УДК 512.543.72 + 512.542.7 + 512.543.22 + 512.543.27 MSC: 20F70, 20B30, 20E10

КОНЕЧНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СИЛЬНО ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТЫ

Ольга К. Каримова[♭] Антон А. Клячко[♭♯]

[♭] *Механико-математический факультет Московского государственного университета*

Москва 119991, Ленинские горы, МГУ

[♯] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики*

985481@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su

Посвящается памяти Виталия Анатольевича Романькова

Отвечая на вопрос А. В. Васильева, мы показываем, что каждая конечная симметрическая (или знакопеременная) группа H является ретрактом всякой группы, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой* [MR14], если всякое уравнение вида $w(x, y, \ldots) = h$, где w — это элемент свободной группы $F(x, y, \ldots)$ и $h \in H$, имеющее решение в G, имеет решение в H. Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из H (то есть $\{w_1(x, y, \ldots) = 1, \ldots, w_m(x, y, \ldots) = 1\}$, где $w_i \in H * F(x, y, \ldots)$, а $*$ обозначает свободное произведение), имеющая решение в G, имеет решение в H, то подгруппу H называют *алгебраически замкнутой* в G.

Алгебраическая замкнутость — это более сильное свойство, чем вербальная замкнутость, однако удивительно часто эти свойства оказываются эквивалентными. Первый нетривиальный результат на эту тему был доказан в 2014 году.

Теорема Мясникова–Романькова [MR14]. *Вербально замкнутая подгруппа свободной группы конечного ранга алгебраически замкнута.*

Позже выяснилось, что имеет место значительно более общий факт [KM18]:

свободная вербально замкнутая подгруппа любой группы алгебраически замкнута.

Этот результат делает осмысленным следующее определение: группу H называют *сильно вербально замкнутой* [Mazh18], если она алгебраически замкнута во всякой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. Таким образом, вербальная замкнутость — это свойство подгруппы, а сильная вербальная замкнутость — это свойство абстрактной группы.

Класс сильно вербально замкнутых групп оказался довольно широк. Например, сильно вербально замкнутыми являются

- все абелевы группы [Mazh18],
- все свободные группы [KM18],
  - и даже все почти свободные группы, не содержащие неединичных конечных нормальных подгрупп [KM18], [KMM18] (напомним, что *почти свободная* группа — это группа, содержащая свободную подгруппу конечного индекса),
- все группы, раскладывающиеся в свободное произведение нетривиальным образом [Маж19],
- фундаментальная группа любой связной поверхности, кроме бутылки Клейна [Mazh18], [K21],
  - и даже все ацилиндрически гиперболические группы без нетривиальных конечных нормальных подгрупп [Bog22] (это обобщает несколько из приведённых выше результатов),
- все конечные группы с неабелевым монолитом (в частности, все конечные простые группы) [KMO23],
- все диэдральные группы, порядок которых не делится на восемь [KMO23].

Отметим ещё общую теорему о вложении, полученную в [KMO23]:

всякая группа H вкладывается в сильно вербально замкнутую группу мощности $|H| + \aleph_0$, удовлетворяющую всем тождествам группы H.

Класс всех групп, удовлетворяющих всем тождествам группы H, называют *многообразием, порождённым группой H* и обозначают $\mathbf{var}\, H$ (смотрите [Ней69]). Роль тождеств в этой науке объясняется следующим (простым) замечанием [MR14]:

если группа H является ретрактом всякой конечно порождённой группы $G \in \mathbf{var}\, H$, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы, то H сильно вербально замкнута.

(Напомним, что *ретрактом* группы называют образ эндоморфизма ρ такого, что $\rho \circ \rho = \rho$.) Это достаточное условие сильной вербальной замкнутости кажется очень ограничительным, однако, на самом деле, многие группы обладают даже более сильным свойством: группа H называется *сильным ретрактом* [KMO23], если она является ретрактом любой группы $G \supseteq H$ из многообразия $\mathbf{var}\, H$.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Теорема КМО [KMO23]. *Сильными ретрактами являются*
- *все конечные группы с неабелевым монолитом* (*в частности, все конечные простые группы*)
- *и каждая конечная группа H, содержащая нормальную подгруппу C такую, что C совпадает со своим централизатором, не разлагается в прямое произведение нетривиальных нормальных в H подгрупп и* НОД$(|C|, |H/C|) = 1$.

