

ГИПОТЕЗА КЕРВЕРА–ЛАУДЕНБАХА И КОПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ГРУПП

Антон А. Клячко
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 Москва 119992, Ленинские горы, МГУ
 klyachko@mech.math.msu.su

Утверждение о том, что из непростой группы нельзя получить неабелеву простую группу путём добавления одного образующего и одного определяющего соотношения,

- 1) эквивалентно гипотезе Кервера–Лауденбаха;
- 2) становится верным при дополнительном предположении, что исходная непростая группа либо конечна, либо, напротив того, не имеет кручения.

Ключевые слова: гипотеза Кервера–Лауденбаха, относительные копредставления, простые группы, движение автомобилей, кодвигание коавтомобилей.

1. Соглашения

$G = \langle X \mid R \rangle$ — произвольная (если не оговорено противное) группа, $\tilde{G} = \langle G, t \mid w = 1 \rangle \stackrel{\text{онп}}{=} \langle X \cup \{t\} \mid R \cup \{w\} \rangle$ — группа, полученная из группы G добавлением одного образующего и одного (произвольного) соотношения.

Под простой группой в этой статье понимается неабелева простая группа.

2. Введение

Напомним одну старую хорошо известную недоказанную теоретико-групповую гипотезу, имеющую топологическое происхождение.

Гипотеза Кервера–Лауденбаха (КЛ) (см., например, [ЛШ80], [МКС74]). *Если группа G нетривиальна, то и группа \tilde{G} нетривиальна.*

Мы позволим себе высказать другую похожую гипотезу.

«Простая» гипотеза Кервера–Лауденбаха (КЛп). *Если группа G не проста, то и группа \tilde{G} не проста.*

Сходство между этими вопросами не только внешнее.

Утверждение 1. *Гипотеза КЛ эквивалентна гипотезе КЛп.*

Наиболее известным результатом в направлении доказательства гипотезы **КЛ** является следующая замечательная теорема.

Теорема Герстенхабера–Ротхауза [GR62]. *Если группа G конечна и нетривиальна, то и группа \tilde{G} нетривиальна.***

Из этого результата нетрудно вывести аналогичную «простую» теорему.

Теорема 1. *Если группа G конечна и не проста, то и группа \tilde{G} не проста.*

Возьмём другой результат, частично подтверждающий гипотезу **КЛ**.

Теорема [K93]. *Если группа G без кручения и нетривиальна, то и группа \tilde{G} нетривиальна.*

Аналогичная «простая» теорема имеет вид.

Теорема 2. *Если группа G без кручения и не проста, то и группа \tilde{G} не проста.*

Теорема 1 и утверждение 1 доказываются очень просто. Основным содержанием этой статьи является доказательство теоремы 2. На самом деле, мы установим более сильный факт.

Основная теорема. *Если группа G не имеет кручения, то группа \tilde{G} проста тогда и только тогда, когда группа G проста и слово w сопряжено в свободном произведении $G * \langle t \rangle_\infty$ со словом вида $t^{\pm 1}g$, где $g \in G$.*

Можно ли аналогичным образом усилить теорему 1, нам неизвестно.

Отметим, что из основной теоремы и того хорошо известного факта, что всякая группа без кручения вкладывается в простую группу без кручения, немедленно вытекает следующий результат Коэна и Рурка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №02-01-00170.

** На самом деле теорема Герстенхабера–Ротхауза утверждает нечто большее, мы сформулировали лишь важнейший частный случай (см. [ЛШ80]).

Теорема [CR01]. Если группа G не имеет кручения, то естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ сюръективно тогда и только тогда, когда слово w сопряжено в свободном произведении $G * \langle t \rangle_\infty$ со словом вида $t^{\pm 1}g$, где $g \in G$.

Наше доказательство основной теоремы почти сразу распадается, в зависимости от слова w , на два случая — лёгкий и трудный. Забавно, что трудный случай в точности соответствует словам сложности 1 (в смысле Форестера и Рурка [FoR03]), со словами большей сложности дело обстоит гораздо проще.

Помимо прочего, статья содержит полное и замкнутое изложение метода кодвижений, который мы применяем для доказательства основной теоремы в трудном случае, тогда как в лёгком случае наши геометрические рассуждения сводятся к простому использованию леммы о движениях из [K93].

3. Доказательство утверждения 1 и теоремы 1

Пусть циклически несократимая форма слова w имеет вид

$$w \equiv g_1 t^{\varepsilon_1} \dots g_n t^{\varepsilon_n}, \quad \text{где } \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, g_i \in G.$$

(Эти обозначения мы считаем фиксированными до конца статьи.)

Следующая переформулировка гипотезы Кервера–Лауденбаха хорошо известна.

Утверждение 2 (фольклор). Гипотеза **КЛ** эквивалентна следующей гипотезе **КЛ'**.

Гипотеза КЛ'. Если $\sum \varepsilon_i = \pm 1$, то естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ инъективно.

Доказательство. Предположим, что гипотеза **КЛ'** верна, и докажем **КЛ**. Если $G \neq \{1\}$ и $\sum \varepsilon_i = \pm 1$, то группа \tilde{G} нетривиальна, так как содержит нетривиальную подгруппу, изоморфную группе G . Если же $\sum \varepsilon_i \neq \pm 1$, то группа \tilde{G} нетривиальна, так как допускает эпиморфизм на нетривиальную группу $\mathbb{Z}/(\sum \varepsilon_i)\mathbb{Z}$.

Предположим теперь, что гипотеза **КЛ'** неверна, и опровергнем **КЛ**. Пусть $\sum \varepsilon_i = \pm 1$ и $N \neq \{1\}$ есть ядро естественного отображения $G \rightarrow \tilde{G}$. Хорошо известно, что любая группа G вкладывается в некоторую простую группу H (см., например, [ЛШ74]). Тогда группа $\tilde{H} \stackrel{\text{оп}}{=} \langle H, t \mid w = 1 \rangle$ очевидным образом тривиальна:

$$\tilde{H} \simeq \tilde{H} / \langle\langle N \rangle\rangle \simeq \tilde{H} / \langle\langle H \rangle\rangle \simeq \mathbb{Z} / (\sum \varepsilon_i)\mathbb{Z} \simeq \{1\}.$$

Здесь и далее $\langle\langle X \rangle\rangle$ обозначает нормальную подгруппу, порождённую множеством X . Утверждение 2 доказано.

Доказательство утверждения 1. Предположим, что **КЛ** неверна, то есть для некоторой нетривиальной группы G группа \tilde{G} тривиальна. Пусть S — некоторая простая группа. Тогда группа $G \times S$ не проста, но группа $\langle G \times S, t \mid w = 1 \rangle \simeq S$ проста. Таким образом гипотеза **КЛп** также неверна.

