маленькими элементами (то есть единичками) попытаться, насколько возможно, скомпенсировать разницу между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (которая возникает при нечётном $\varkappa - l$);
- если разница будет скомпенсирована, а единички ещё останутся, то их надо поделить поровну (насколько возможно).

Доказательство мы оставляем читателям в качестве несложного упражнения, на рисунках 2 и 3 изображены все возможные случаи ($f = \mathbf{fp}(\overbrace{\underbrace{1,1,1,1,1\ldots,1}_{\min(l,\varkappa)\text{ штук}},N,N,\ldots,N}^{\varkappa\text{ штук}})$ на этих рисунках).



$f{=}5,\ l{=}100$ и $\varkappa\in\{9,10\}$ $\quad$ $f{=}9,\ N{=}3,\ l{=}2$ и $\varkappa{=}7$ $\quad$ $f{=}9,\ N{=}3,\ l{=}0$ и $\varkappa\in\{5,6\}$

Рис. 2



$f{=}11,\ N{=}3,\ l{\in}\{9{,}10\}$ и $\varkappa{=}l{+}4$ (то есть 13 или 14) $f{=}14,\ N{=}3,\ l{\in}\{12{,}13\}$ и $\varkappa{=}l{+}5$ (то есть 17 или 18)

Рис. 3

Мы называем кратное движение *равномерным*, если все автомобили движутся с одинаковой постоянной скоростью одно ребро в минуту и в начальный момент находятся в некоторых вершинах.

Лемма о кластерах. *Пусть имеется кратное равномерное движение на некоторой карте на некоторой ориентированной замкнутой поверхности S, и множество точек полного столкновения Π этого движения разбито на минимальное возможное число $\varkappa$ независимых кластеров:* $\Pi = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\varkappa} K_i$. *Тогда*

а) $\varkappa \geqslant \chi(S) + \sum\limits_D (d_D - 1)$, *где сумма распространяются на все грани карты*;

б) *если всего имеется n точек полного столкновения, и их степени суть $N_1 \leqslant \ldots \leqslant N_n$, то число автомобилей этого движения (то есть $\sum\limits_D d_D$, где сумма распространяются на все грани карты) удовлетворяет неравенству $\sum\limits_D d_D \geqslant \max\bigl(\mathbf{fp}(N_1, \ldots, N_\varkappa),\ N_n\bigr)$; в частности, если все точки полного столкновения имеют степень не меньше N, то $\sum\limits_D d_D \geqslant \bigl[\frac{\varkappa+1}{2}\bigr] \cdot N$.*

Доказательство. Будем считать, что все столкновения происходят в вершинах. Этого можно добиться дополнительным разделением всех рёбер на две половины с помощью новых вершин степени два (и замедлением всех автомобилей).

Докажем первое утверждение. Для каждого кластера $K = K_i$ с центром $v = v_i$ рассмотрим минимальное множество связывающих путей $\pi_j = \pi_{i\,j}$, объединение которых содержит все точки кластера K. Минимальность означает, что для каждого связывающего автомобиля имеется не более одного пути π_j, лежащего на границе клетки $D_j = D_{i\,j}$, которую объезжает этот автомобиль. По определению кластера длина τ_j пути π_j меньше $T/2$.

Соединим начало и конец пути π_j внутри клетки D_j путём π'_j такой же длины (то есть «удвоим» путь π_j). (Отметим, что когда мы проделаем эту операцию для всех рассматриваемых кластеров, внутри некоторых клеток может возникнуть несколько хорд, но эти хорды не будут пересекаться, поскольку рассматриваемые кластеры независимы.)

Клетка D_j превратится в две клетки (смотрите рисунок 4, слева):

- *большая* клетка D'_j такого же периметра, как исходная клетка D_j
- и *маленькая* клетка Γ_j периметра $2\tau_j$.