Напомним, что *монолитом* группы называют пересечение всех её неединичных нормальных подгрупп (а группу с неединичным монолитом называют *монолитической*).

В общем случае, конечно же, сильная ретрактность гораздо сильнее сильной вербальной замкнутости. Например, все абелевы группы сильно вербально замкнуты (как было отмечено выше), но лишь немногие из них являются сильными ретрактами, как показывает следующая теорема.

Теорема о нильпотентных сильных ретрактах [D23]. *Нильпотентная группа является сильным ретрактом тогда и только тогда, когда она абелева и*
- *либо делимая,*
- *либо раскладывается в прямую сумму циклических групп ограниченных в совокупности порядков, любые два неизоморфных слагаемых в которой имеют взаимно простые порядки.*

Эта заметка является ответом на вопрос Андрея Викторовича Васильева: все ли конечные симметрические группы сильно вербально замкнуты? Для большинства таких групп ответ легко вытекает из теоремы КМО. Трудным казался случай симметрической группы степени четыре, но, как выяснилось, из некоторых давно известных (но подзабытых) фактов нетрудно выводится, что и эта группа не является исключением (смотрите следующий параграф).

Основная теорема. *Все конечные симметрические и знакопеременные группы являются сильными ретрактами* (*в частности, они сильно вербально замкнуты*).

Вопрос. *Являются ли бесконечные симметрические* (*финитарные и полные*) *и знакопеременные группы сильно вербально замкнутыми?*

У неискушённого читателя может сложиться впечатление, что чуть ли не все группы сильно вербально замкнуты. Действительно, доказать отсутствие этого свойства бывает не просто. До недавнего времени были известны лишь единичные примеры не сильно вербально замкнутых групп:
- две неабелевы группы порядка восемь [KM18], [PXK17]
- и фундаментальная группа бутылки Клейна $\langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$ [K21].

Жёсткие необходимые условия сильной вербальной замкнутости были получены лишь недавно:

> *центр конечно порождённой сильно вербально замкнутой группы*
> - *выделяется в ней прямым сомножителем, если группа конечна* [KMO23];
> - *чист* (*=сервантен*), *если группа, например, линейна* (и вообще «практически всегда», то есть при некоторых дополнительных предположениях, которые почти всегда выполнены) [DenK23].

Например, не являются сильно вербально замкнутыми
- все конечные нильпотентные неабелевы группы (и даже все конечно порождённые нильпотентные группы с неабелевой периодической частью [D23]);
- все неабелевы группы кос;
- группа $\mathbf{SL}_{2024}(\mathbb{Z})$.

Другие результаты о вербальной замкнутости можно найти, например, в работах [Rom12], [PX13], [Mazh17], [PT20] и [Тим21].

Второй автор благодарит Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Доказательство основной теоремы

Назовём группу H *максимальной монолитической* в классе групп $\mathcal{K} \ni H$, если она не содержится ни в какой бо́льшей группе из $\mathcal{K}$, монолит которой содержит монолит группы H (то есть из включений $H \subseteq G \in \mathcal{K}$ и (монолит группы H) $\subseteq$ (монолит группы G) вытекает равенство $G = H$).

Лемма о монолитических сильных ретрактах. *Конечная монолитическая группа H является сильным ретрактом тогда и только тогда, когда она является максимальной монолитической в классе конечных групп из* $\mathbf{var}\, H$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: ядро ретракции $G \to H$ на собственную подгруппу обязано содержать монолит группы G, поэтому он должен тривиально пересекать H.