Предположим теперь, что **КЛп** неверна, то есть для некоторой непростой группы G группа \tilde{G} проста. Заметим прежде всего, что группа G неабелева и $\sum \varepsilon_i = \pm 1$, так как иначе группа G не совпадала бы со своим коммутантом (или была бы тривиальной) и, следовательно, не была бы простой. Если естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ не инъективно, то **КЛ** неверна в силу утверждения 2. Допустим, что естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ инъективно. Пусть N — некоторая собственная нетривиальная нормальная подгруппа группы G . Тогда группа $\tilde{G} / \langle\langle N \rangle\rangle$, с одной стороны, тривиальна (так как \tilde{G} проста, а $N \neq \{1\}$ в \tilde{G} в силу инъективности отображения $G \rightarrow \tilde{G}$), а с другой стороны, изоморфна группе $\langle G/N, t \mid w' = 1 \rangle$, где w' получается из w приведением по модулю N . Таким образом, гипотеза **КЛ** также неверна. Утверждение 1 доказано.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 выводится из теоремы Герстенхабера–Ротхауза дословно так же, как гипотеза **КЛп** выводится из **КЛ**; надо только помнить, что факторгруппа конечной группы конечна и всякая конечная группа вкладывается в простую конечную группу (например, в знакопеременную).

Заметим, что доказать так же просто теорему 2 не удаётся по той причине, что класс групп без кручения, в отличие от класса конечных групп, не замкнут относительно перехода к факторгруппам. Вся оставшаяся часть статьи представляет собой доказательство теоремы 2 (точнее, основной теоремы).

4. Алгебраические леммы

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, x и y — элементы некоторой группы, а φ — гомоморфизм из этой группы в какую-нибудь другую группу, то x^y , x^{ky} , x^{-y} , x^φ , $x^{k\varphi}$ и $x^{-\varphi}$ обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$, $y^{-1}x^{-1}y$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^k)$ и $\varphi(x^{-1})$ соответственно.

Лемма 1. Пусть A и B — группы без кручения, $u \in (A * B) \setminus A$. Тогда $\langle A, u \rangle = A * \langle u \rangle_\infty$. Если при этом группа A нетривиальная, а B нециклическая, то найдётся такое слово $v \in A * B$, что $\langle A, u, v \rangle = A * \langle u \rangle_\infty * \langle v \rangle_\infty$.

Доказательство. Ясно, что можно считать, что слово u в несократимой записи начинается и кончается на буквы из B .

Для таких u первое утверждение леммы очевидно, докажем второе утверждение. Если $u \in B$, то в качестве v можно взять слово $v = a^b$, где b — произвольный элемент группы B , не лежащий в циклической подгруппе, порождённой элементом u , а a — произвольный неединичный элемент группы A . Если же $u \notin B$, $u = b_1 a_1 \dots b_k$, то в качестве v можно взять слово $v = a^b$, где $b \in B \setminus \{b_1^{\pm 1}, b_k^{\pm 1}\}$, а $a \in A \setminus \{1\}$. Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой одну из возможных формулировок алгебраического трюка из [K93], который часто используется для исследования уравнений над группами и смежных вопросов (см. [KP95], [CG95], [CG00], [CR01], [FeR96], [FeR98], [FoR03]). Геометрическую интерпретацию этого приёма можно найти в [FoR03].

Лемма 2. Предположим, что группа G не имеет кручения,

$$\sum \varepsilon_i = 1 \quad \text{и} \quad n > 1. \quad (1)$$

Тогда группа \tilde{G} обладает (относительным) копредставлением вида

$$\tilde{G} \simeq \left\langle H, t \mid \{p^t = p^\varphi, p \in P \setminus \{1\}\}, ct \prod_{i=0}^m (b_i a_i^t) = 1 \right\rangle, \quad (2)$$

где $a_i, b_i, c \in H$, P и P^φ — изоморфные подгруппы группы H , $\varphi: P \rightarrow P^\varphi$ — изоморфизм между ними. При этом

- 1) $m \geq 0$ (то есть произведение в формуле (2) не пусто);
- 2) $a_i \notin P$, а $b_i \notin P^\varphi$;
- 3) $\langle P, a_i \rangle = P * \langle a_i \rangle_\infty$ и $\langle P^\varphi, b_i \rangle = P^\varphi * \langle b_i \rangle_\infty$ в H ;
- 4) если группа G нециклическая и $P \neq \{1\}$, то для каждого i найдутся такие элементы $a'_i, b'_i \in H$, что $\langle P, a_i, a'_i \rangle = P * \langle a_i \rangle_\infty * \langle a'_i \rangle_\infty$ и $\langle P^\varphi, b_i, b'_i \rangle = P * \langle b_i \rangle_\infty * \langle b'_i \rangle_\infty$ в H ;
- 5) группы H , P и P^φ являются свободным произведением конечного числа изоморфных копий группы G : $H = G^{(0)} * \dots * G^{(s)}$, $P = G^{(0)} * \dots * G^{(s-1)}$, $P^\varphi = G^{(1)} * \dots * G^{(s)}$, где $s \geq 0$ (при $s = 0$ группы P и P^φ тривиальны), а изоморфизм φ представляет собой сдвиг: $(G^{(i)})^\varphi = G^{(i+1)}$.

Доказательство. Сначала покажем, что у группы \tilde{G} имеется по крайней мере одно копредставление вида (2), удовлетворяющее условию 5). Поскольку $\sum \varepsilon_i = 1$, слово w можно записать в виде

$$w = \left(\prod g_i^{t^{k_i}} \right) t.$$

Сопрягая, если надо, w при помощи t , мы можем считать, что $k_i \geq 0$. Полагая $g^{(i)} = g^{t^i}$ для $g \in G$, $G^{(i)} = G^{t^i}$, $s = \max k_i$ и $c = \prod g_i^{(k_i)}$. Мы видим, что \tilde{G} обладает копредставлением

$$\tilde{G} \simeq \left\langle G^{(0)} * \dots * G^{(s)}, t \mid \left\{ \left(g^{(i)} \right)^t = g^{(i+1)}, i = 0, \dots, s-1, g \in G \right\}, ct = 1 \right\rangle,$$

то есть копредставлением вида (2) (с $m = -1$), удовлетворяющим условию 5).

Теперь из всех копредставлений вида (2) группы \tilde{G} , удовлетворяющих условию 5), выберем те, в которых s минимально, а из всех копредставлений с минимальным s выберем то, в котором m минимально. Полученное копредставление (2) будет искомым.

Действительно, если $m < 0$ (то есть $w = ct$, где $c \in H$), то $s = 0$, так как в противном случае мы могли бы уменьшить s , заменив в слове c все вхождения $g^{(s)}$ на $(g^{(s-1)})^t$. Но условия $m < 0$ и $s = 0$ означают, что исходное слово w имеет вид $w = ct$, $c \in G$, что противоречит тому, что $n > 1$. Таким образом условие 1) выполнено.