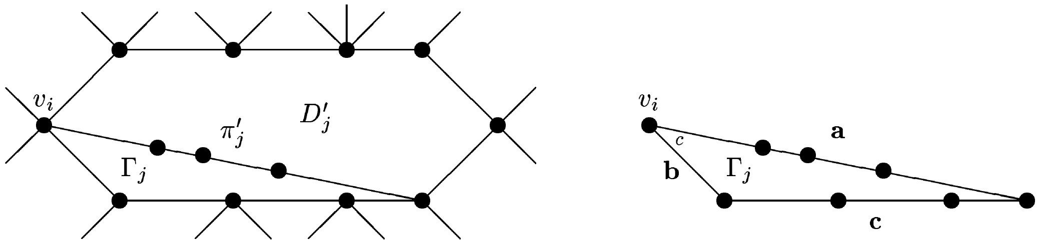


Рис. 4

Движение автомобилей, объезжающих большие клетки, мы определим так же, как движение объезжающих исходные клетки D_j, но вместо пути π_j соответствующие автомобили будут ехать по его дублёру π'_j.

Движение автомобилей, объезжающих маленькие клетки, мы определим чуть позже; а пока опишем, как устроено движение уже имеющихся автомобилей на границах этих клеток. Граница каждой маленькой клетки $\Gamma = \Gamma_j$ имеет длину $2\tau_j$ и состоит из трёх участков (перечисляемых против часовой стрелки, смотрите рисунок 4, справа):

- участок $\mathbf{a} = \pi'_j$ длины $\tau = \tau_j$; по этому участку движется связывающий автомобиль в течении времени $0 \leqslant t \leqslant \tau$ (для упрощения обозначений мы считаем, что полное столкновение в точке v_i происходит в нулевой момент времени; в других случаях следует внести очевидные изменения); участок $\mathbf{a}$ заканчивается в углу c при центре v_i кластера K_i;
- участок $\mathbf{b}$ длины один (это первое ребро пути π_j), начинающийся в углу c; по этому участку движется (другой) связывающий автомобиль кластера K_i в течении времени $-1 \leqslant t \leqslant 0$;
- участок $\mathbf{c}$ длины $|\mathbf{c}| = \tau - 1$, по которому едут какие-то автомобили, про которые мы ничего не знаем; но раз $\tau < T/2$, стало быть, $|\mathbf{c}| = \tau - 1 < T - \tau - 1$; а это означает, что

на участке $\mathbf{c}$ *(включая его концы) нет ни одного автомобиля, в некоторый момент времени* $\tau < t < T - 1$ *и даже в некоторый подпромежуток* Δ_Γ *(положительной продолжительности) промежутка времени* $\tau < t < T - 1$

(поскольку промежуток времени $\tau < t < T - 1$ имеет продолжительность $T - 1 - \tau > |\mathbf{c}|$, а все автомобили едут с единичной скоростью). Отметим ещё, что ничто нам не мешает выбрать промежутки времени Δ_Γ непересекающимися для разных маленьких клеток Γ:

$$\Delta_\Gamma \cap \Delta_{\Gamma'} = \varnothing \quad \text{при } \Gamma \neq \Gamma'.$$

Определим теперь движение нового автомобиля α_Γ, объезжающего границу маленькой клетки $\Gamma = \Gamma_j$:

- в нулевой момент времени автомобиль α_Γ находится в углу c (и участвует в полном столкновении в точке v_i);
- далее автомобиль α_Γ (медленно) движется по участку $\mathbf{b}$ (ни с кем не сталкиваясь, поскольку тот (связывающий) автомобиль, с которым только и можно столкнуться на участке $\mathbf{b}$, только что с него выехал, встретившись с нашем автомобилем α_Γ в точке v_i, так что на этом участке находится безопасно до момента $T - 1$);
- а в промежуток времени Δ_Γ (который начинается раньше, чем $T - 1$, по определению Δ_Γ) автомобиль α_Γ (быстро) проезжает участок $\mathbf{c}$, опять ни с кем не сталкиваясь, поскольку на этом участке никого нет в промежуток времени Δ_Γ по определению Δ_Γ (и так как $\Delta_\Gamma \cap \Delta_{\Gamma'} = \varnothing$ при $\Gamma \neq \Gamma'$);
- таким образом автомобиль α_Γ оказывается на участке $\mathbf{a}$ позже, чем в момент τ (опять по определению промежутка Δ_Γ); значит, связывающий автомобиль, с которым можно было бы столкнуться на этом участке, уже уехал с него, и наш автомобиль α_Γ благополучно без столкновений добирается до угла c к концу периода.