Докажем в другую сторону, то есть предположим, что группа H максимальная монолитическая в классе конечных групп из $\mathbf{var}\,H \ni G \supseteq H$. Мы хотим построить ретракцию $G \to H$. Воспользуемся следующим утверждением из параграфа 2 статьи [КМО23]:

> *конечная подгруппа A группы B является ретрактом тогда и только тогда, когда она является ретрактом каждой конечно порождённой подгруппы группы B, содержащей A.*

Таким образом, группу G можно считать конечно порождённой, то есть даже конечной, поскольку многообразие, порождённое конечной группой состоит из локально конечных групп [Ней69]. Выберем в G максимальную нормальную подгруппу N, тривиально пересекающую H (или, что то же самое, не содержащую монолит M группы H). Тогда

- естественный гомоморфизм $\pi: G \to G/N$ будет инъективным на H;
- группа G/N окажется монолитической с монолитом, содержащим $\pi(M)$ (в силу максимальности нормальной подгруппы N);
- значит, $G/N = \pi(H)$ (поскольку $\pi(H) \simeq H$ максимальная монолитическая в классе конечных групп из $\mathbf{var}\,H$);
- тогда композиция $G \xrightarrow{\pi} G/N = \pi(H) \simeq H$ (с подходящим изоморфизмом) окажется искомой ретракцией $G \to H$.

Это завершает доказательство леммы.

Докажем теперь основную теорему. Симметрические группы степени, не превосходящей двух, и знакопеременные группы степени, не превосходящей трёх, являются циклическими и, следовательно, сильными ретрактами по теореме Денисова о нильпотентных сильных ретрактах (смотрите введение).

Симметрические и знакопеременные группы конечной степени $n \geqslant 5$ являются монолитическими с неабелевым монолитом, поэтому они тоже суть сильные ретракты по теореме КМО.

Монолиты симметрической группы S_3 степени три и знакопеременной группы A_4 степени четыре абелевы (это знакопеременная группа A_3 степени три и четверная группа Клейна V_4), и они (S_3 и A_4), так что первое утверждение теоремы КМО неприменимо, зато второе утверждение применимо (в качестве C следует взять монолит).

Единственный оставшийся случай — это симметрическая группа $H = S_4$ степени четыре. Эта группа монолитическая (монолит — это четверная группа Клейна V_4). Классификация монолитических групп из многообразия, порождённого симметрической группой степени четыре, известна [СОР70]:

> *конечные ненильпотентные монолитические группы из многообразия $\mathbf{var}\,S_4$ — это в точности симметрические группы степеней три и четыре и знакопеременная группа степени четыре.* (∗)

Таким образом, S_4 — это максимальная монолитическая группа в классе конечных групп из $\mathbf{var}\,S_4$. Применение леммы о монолитических сильных ретрактах завершает доказательство.

Некоторые пояснения по поводу факта (∗). В [COP70] доказан более общий результат.

Лемма ([COP70], лемма 4.3.1 = *"an important lemma"*). *Если конечная ненильпотентная монолитическая группа $G \in \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$, силовская 2-подгруппа которой лежит в $\mathfrak{D}$, удовлетворяет тождеству $\left[[x,y]^3, y^3, y^2\right] = 1$, то G изоморфна S_4, A_4 или S_3.*

Здесь $\mathfrak{A}_n$ — это многообразие абелевых групп экспоненты n, а $\mathfrak{D}$ — это многообразие, порождённое диэдральной группой порядка восемь (оно же порождается группой кватернионов, и оно же задаётся тождествами $x^4 = 1$ и $[x^2, y] = 1$).

- Многообразие, порождённое группой S_4, конечно же, содержится в произведении многообразий $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{A}_2$, поскольку сама группа S_4 там содержится: факторы субнормального ряда $\{1\} \triangleleft V_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$ являются абелевыми группами экспонент два, три и два.
- Симметрическая группа S_4 (и, следовательно, всякая группа из $\mathbf{var}\,S_4$), разумеется, удовлетворяет тождеству $\left[[x,y]^3, y^3, y^2\right] = 1$, что легко проверить (на самом деле, в [COP70] выписан в явном виде базис тождеств группы S_4).
- Чуть более тонкий факт состоит в том, что силовская 2-подгруппа всякой конечной группы из $\mathbf{var}\,S_4$ лежит в $\mathfrak{D}$. Это можно объяснить так:
  - в S_4 выполняются тождества $x^{12} = 1$ и $\left((x^3y^3)^4[x^3, y^6]^3\right)^3 = 1$ (это можно проверить непосредственно или сослаться на теорему 3.1(A) из [COP70]);
  - следовательно, во всякой группе из $\mathbf{var}\,S_4$ эти тождества тоже выполнены;
  - стало быть, в силовской 2-подгруппе P всякой конечной группы из $\mathbf{var}\,S_4$ выполняются тождества $x^4 = 1$ и $\left((xy)^4[x, y^2]^3\right)^3 = 1$ (поскольку всякий элемент 2-группы является кубом);
  - значит, в P выполняются тождества $x^4 = 1$ и $\left([x, y^2]^3\right)^3 = 1$ (упростили второе тождество, воспользовавшись первым);