Условие 2) выполнено, поскольку в противном случае мы могли бы в копредставлении (2) заменить подслово $t^{-1} a_i t$, где $a_i \in P$ (или подслово $t b_i t^{-1}$, где $b_i \in P^\varphi$), на a_i^φ (соответственно, на $b_i^{\varphi^{-1}}$), уменьшив тем самым m (не увеличив при этом s).

Условия 3) и 4) следуют из условий 2) и 5) в силу леммы 1. Лемма 2 доказана.

5. Карты и движения

Под поверхностью в этой статье мы всегда понимаем замкнутую двумерную ориентированную поверхность.

Картой M на поверхности S называется конечный набор непрерывных отображений $\{\mu_i: D_i \rightarrow S\}$, где D_i — двумерный замкнутый ориентированный диск (круг), называемый i -й *гранью* или *клеткой* карты, на границе которого отмечено некоторое конечное непустое множество точек $c_{ij} \in \partial D_i$, называемых *углами* карты. Интервалы e_{ij} , на которые углы делят границу грани, мы называем *прорёбрами* карты. Образы углов $\mu_i(c_{ij})$ и прорёбер $\mu_i(e_{ij})$ называют *вершинами* и *рёбрами* карты соответственно. При этом предполагается, что

- 1) ограничения отображения μ_i на внутренность грани D_i является гомеоморфным вложением, сохраняющим ориентацию; ограничение μ_i на каждое прорёбро является гомеоморфным вложением;
- 2) различные рёбра не пересекаются;
- 3) образы внутренностей разных граней не пересекаются;
- 4) $\bigcup \mu_i(D_i) = S$.

Карту M мы будем также иногда трактовать как непрерывное отображение $M: \coprod D_i \rightarrow S$ из дискретного объединения дисков в поверхность.

Объединение всех вершин и рёбер карты представляет собой граф на поверхности, называемый *одномерным остовом*. *Кратностью* точки одномерного остова мы называем число инцидентных ей рёбер, если эта точка является вершиной; если же эта точка лежит на ребре, то её кратность считается равной двум. Другими словами, кратность точки p равна $\left| M^{-1}(p) \right|$.

Мы говорим, что угол c является углом при вершине v , если $M(c) = v$. На множестве всех углов при вершине v имеется естественный циклический порядок; мы называем два угла при вершине v *смежными*, если они являются соседними относительно этого порядка.

Допуская некоторую вольность речи, мы говорим, что точка или подмножество поверхности содержится в грани D_i , если она (оно) лежит в образе μ_i . Аналогично, мы говорим, что грань D_i содержится в некотором подмножестве $X \subseteq S$ поверхности S , если $M(D_i) \subseteq X$.

На рисунке 1 представлена карта на сфере с пятью гранями: A, B, C, D и E , восемнадцатью углами: a_i, b_i, c_i, d_i и e_i , шестью вершинами, девятью рёбрами и восемнадцатью прорёбрами. Заметим, что число углов всегда равно числу прорёбер и вдвое больше числа рёбер, а величина

$$e(S) \stackrel{\text{опр}}{=} (\text{число вершин}) - (\text{число рёбер}) + (\text{число граней})$$

не зависит от выбора карты на поверхности S и называется *эйлеровой характеристикой* этой поверхности. Эйлерова характеристика сферы (единственной поверхности, которая нас на самом деле интересует в этой статье) равна двум.