Мы построили периодическое движение на некоторой карте на поверхности S, причём полных столкновений теперь ровно $\varkappa$, а сумма $\sum\limits_D (d_D - 1)$ по всем граням осталась такой же, как на исходной карте (так как каждую маленькую грань Γ_j объезжает один автомобиль, то есть $d_{\Gamma_j} = 1$). Для завершения доказательства пункта а) остаётся сослаться на лемму о столкновениях.

Чтобы доказать утверждение б), разделим период времени $I = \{t \mid 0 \leqslant t < T\}$ на два полупериода: $I = I_1 \sqcup I_2$, где $I_1 = \{t \mid 0 \leqslant t < T/2\}$ и $I_2 = \{t \mid T/2 \leqslant t < T\}$.

Периодичность движения означает, что в каждой точке происходит не более одного полного столкновения в течении периода I. Поэтому, множество точек полного столкновения $\Pi = \{p_1, \ldots, p_n\}$ разделится на два подмножества: $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, а мультимножество $\mathcal{N} = (N_1, \ldots, N_n)$ степеней этих точек — на два подмультимножества:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2, \quad \text{где } \mathcal{N}_i = (\text{степени точек полных столкновений, происходящих в моменты времени из } I_i).$$

Пусть множество Π_i можно разбить на $\varkappa_i$ независимых кластеров, и нельзя разбить на меньшее число независимых кластеров. Тогда $\varkappa_1 + \varkappa_2 \geqslant \varkappa$ (поскольку множество Π разбивается на $\varkappa_1 + \varkappa_2$ независимых кластеров, а по условию его нельзя разбить меньше, чем на $\varkappa$ независимых кластеров).

Множество точек полного столкновения мы называем *независимым*, если множества сталкивающихся в этих точках автомобилей в течении периода I попарно не пересекаются.

Сосредоточимся теперь на множестве Π_1. Пусть

- $v_1 \in \Pi_1$ — это точка, в которой происходит первое (по времени) столкновение (если такая точка v_1 существует);
- $v_2 \in \Pi_1$ — это точка, в которой происходит первое (по времени) столкновение такое, что $\{v_1, v_2\}$ независимы (если такая точка v_2 существует);
- $v_3 \in \Pi_1$ — это точка, в которой происходит первое (по времени) столкновение такое, что $\{v_1, v_2, v_3\}$ независимы (если такая точка v_3 существует);
- $\ldots$

Точек v_i наберётся не меньше, чем $\varkappa_1$, поскольку иначе множество Π_1 разбивалось бы на меньшее, чем $\varkappa_1$, число независимых кластеров (например, если v_1 и v_2 нашлись, а v_3 не существует, то каждая точка из Π_1 окажется либо в кластере с центром v_1, либо в кластере с центром v_2).

Таким образом, множество Π_1 содержит независимые точки $v_1, \ldots, v_{\varkappa_1}$, а множество Π_2 содержит независимые точки $w_1, \ldots, w_{\varkappa_2}$ (по аналогичным причинам). Значит, число всех имеющихся автомобилей не меньше, чем

$$\max\left(\sum \deg v_i,\ \sum \deg w_i\right) \geqslant \mathbf{fp}(\deg v_1, \ldots, \deg v_{\varkappa_1}, \deg w_1, \ldots, \deg w_{\varkappa_2}) \geqslant \mathbf{fp}(N_1, \ldots, N_\varkappa)$$

(где последнее неравенство немедленно вытекает из того, что $\varkappa_1 + \varkappa_2 \geqslant \varkappa$ и $N_1 \leqslant \ldots \leqslant N_n$).

Это и есть доказываемая оценка, поскольку неравенство $\sum\limits_D d_D \geqslant N_n$ очевидно (раз в какой-то точке сталкиваются N_n автомобилей, стало быть, N_n автомобилей существуют).

Из леммы о кластерах вытекает следующее утверждение (в котором кластеры не упоминаются вовсе).