– то есть P удовлетворяет тождествам $x^4 = 1$ и $[x, y^2] = 1$ (так как в 2-группе возведение в куб является биекцией), и $P \in \mathfrak{D}$ (по определению многообразия $\mathfrak{D}$).

Мы убедились, что факт $(*)$ действительно является частным случаем «важной леммы» из [COP70].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[KM18] А. А. Клячко, А. М. Мажуга, Вербально замкнутые почти свободные подгруппы, Мат. сборник, 209:6 (2018), 75-82. См. также arXiv:1702.07761.

[Маж19] А. М. Мажуга, Свободные произведения групп сильно вербально замкнуты, Мат. сборник, 210:10 (2019), 122-160. См. также arXiv:1803.10634.

[Ней69] Х. Нейман, Многообразия групп, Мир, М., 1969.

[PT20] В. А. Романьков, Е. И. Тимошенко, О вербально замкнутых подгруппах свободных разрешимых групп, Алгебра и логика, 59:3 (2020), 367-384. См. также arXiv:1906.11689.

[PX13] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, Алгебра и логика, 52:4 (2013), 502-525.

[PXK17] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, А. А. Конырханова, Алгебраически и вербально замкнутые подгруппы и ретракты конечно порожденных нильпотентных групп, Сиб. матем. журн., 58:3 (2017), 686-699.

[Тим21] Е. И. Тимошенко, Ретракты и вербально замкнутые подгруппы относительно свободных разрешимых групп, Сиб. матем. журн., 62:3 (2021), 659-667.

[Bog22] O. Bogopolski, Equations in acylindrically hyperbolic groups and verbal closedness, Groups, Geometry, and Dynamics, 16:2 (2022), 613-682. См. также arXiv:1805.08071.

[COP70] J. Cossey, S. Oates MacDonald, and A. Penfold Street, On the laws of certain finite groups, Journal of the Australian Mathematical Society, 11:4 (1970), 441-489.

[D23] F. D. Denissov, Finite normal subgroups of strongly verbally closed groups, Journal of Group Theory (в печати). `https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0015` . См. также arXiv:2301.02752.

[DenK23] F. D. Denissov, A. A. Klyachko The centre of a finitely generated strongly verbally closed group is almost always pure, arXiv:2308.06837.

[K21] A. A. Klyachko, The Klein bottle group is not strongly verbally closed, though awfully close to being so, Canadian Mathematical Bulletin, 64:2 (2021), 491-497. См. также arXiv:2006.15523.

[KMM18] A. A. Klyachko, A. M. Mazhuga, V. Yu. Miroshnichenko, Virtually free finite-normal-subgroup-free groups are strongly verbally closed, J. Algebra, 510 (2018), 319-330. См. также arXiv:1712.03406.

[KMO23] A. A. Klyachko, V. Yu. Miroshnichenko, A. Yu. Olshanskii, Finite and nilpotent strongly verbally closed groups, Journal of Algebra and Its Applications 22:09 (2023), 2350188. См. также arXiv:2109.12397.

[Mazh17] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, J. Group Theory, 20:5 (2017), 971-986. См. также arXiv:1605.01766.

[Mazh18] A. M. Mazhuga, Strongly verbally closed groups, J. Algebra, 493 (2018), 171-184. См. также arXiv:1707.02464.

[MR14] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, J. Group Theory, 17:1 (2014), 29-40. См. также arXiv:1201.0497.

[Rom12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, Groups - Complexity - Cryptology, 4:2 (2012), 191-239.