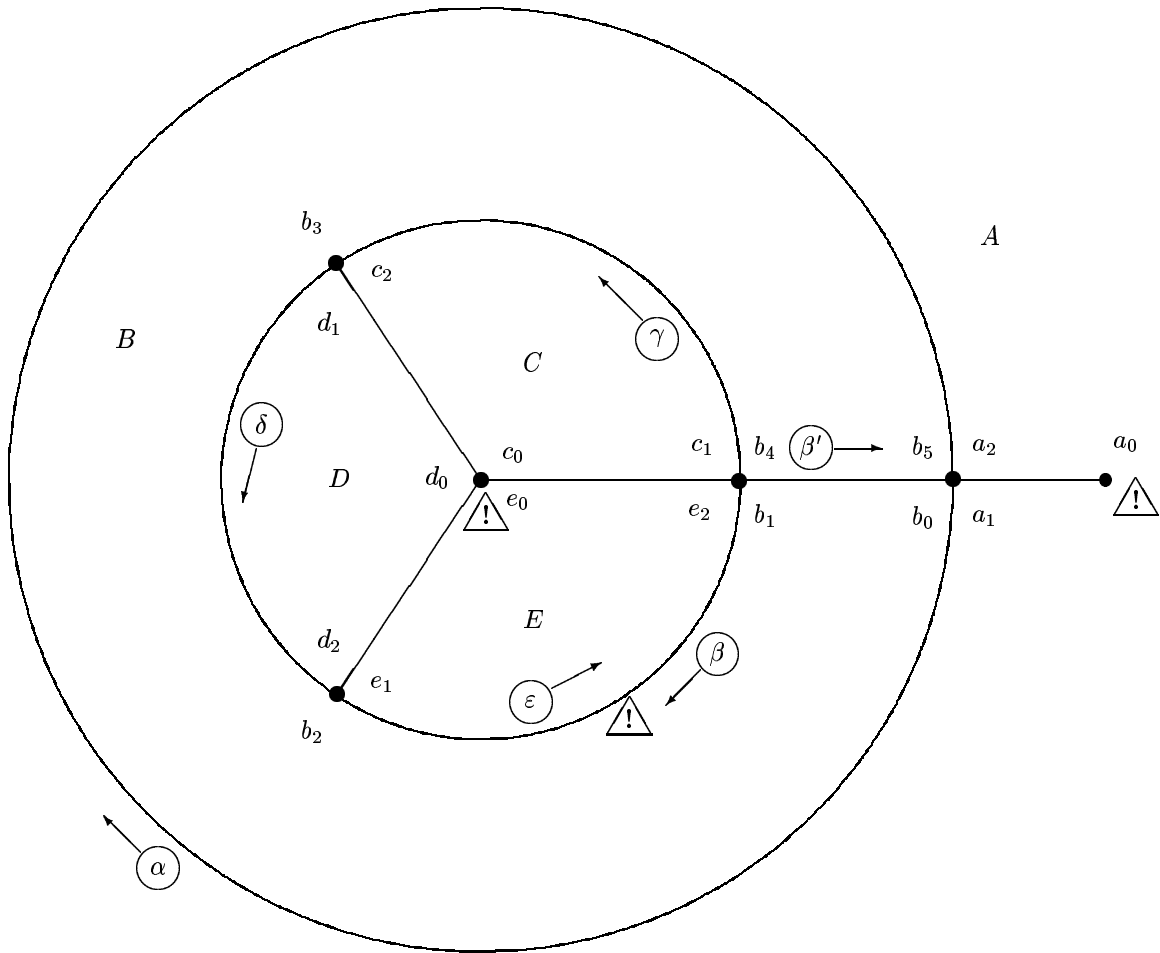


Рис. 1

Движением на ориентированной поверхности S называется карта $M: \coprod D_i \rightarrow S$ на этой поверхности и набор непрерывных отображений $\alpha_i: \mathbb{R} \rightarrow \partial D_i$. Отображение α_i мы называем *автомобилем*, объезжающим грань D_i . Мы говорим, что автомобиль α_i находится в углу $c \in \partial D_i$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$ если $\alpha_i(t) = c$, кроме того, мы говорим, что в момент времени $t \in \mathbb{R}$ автомобиль α_i находится в точке $p \in S$, если $\mu_i(\alpha_i(t)) = p$. Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени t в точке p одномерного остова поверхности, S равно кратности этой точки (иными словами $\bigcup \alpha_i(t) \supseteq M^{-1}(p)$), то мы говорим, что в точке p в момент t происходит *полное столкновение*. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. Точки полного столкновения, лежащие на рёбрах, мы называем просто *точками столкновения*.

Движение называется *правильным*, если отображения α_i являются накрытиями, сохраняющими ориентацию. Говоря по-простому, при правильном движении автомобиль объезжает границу своей грани против часовой стрелки (внутренность грани остаётся слева от автомобиля) и при этом едет без разворотов, без остановок, и без «бесконечных замедлений и ускорений».

Пример 1. На карте, изображённой на рисунке 1, можно определить правильное движение так: автомобили α , β , γ , δ и ε , объезжающие грани A , B , C , D и E соответственно, движутся с единичной скоростью (одно ребро в единицу времени) в положительном направлении, находясь в нулевой момент времени в углах a_0 , b_0 , c_0 , d_0 и e_0 соответственно (в углы с номером i автомобили при этом попадают в момент $t = i$). На рисунке 1 показано положение автомобилей и направление их движения в момент времени $t = 4/3$ (на автомобиль β' пока не нужно обращать внимание). При таком режиме движения имеется 3 точки полного столкновения, они помечены восклицательными знаками на рисунке 1: в моменты времени кратные трём происходит полное столкновение автомобилей γ , δ и ε ; в моменты времени $t \in 3/2 + 6\mathbb{Z}$ происходит столкновение на ребре автомобилей β и ε ; кроме того, в моменты времени кратные трём автомобиль α заезжает в тупик, что, согласно нашему определению, также является полным столкновением. Можно добиться того, что точек полного столкновения останется две, изменив расписание движения на этой карте (например, заставив автомобиль ε ехать со скоростью 2 на рёбрах

$[e_0, e_1]$ и $[e_1, e_2]$ и со скоростью $1/2$ на ребре $[e_2, e_0]$). Дальнейшая оптимизация расписания невозможна, как показывает следующее утверждение.

Лемма 3 [K93] (см. также [FeR96]). *При любом правильном движении на сфере по крайней мере в двух точках происходит полное столкновение.*

Так же как в [K93] (или в [FeR96]), нам будет удобно рассматривать движения чуть более общие, чем правильные.

Мы называем непрерывное отображение $\alpha: X \rightarrow Y$ ориентированной прямой или окружности X в ориентированную окружность Y (локально) *неубывающим*, если прообраз всякого интервала $U \subset Y$ есть объединение интервалов, ограничение α на каждый из которых является неубывающей функцией (в обычном смысле, как отображение одного ориентированного интервала в другой). Назовём отображение $\alpha: X \rightarrow Y$ прямой в окружность *собственным*, если образ всякого луча $U \subset X$ есть вся окружность Y .

Прообраз точки при собственном неубывающем отображении прямой в окружность является дискретным объединением точек и отрезков. Точку $y \in Y$, прообраз которой не дискретен, будем называть *точкой остановки* отображения.

Движение на поверхности S называется *движением с разделёнными остановками*, если каждый автомобиль является собственной неубывающей функцией, каждая точка остановки которой является углом (то есть, говоря по-простому, каждый автомобиль едет без разворотов и бесконечных замедлений и ускорений, объезжая границу своей грани против часовой стрелки, возможно, останавливаясь на конечное время в некоторых углах). При этом можно выделить такое множество углов, называемых *остановочными углами*, что

- 1) автомобили останавливаются только в остановочных углах (возможно, не во всех остановочных углах автомобили действительно останавливаются);
- 2) в каждой вершине v , при которой имеется хотя бы один остановочный угол, остановки разделены в следующем смысле: пусть c_1, \dots, c_k — это все остановочные углы при вершине v , занумерованные против часовой стрелки. Требуется, чтобы для каждого i в углах c_i и c_{i+1} (индексы по модулю k) автомобили никогда не находились одновременно. (В частности, это условие означает, что $k \geq 2$.)

Лемма 4 [K93] (см. также [FeR96]). *При любом движении с разделёнными остановками на сфере по крайней мере в двух точках происходит полное столкновение.*

Доказательство. Во-первых, ясно, что движение автомобиля, проезжающего через остановочный угол, можно немного изменить в маленькой окрестности этого угла так, чтобы он действительно останавливался в этом углу, при этом не добавив новых точек полного столкновения и оставив выполненным условие разделённости остановок.

Предполагая теперь, что каждый раз, проезжая остановочный угол, автомобиль действительно останавливается, сделаем следующее преобразование карты, которое мы называем *раздутием остановочных углов* (см. рис. 2): возьмём вершину v , при которой имеется $k \geq 2$ остановочных углов c_1, \dots, c_k ; сделаем надрез поверхности вдоль небольшой дуги, ведущей из вершины v «внутрь» угла c_i ; края этого надреза назовём x_i (левый край, если смотреть от вершины v) и y_i (правый край, если смотреть от вершины v); когда мы сделаем эти разрезы для всех $i = 1, \dots, k$, на поверхности возникнет дыра с границей, состоящей из последовательных участков $y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_k, x_k$; заклеим эту дыру, склеив каждый из участков x_i с y_{i+1} (индексы по модулю k); получится новая карта M' на той же поверхности, которая отличается от старой наличием дополнительных прорёбер x_i и y_i в том месте границы грани, где был остановочный угол c_i , и дополнительных рёбер $M'(x_i) = M'(y_{i+1})$.