Следствие леммы о кластерах. *Пусть кратное равномерное движение на некоторой карте на некоторой ориентированной замкнутой поверхности S имеет всего n точек полного столкновения, и их степени суть $N_1 \leqslant \ldots \leqslant N_n$. Тогда число автомобилей этого движения (то есть $\sum\limits_D d_D$, где сумма распространяются на все грани карты) удовлетворяет неравенству*

$$\sum_D d_D \geqslant \max\bigl(\mathbf{fp}(N_1, \ldots, N_\varkappa),\ N_n\bigr), \quad \textit{где } \varkappa = \chi(S) + \sum_D (d_D - 1) \text{ (эта величина никогда не превосходит } n\text{)}. \quad (2)$$

Кроме того, для всех $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется неравенство

$$\chi(S) - l + \sum_D (d_D - 1) \leqslant \begin{cases} 2\left[\frac{1}{N_{l+1}}\left(\sum\limits_D d_D - \left[\frac{l+1}{2}\right]\right)\right], & \textit{если число } \sum\limits_D (d_D - 1) - l \textit{ чётно;} \\ 2\left[\frac{1}{N_{l+1}}\left(\sum\limits_D d_D - \left[\frac{l+1-N_{l+1}}{2}\right]_+\right)\right] - 1, & \textit{если число } \sum\limits_D (d_D - 1) - l \textit{ нечётно,} \end{cases} \quad (3)$$

где $[x]_+ \overset{\text{опр}}{=} \max([x], 0)$ и $N_i = \infty$ при $i > n$ (в частности, при $N_{l+1} = \infty$ правая часть есть 0 или -1).

Доказательство. Для доказательства неравенства (2) достаточно подставить оценку из пункта а) леммы о кластерах в оценку из пункта б) (воспользовавшись тем, что функция справедливого деления $\mathbf{fp}(N_1, \ldots, N_\varkappa)$ очевидным образом не убывает, как функция от $\varkappa$).

Докажем (3). Воспользовавшись монотонностью функции $\mathbf{fp}$ по каждому из аргументов и формулами (2) и (1), при $\varkappa = \chi(S) + \sum\limits_D (d_D - 1)$ мы получаем

$$\sum_D d_D \overset{(2)}{\geqslant} \max\bigl(\mathbf{fp}(N_1, \ldots, N_\varkappa),\ N_n\bigr) \geqslant \mathbf{fp}(\overbrace{\underbrace{1,1,1,1,1\ldots,1}_{\min(l,\varkappa)\text{ штук}}, N_{l+1}, N_{l+1}, \ldots, N_{l+1}}^{\varkappa\text{ штук}}) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \begin{cases} \left[\frac{\varkappa+1}{2}\right], & \text{если } \varkappa \leqslant l; \\ \left[\frac{l+1}{2}\right] + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa - l}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \in 2\mathbb{Z}; \\ \left[\frac{l+1-\min(l,N_{l+1})}{2}\right] + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2}, & \text{если } \varkappa > l \text{ и } \varkappa - l \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Случай 0: $\varkappa \leqslant l$.
- Если $\varkappa - l$ четно, то $[(\varkappa+1)/2] \geqslant [(l+1)/2] + N_{l+1} \cdot (\varkappa - l)/2$ (так как $N_{l+1} \geqslant 1$).
- Если же $\varkappa - l$ нечётно, то $[(\varkappa+1)/2] \geqslant [l/2] + N_{l+1} \cdot (\varkappa - l + 1)/2 \geqslant [(l+1-\min(l, N_{l+1}))/2] + N_{l+1} \cdot (\varkappa - l + 1)/2$.

В итоге мы получаем при всех $\varkappa$ и l

$$\sum_D d_D \geqslant \begin{cases} \left[\frac{l+1}{2}\right] + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l}{2}, & \text{если } \varkappa - l \in 2\mathbb{Z}; \\ \left[\frac{l+1-\min(l,N_{l+1})}{2}\right] + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa-l+1}{2}, & \text{если } \varkappa - l \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Случай 1: $\varkappa - l$ чётно.

$$\sum_D d_D \geqslant \left[\frac{l+1}{2}\right] + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa - l}{2} \implies \varkappa - l \leqslant \frac{2}{N_{l+1}} \left(\sum_D d_D - \left[\frac{l+1}{2}\right] \right) \implies \varkappa - l \leqslant 2 \left[\frac{1}{N_{l+1}} \left(\sum_D d_D - \left[\frac{l+1}{2}\right] \right) \right],$$

где последняя импликация выполняется из-за того, что $\varkappa - l \in 2\mathbb{Z}$. Это и есть неравенство (3), так как $\varkappa = \chi(S) + \sum\limits_D (d_D - 1)$.