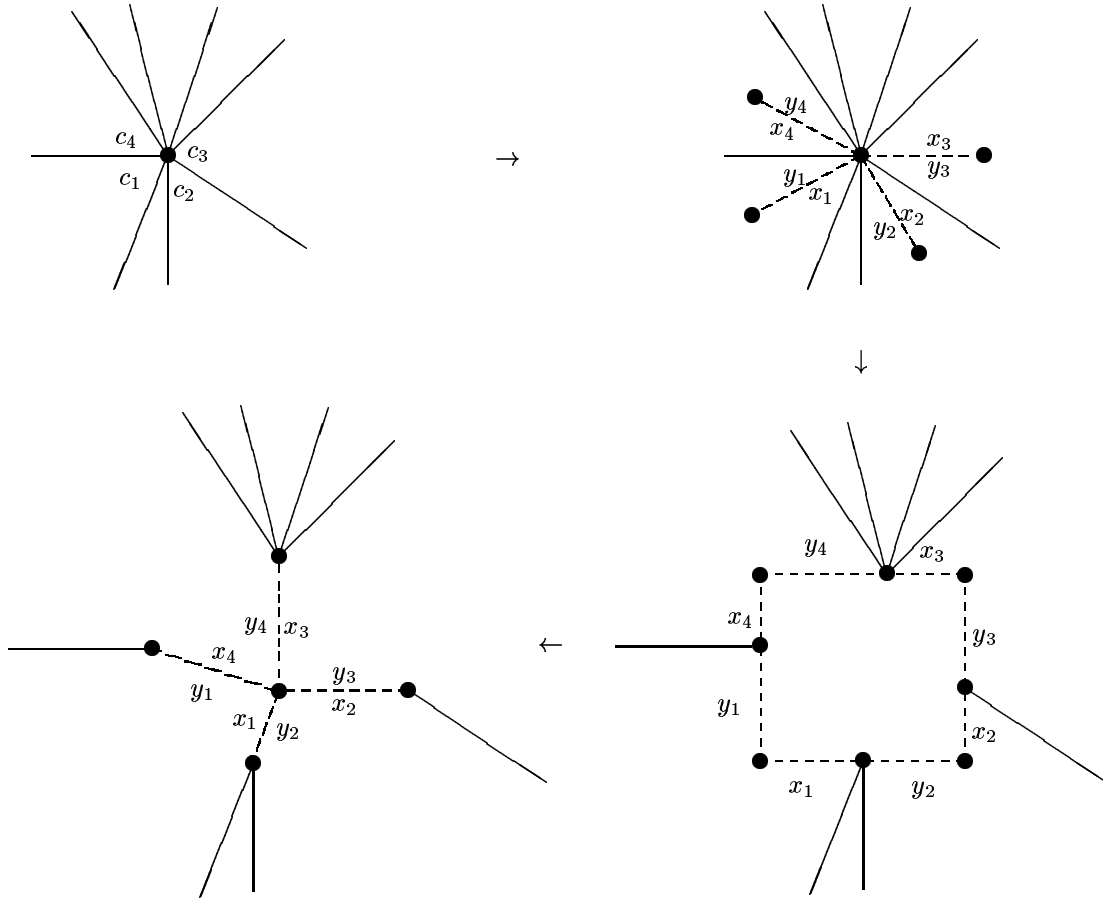


Рис. 2

Сделав описанное выше преобразование для каждой вершины v , при которой имеются остановочные углы, определим правильное движение на получившейся карте так: автомобили едут так же, как на исходной карте, но в то время, когда автомобиль на исходной карте стоит в остановочном углу c_i , соответствующий автомобиль на новой карте равномерно движется по возникшему на месте этого угла отрезку $x_i \cup y_i$. Из условия разделённости остановок следует, что при этом правильном движении на новой карте полные столкновения не могут происходить на дополнительных рёбрах и в их концах. Для завершения доказательства остаётся сослаться на лемму 3.

Отметим, что условие разделённости остановок означает, в частности, что полное столкновение не может произойти в вершине, при которой имеется хотя бы один остановочный угол.

6. Диаграммы Хауи

Пусть имеется карта M на поверхности S , углы которой помечены элементами некоторой группы H , а рёбра ориентированы (на рисунках на них имеются стрелки) и помечены элементами некоторого множества $\{t_1, t_2, \dots\}$, не пересекающегося с группой H . Метку угла или ребра x будем обозначать $\lambda(x)$.

Метка вершины v в такой ситуации определяется формулой

$$\lambda(v) = \prod_{i=1}^k \lambda(c_i),$$

где c_1, \dots, c_k — это все углы при вершине v , перечисленные по часовой стрелке. Метка вершины является элементом группы H , определённым с точностью до сопряжённости.

Метка грани D определяется формулой

$$\lambda(D) = \prod_{i=1}^k (\lambda(M(e_i)))^{\varepsilon_i} \lambda(c_i),$$

где e_1, \dots, e_k и c_1, \dots, c_k — это все прорёбра и все углы грани D , перечисленные против часовой стрелки, причём концами прорёбра e_i являются углы c_{i-1} и c_i (индексы по модулю k), а $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того,

сохраняет или обращает ориентацию гомеоморфизм $e_i \xrightarrow{M} M(e_i)$. Говоря по-простому, чтобы получить метку грани, надо обойти её границу против часовой стрелки, выписывая метки всех встречающихся углов и рёбер, причём метку ребра надо записывать в минус первой степени, если мы его проходим против стрелки.

Метка грани является элементом группы $H * F(t_1, t_2, \dots)$ (свободного произведения H и свободной группы с базисом $\{t_1, t_2, \dots\}$), определённым с точностью до циклической перестановки. Более точно, правую часть нашей формулы для $\lambda(D)$ мы называем *меткой грани D , написанной начиная с прорёбра e_1* .

Размеченную таким образом карту мы называем *диаграммой Хауи* (или просто *диаграммой*) над относительным копредставлением

$$\langle H, t_1, t_2, \dots \mid w_1 = 1, w_2 = 1, \dots \rangle, \quad (*)$$

если

- 1) некоторые вершины и некоторые грани выделены и называются *внешними*, остальные вершины и грани называются *внутренними*;
- 2) метка каждой внутренней грани является циклической перестановкой одного из слов $w_i^{\pm 1}$;
- 3) метка каждой внутренней вершины равна единице в группе H .

Диаграмма Хауи называется *приведённой*, если она не содержит такого ребра e , что две грани, его содержащие, являются внутренними, эти грани различны, а их метки, написанные начиная с M -прообразов ребра e , взаимнообратны; такая пара клеток с общим ребром называется *сократимой парой*.

Следующая лемма является аналогом леммы ван Кампена для относительных копредставлений.

Лемма 5 [Н83]. *Естественное отображение группы H в группу, заданную относительным копредставлением $(*)$, не является инъективным тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этим копредставлением с единственной внешней вершиной и без внешних граней, причём метка внешней вершины не равна единице в группе H . Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм является приведённой. Если это естественное отображение инъективно, то имеет место эквивалентность: образ элемента $u \in H * F(t_1, t_2, \dots) \setminus \{1\}$ равен единице в группе $(*)$ тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этим копредставлением без внешних вершин и с единственной внешней гранью, метка которой равна u . Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм также является приведённой.*

Диаграммы на сфере с единственной внешней гранью и без внешних вершин называют также *дисковыми диаграммами*, границу внешней грани такой диаграммы называют *контуром* диаграммы.

Пусть $\varphi: P \rightarrow P^\varphi$ — изоморфизм между двумя подгруппами группы H . Относительное копредставление вида

$$\langle H, t \mid \{p^t = p^\varphi; p \in P \setminus \{1\}\}, w_1 = 1, w_2 = 1, \dots \rangle \quad (**)$$

назовём φ -копредставлением. Диаграмму над φ -копредставлением $(**)$ назовём φ -приведённой если она приведена и различные внутренние клетки, метки которых имеют вид $p^t p^{-\varphi}$, $p \in P$, не имеют общих рёбер.

Лемма 6. *Минимальная (по числу клеток) из всех сферических диаграмм над данным φ -копредставлением без внешних граней и с единственной внешней вершиной, метка которой не равна единице, является φ -приведённой. Если таких диаграмм не существует, то минимальная дисковая диаграмма с данной меткой контура является φ -приведённой. Другими словами, имеет место полный φ -аналог леммы 5.*

Доказательство. Действительно, если в какой-то диаграмме над копредставлением $(**)$ пара клеток, соответствующих соотношениям вида $p^t p^{-\varphi}$, $p \in P$ имеет общее ребро, то либо такая пара клеток есть сократимая пара, либо общее ребро можно стереть, перемножив метки сливающихся при этом углов (рис. 3) и получить диаграмму с меньшим числом клеток и такими же метками внешних граней и вершин, что означает неминимальность исходной диаграммы и доказывает лемму.

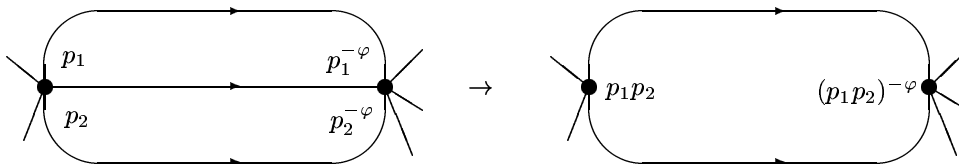


Рис. 3

Относительное копредставление (φ -копредставление), над которым не существует приведённых (соответственно, φ -приведённых) сферических диаграмм с единственной внешней вершиной и без внешних граней, будем называть *асферичными* (соответственно, φ -асферичными).

Лемма 7. Пусть группа H в копредставлении $(*)$ нетривиальна и найдётся такое слово $w \in H * F(t_1, t_2, \dots)$, несопряжённое в $H * F(t_1, t_2, \dots)$ ни с одним из элементов множества $H \cup \{w_i^{\pm 1}\}$, что копредставление

$$L = \langle H, t_1, t_2, \dots \mid w = 1, w_1 = 1, w_2 = 1, \dots \rangle$$

либо асферично, либо φ -асферично, если исходное копредставление $(*)$ является φ -копредставлением. Тогда группа K , заданная копредставлением $(*)$, не проста

Доказательство. Из (φ -)асферичности копредставления L следует (φ -)асферичность копредставления $(*)$.

Покажем, что $w \neq 1$ в группе K . Действительно, в противном случае, в силу (φ -)асферичности копредставления $(*)$ и лемм 5 и 6, над этим копредставлением существовала бы (φ -)приведённая дисковая диаграмма с меткой контура w . Но такую диаграмму можно рассматривать как (φ -)приведённую сферическую диаграмму над копредставлением L без внешних граней и вершин, а таких диаграмм не бывает по условию.

Естественное отображение группы H в группу L инъективно по лемме 5 (и лемме 6), значит, $L = K / \langle\langle w \rangle\rangle \neq \{1\}$, то есть $\langle\langle w \rangle\rangle$ является собственной нетривиальной нормальной подгруппой в K , что и требовалось доказать.

7. Стандартное движение

Пусть имеется карта на поверхности, рёбра которой ориентированы (например, диаграмма Хауи). На такой карте бывает 4 сорта углов: $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$ (рис. 4).

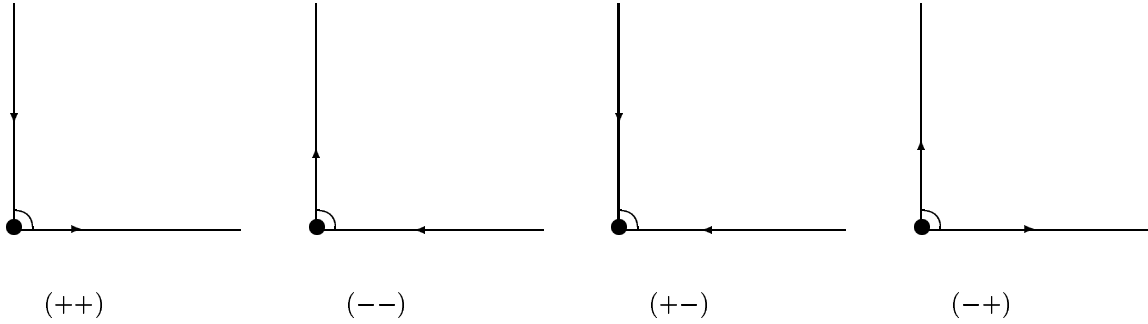


Рис. 4

Следующую лемму мы не доказываем ввиду её очевидности.

Лемма 8. При обходе против часовой стрелки углов при любой вершине v углы типа $(++)$ и $(--)$ чередуются. Если же при вершине v углов типа $(++)$ нет, или, что то же самое, углов типа $(--)$ нет, то либо все углы при v имеют тип $(+-)$ (в этом случае вершина v называется *стоком*), либо все углы при v имеют тип $(-+)$ (в этом случае вершина v называется *источником*) (рис. 5).

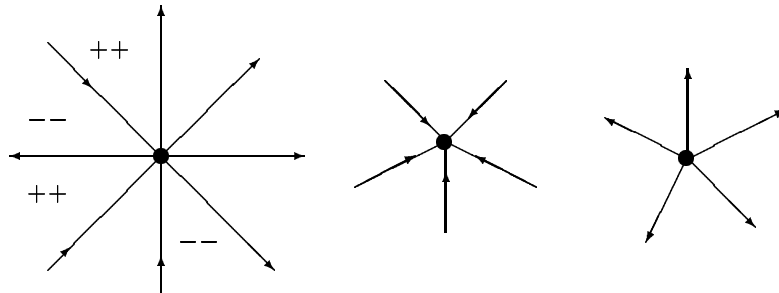


Рис. 5

Мы скажем, что карта с ориентированными рёбрами имеет тип A_m , $m \geq 0$, если последовательность ориентаций прорёбер каждой грани имеет одну из четырёх форм:

- а) $+-$ (рисунок 6а);
- б) $+(+-)^{m+1}$ (рисунок 6б);
- в) $-(-+)^{m+1}$ (рисунок 6в);
- г) $(+)^{k+1}(-)^{l+1}$, $k, l \geq 1$ (рисунок 6г).