Случай 2: $\varkappa - l$ нечётно.

$$\sum_D d_D \geqslant \left[\frac{l+1-N_{l+1}}{2}\right]_+ + N_{l+1} \cdot \frac{\varkappa - l + 1}{2} \implies \varkappa - l + 1 \leqslant \frac{2}{N_{l+1}} \left(\sum_D d_D - \left[\frac{l+1-N_{l+1}}{2}\right]_+ \right);$$

чётность числа $\varkappa - l + 1$ теперь означает, что $\varkappa - l + 1 \leqslant 2 \left[\frac{1}{N_{l+1}} \left(\sum\limits_D d_D - \left[\frac{l+1-N_{l+1}}{2}\right]_+ \right) \right]$, что и требовалось.

Это завершает доказательство.

5. Основная теорема

Основная теорема. *Пусть в свободном произведении групп $G = \mathop{*}\limits_{j \in J} A_j$ имеет место равенство*

$$c_1 \ldots c_k d_1 \ldots d_l = u_1^{n_1} \ldots u_m^{n_m}, \tag{4}$$

где c_i — коммутаторы, d_i сопряжены элементам из $\bigcup\limits_{j \in J} A_j$, элементы u_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам из $\bigcup\limits_{j \in J} A_j$, и n_i — натуральные числа. Тогда выполнено неравенство

$$2 - 2k - l + \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \leqslant \begin{cases} 2\left[\frac{1}{N}\left(\sum\limits_{i=1}^m n_i - \left[\frac{l+1}{2}\right]\right)\right], & \text{если число } \sum\limits_{i=1}^m (n_i - 1) - l \text{ чётно;} \\ 2\left[\frac{1}{N}\left(\sum\limits_{i=1}^m n_i - \left[\frac{l+1-N}{2}\right]_+\right)\right] - 1, & \text{если число } \sum\limits_{i=1}^m (n_i - 1) - l \text{ нечётно,} \end{cases}$$

где $[x]_+ \overset{\text{опр}}{=} \max([x], 0)$, а N — минимальный порядок элемента из $\bigcup\limits_{j \in J} A_j$, входящего в циклически несократимую запись элемента u, сопряжённого всем u_i (в частности, при $N = \infty$ правая часть есть 0 или -1).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в свободном произведении $G = \mathop{*}\limits_{j \in J} A_j$ всего два сомножителя. Действительно, пусть циклически несократимая форма u элементов u_i содержит какой-то слог $a_j \in A_j \setminus \{1\}$ для некоторого $j \in J$. Тогда группа G раскладывается в свободное произведение $G = A * B$, где $A = A_j$ и $B = \mathop{\ast}\limits_{j' \in J\setminus\{j\}} A_{j'}$, а условия теоремы остаются выполненными для этого разложения. Итак, мы считаем, что сомножителей два: $G = A * B$.

Равенство (4) позволяет нарисовать диаграмму Хауи на некоторой ориентированной замкнутой (необязательно связной) поверхности S рода $k' \stackrel{\text{опр}}{=} \frac{1}{2}(2 - \chi(S))$ с l' внешними вершинами и m клетками, метки которых суть $u^{n_1}, \ldots, u^{n_m}$, причём

$$k' \leqslant k \quad \text{и} \quad 2k' + l' \leqslant 2k + l.$$

Аккуратно это объяснено в [IK18]. Мы ограничимся только примерами. Если $k = m = 1$ и $l = 0$, то в большинстве случаев получится обычный тор без внешних вершин (с несколькими внутренними вершинами) и с одной клеткой, метка которой есть $u_1^{n_1}$ (смотрите рисунок 1, например); но если, например, коммутатор c_1 имеет вид $c_1 = [a, v]$, где $a \in A \setminus \{1\}$ и $v \in (A * B) \setminus A$, то получится сфера с двумя внешними вершинами (метки которых суть a и a^{-1}) и одной клеткой, метка которой есть c_1. При $m > 1$ может даже получиться несвязная поверхность (если равенство (4) распадётся в произведение двух равенств такого же типа).

Определим на полученной диаграмме кратное равномерное движение естественным образом: клетку с меткой u^{n_i} объезжают n_i автомобилей со скоростью одно ребро в минуту, в момент времени $s \in \mathbb{Z}$ каждый автомобиль будут находится в углу, метка которого равна s-й букве слова u (если s считать по модулю длины слова u).

Таким образом, столкновений вне вершин (то есть во внутренних точках рёбер) произойти не может, поскольку в каждый момент времени

- либо все автомобили находятся в A-вершинах,
- либо все автомобили находятся в B-вершинах,
- либо каждый автомобиль едет по ребру от A-вершины к B-вершине,
- либо каждый автомобиль едет по ребру от B-вершины к A-вершине.

Полное столкновение в некоторой вершине v означает, что все углы при этой вершине имеют одинаковую метку, равную некоторой букве слова u. Если эта вершина v внутренняя, то произведение этих меток должно быть единицей, то есть $\deg v \geqslant N$. Применив следствие леммы о кластерах к этому движению, мы получим неравенство

$$\Phi(k', l') \stackrel{\text{опр}}{=} 2 - 2k' - l' + \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) \leqslant \Psi(l') \stackrel{\text{опр}}{=} \begin{cases} 2\left[\frac{1}{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i - \left[\frac{l'+1}{2}\right]\right)\right], & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) - l' \in 2\mathbb{Z}; \\ 2\left[\frac{1}{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i - \left[\frac{l'+1-N}{2}\right]_+\right)\right] - 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) - l' \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{5}$$

Правая часть этой оценки удовлетворяет неравенствам

$$\Psi(l+2) \leqslant \Psi(l) \quad \text{и} \quad \Psi(l \pm 1) \leqslant \Psi(l) + 1 \quad \text{при всех } l. \tag{6}$$

Действительно, первое из этих неравенств очевидно, а для объяснения второго неравенства положим $n \stackrel{\text{опр}}{=} \sum n_i$. Тогда, если число $\sum(n_i - 1) - l$ чётно, то

$$\Psi(l \pm 1) \leqslant \Psi(l-1) = 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l-N}{2}\right]_+\right)\right] - 1 \leqslant 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l-N}{2}\right]\right)\right] - 1 \leqslant$$
$$\leqslant 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l+1-2N}{2}\right]\right)\right] - 1 = 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l+1}{2}\right] + N\right)\right] - 1 = 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l+1}{2}\right]\right)\right] + 2 - 1 = \Psi(l) + 1;$$

если же число $\sum(n_i - 1) - l$ нечётно, то $\Psi(l \pm 1) \leqslant \Psi(l-1) = 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l}{2}\right]\right)\right] \leqslant 2\left[\frac{1}{N}\left(n - \left[\frac{l+1-N}{2}\right]_+\right)\right] = \Psi(l) + 1$. Это доказывает оценку (6).

Теперь, если $l' \geqslant l$, то $\Phi(k, l) \leqslant \Phi(k', l')$, поскольку $2k' + l' \leqslant 2k + l$ (как было отмечено выше), а $\Psi(l') \stackrel{(6)}{\leqslant} \Psi(l) + 1$. Следовательно, $\Phi(k, l) \leqslant \Phi(k', l') \leqslant \Psi(l') \stackrel{(6)}{\leqslant} \Psi(l) + 1$ и, стало быть, $\Phi(k, l) \leqslant \Psi(l)$, поскольку числа $\Phi(k, l)$ и $\Psi(l)$ имеют, очевидно, одинаковую чётность. Это и требовалось доказать.

В случае же, когда $l' < l$, заметим, что из (6) вытекает монотонность функции $l \mapsto l + \Psi(l)$. Поэтому утверждение теоремы в этом случае немедленно вытекает из (5) и того, что $k' \leqslant k$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Кл05] Ант. А. Клячко, Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп, Алгебра и логика, 44:4 (2005), 399-437. См. также arXiv:math.GR/0409146.

[Кл06a] Ант. А. Клячко, Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами, Мат. заметки, 79:3 (2006), 409-419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[Кл06b] Ант. А. Клячко, SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением Мат. сборник, 197:10 (2006), 87-108. См. также arXiv:math.GR/0603468.

[Кл07] Ант. А. Клячко, Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением, Алгебра и логика, 46:3 (2007), 290-298. См. также arXiv:math.GR/0510582.

[Cal09] D. Calegari, scl. MSJ Memoirs, 20. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009. xii+209 pp.

[Ch18] L. Chen, Spectral gap of scl in free products, Proc. Amer. Math. Soc., 146:7 (2018), 3143-3151. См. также arXiv:1611.07936.

[Cl03] A. Clifford, Non-amenable type K equations over groups, Glasgow Mathematical Journal 45:2 (2003), 389-400.

[ClG95] A. Clifford and R. Z. Goldstein, Tesselations of S^2 and equations over torsion-free groups, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 38:3 (1995), 485-493.

[ClG01] A. Clifford and R. Z. Goldstein, The group $\langle G, t \mid e\rangle$ when G is torsion free, Journal of Algebra 245:1 (2001), 297-309.

[CoR01] M. M. Cohen and C. Rourke, The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups, Geometry & Topology 5:1 (2001), 127-142. См. также arXiv:math/0009101.

[CCE91] J. A. Comerford, L. P. Comerford Jr. and C. C. Edmunds, Powers as products of commutators, Comm. Algebra, 19:2 (1991), 675-684.

[CER94] L. P. Comerford Jr., C. C. Edmunds and G. Rosenberger, Commutators as powers in free products of groups, Proc. Amer. Math. Soc., 122:1 (1994), 47-52. См. также arXiv:math/9310205.

[Cull81] M. Culler, Using surfaces to solve equations in free groups, Topology, 20:2 (1981), 133-145.

[DH91] A. J. Duncan and J. Howie, The genus problem for one-relator products of locally indicable groups, Mathematische Zeitschrift, 208:1 (1991), 225-237.

[FeR96] R. Fenn and C. Rourke, Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups, L'Enseignement Mathématique 42 (1996), 49-74.

[FoR05a] M. Forester and C. Rourke, Diagrams and the second homotopy group, Communications in Analysis and Geometry 13:4 (2005), 801-820. См. также arXiv:math/0306088.

[FoR05b] M. Forester and C. Rourke, The adjunction problem over torsion-free groups, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 102:36 (2005), 12670-12671. См. также arXiv:math/0412274.

[FK12] E. V. Frenkel and Ant. A. Klyachko, Commutators cannot be proper powers in metric small-cancellation torsion-free groups, arXiv:1210.7908.

[How83] J. Howie, The solution of length three equations over groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 26:1 (1983), 89-96.

[How90] J. Howie, The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. II. Fourth powers, Proc. London Math. Soc., s3-61:1 (1990), 33-62.

[IK00] S. V. Ivanov and Ant. A. Klyachko, Solving equations of length at most six over torsion-free groups, Journal of Group Theory 3:3 (2000), 329-337.

[IK18] S. V. Ivanov and Ant. A. Klyachko, Quasiperiodic and mixed commutator factorizations in free products of groups, Bull. London Math. Soc., 50:5 (2018), 832-844. См. также arXiv:1702.01379.

[Kl93] Ant. A. Klyachko, A funny property of a sphere and equations over groups, Comm. Algebra, 21:7 (1993), 2555-2575.

[Kl97] Ant. A. Klyachko, Asphericity tests, Internat. J. Algebra Comp., 7:4 (1997), 415-431.

[Kl09] Ant. A. Klyachko, The structure of one-relator relative presentations and their centres, Journal of Group Theory, 12:6 (2009), 923–947. См. также arXiv:math.GR/0701308.

[KlL12] Ant. A. Klyachko and D. E. Lurye, Relative hyperbolicity and similar properties of one-generator one-relator relative presentations with powered unimodular relator, J. Pure Appl. Algebra, 216:3 (2012), 524–534. См. также arXiv:1010.4220.

[Le09] Le Thi Giang, The relative hyperbolicity of one-relator relative presentations, Journal of Group Theory, 12:6 (2009), 949–959. См. также arXiv:0807.2487.

[Me06] S. Mertens, The easiest hard problem: number partitioning, Computational Complexity and Statistical Physics, 125:2 (2006), 125-139. См. также arXiv:cond-mat/0310317.

[Sch59] M. P. Schützenberger, Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 248 (1959), 2435-2436.