Рис. 6а

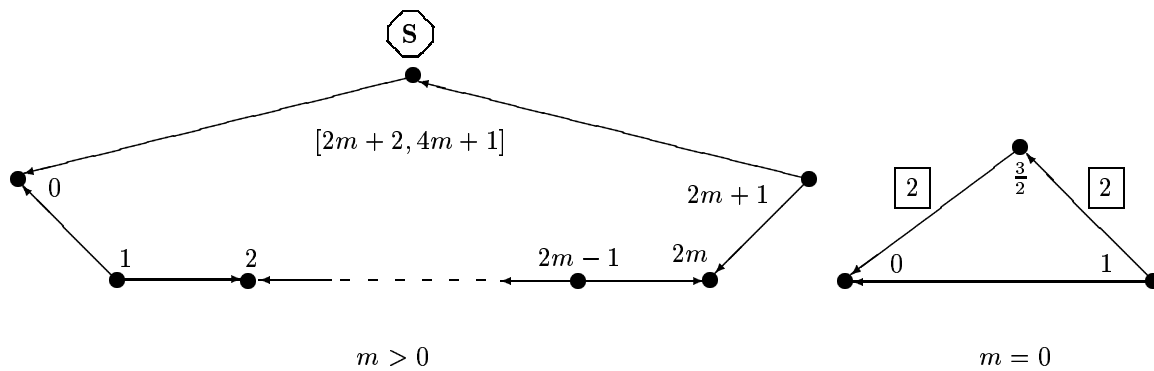


Рис. 6б

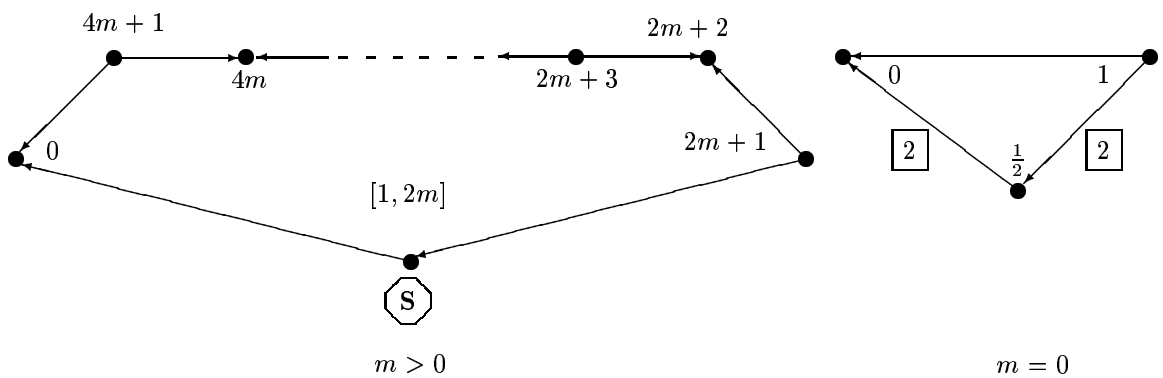


Рис. 6в

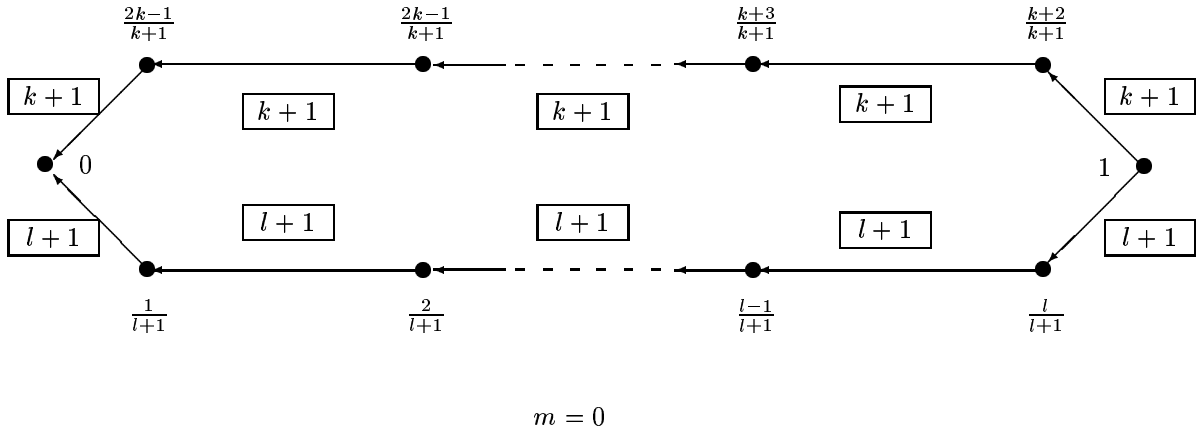
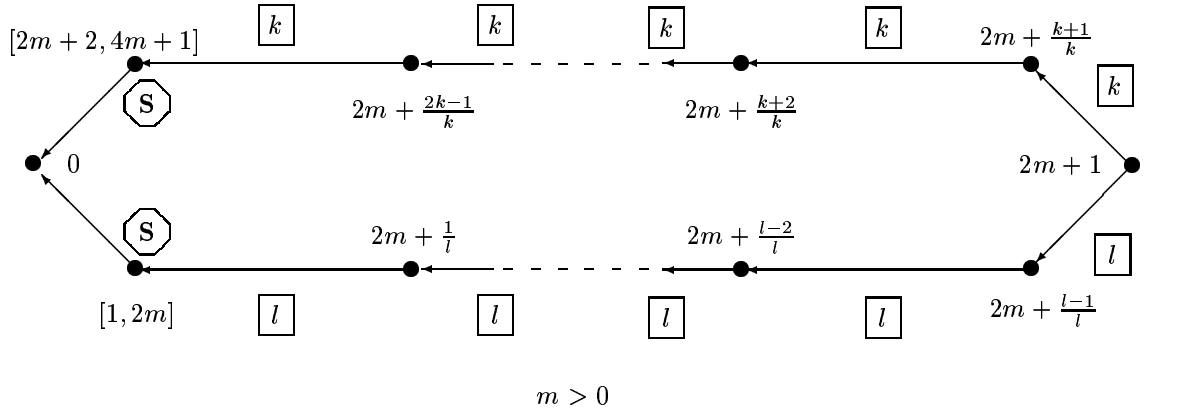


Рис. 6г

Определим *стандартное движение* на карте типа A_m следующим образом:

- а) автомобиль, объезжающий грань типа $+-$, движется против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью (одно ребро в единицу времени), проезжая в нулевой момент времени угол типа $(+-)$ (рис. 6а);
- б) при $m > 0$ автомобиль, объезжающий грань типа $(+-)^{m+1}$, на протяжении промежутков времени $[2m + 2, 4m + 1] + (4m + 2)\mathbb{Z}$ стоит в углу типа $(++)$, а остальное время едет против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью; при $m = 0$ такой автомобиль движется без остановок, проезжая положительные прорёбра со скоростью 2, отрицательное — со скоростью 1, и находясь в углу типа $(+-)$ в нулевой момент времени (рисунок 6б);
- в) при $m > 0$ автомобиль, объезжающий грань типа $-(-+)^{m+1}$, на протяжении промежутков времени $[1, 2m] + (4m + 2)\mathbb{Z}$ стоит в углу типа $(--)$, а остальное время едет против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью; при $m = 0$ такой автомобиль движется без остановок, проезжая отрицательные прорёбра со скоростью 2, положительное — со скоростью 1, и находясь в углу типа $(+-)$ в нулевой момент времени (рисунок 6в);
- г) при $m > 0$ автомобиль, объезжающий грань типа $(+)^{k+1}(-)^{l+1}$, в нулевой момент времени находится в углу типа $(+-)$, далее проезжает первое из отрицательных прорёбер с единичной скоростью, после чего останавливается, стоит на протяжении интервала времени $[1, 2m]$, далее проезжает со скоростью l оставшиеся l отрицательных прорёбер, потом проезжает со скоростью k k положительных прорёбер, после чего останавливается и стоит на протяжении интервала времени $[2m + 2, 4m + 1]$, потом проезжает с единичной скоростью последнее положительное прорёбра и оказывается в момент $4m + 2$ снова в углу типа $(+-)$, далее всё повторяется с периодом $4m + 2$; при $m = 0$ такой автомобиль движется без остановок, проезжая отрицательные прорёбра со скоростью $l + 1$, положительные — со скоростью $k + 1$, и находясь в углу типа $(+-)$ в нулевой момент времени (рисунок 6г).

Стандартное движение является периодическим с периодом $4m + 2$ (при этом на гранях типа $+-$ минимальный период равен двум). На рисунке 6 показано подробное расписание движения на протяжении интервала времени $[0, 4m + 2)$, числа в рамках около рёбер означают скорость автомобиля на этих рёбрах (по умолчанию скорость единичная). В углах, помеченных буквой **S**, автомобиль останавливается на время $2m - 1$.

Лемма 9. *Стандартное движение на карте типа A_m является движением с разделёнными остановками. Полные столкновения могут происходить только в вершинах, являющихся источниками или стоками, и только в целые моменты времени.*

Доказательство. Объявим остановочными углами все углы типа $(++)$ и $(--)$. То, что остановки являются разделёнными, следует из леммы 8 и того, что расписание стандартного движения устроено так, что автомобили никогда не бывают одновременно в углах типа $(++)$ и $(--)$ (в углах типа $(--)$ автомобили бывают только в первую половину периода, то есть в моменты из интервалов $(0, 2m + 1) + (4m + 2)\mathbb{Z}$, а в углах типа $(++)$ — во вторую половину, то есть в моменты из интервалов $(2m + 1, 4m + 2) + (4m + 2)\mathbb{Z}$).

Столкновение на ребре в момент времени t означает, что в этот момент направление движения одного из автомобилей совпадает с направлением ребра, а направление движения другого автомобиля противоположно направлению ребра (рис. 7).

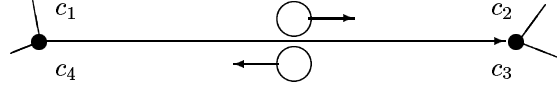


Рис. 7

Но расписание стандартного движения устроено таким образом, что в каждый момент времени t либо все автомобили, находящиеся на рёбрах, едут в направлении ребра (это происходит, когда целая часть t нечётна), либо все автомобили, находящиеся на рёбрах, едут в направлении, противоположном направлению ребра, (это происходит, когда целая часть t чётна). Значит, столкновения могут происходить только в вершинах; из условия разделённости остановок следует, что вершины, в которых происходят полные столкновения, не могут иметь остановочных углов и, следовательно, являются источниками или стоками. В таких вершинах автомобили появляются только в целые моменты времени (чётные для стоков и нечетные для источников). Лемма доказана.

8. Доказательство основной теоремы. Лёгкий случай

То, что указанные в основной теореме условия достаточны для простоты группы \tilde{G} , очевидно. Будем доказывать их необходимость. Ясно, что из простоты группы \tilde{G} следует, что группа G совпадает с коммутантом и $\sum \varepsilon_i = \pm 1$ (так как иначе \tilde{G} не совпадала бы со своим коммутантом). Мы будем предполагать, что группа G совпадает с коммутантом и условия (1) выполнены. При этом нам достаточно доказать, что группа \tilde{G} непроста.

По лемме 2 группа \tilde{G} обладает копредставлением (2). Лёгкий случай, который мы рассматриваем в этом разделе, состоит в том, что $P \neq \{1\}$ в копредставлении (2), или, что то же самое, слово w не сопряжено слову вида $ct \prod_{i=0}^m (b_i a_i^t)$, где $c, a_i, b_i \in G$. Утверждение теоремы в этом случае очевидным образом вытекает из леммы 7 и следующего утверждения.

Лемма 10. *Если G — нециклическая группа без кручения, условия (1) выполнены и $P \neq \{1\}$ в копредставлении (2), то существуют такие элементы $a, b \in H$, что копредставление*

$$\tilde{G} / \langle\langle a^{t^2} b \rangle\rangle \simeq \left\langle H, t \mid \{p^t = p^\varphi, p \in P \setminus \{1\}\}, ct \prod_{i=0}^m (b_i a_i^t) = 1, a^{t^2} b = 1 \right\rangle, \quad (3)$$

полученное из копредставления (2) добавлением соотношения $a^{t^2} b = 1$, φ -асферично.

Доказательство. Возьмём в качестве a и b такие элементы группы H , что $\langle P, a_m, a \rangle = P * \langle a_m \rangle_\infty * \langle a \rangle_\infty$ и $\langle P^\varphi, b_0, b \rangle = P * \langle b_0 \rangle_\infty * \langle b \rangle_\infty$. Такие элементы существуют по лемме 2 (свойство 4).

Надо показать, что над копредставлением (3) не существует φ -приведённой сферической диаграммы без внешних граней и с единственной внешней вершиной. Клетки такой диаграммы должны иметь вид, изображённый на рисунке 8. Мы видим, что диаграмма является картой типа A_m . Покажем, что при стандартном движении на этой карте полное столкновение может произойти только во внешней вершине.

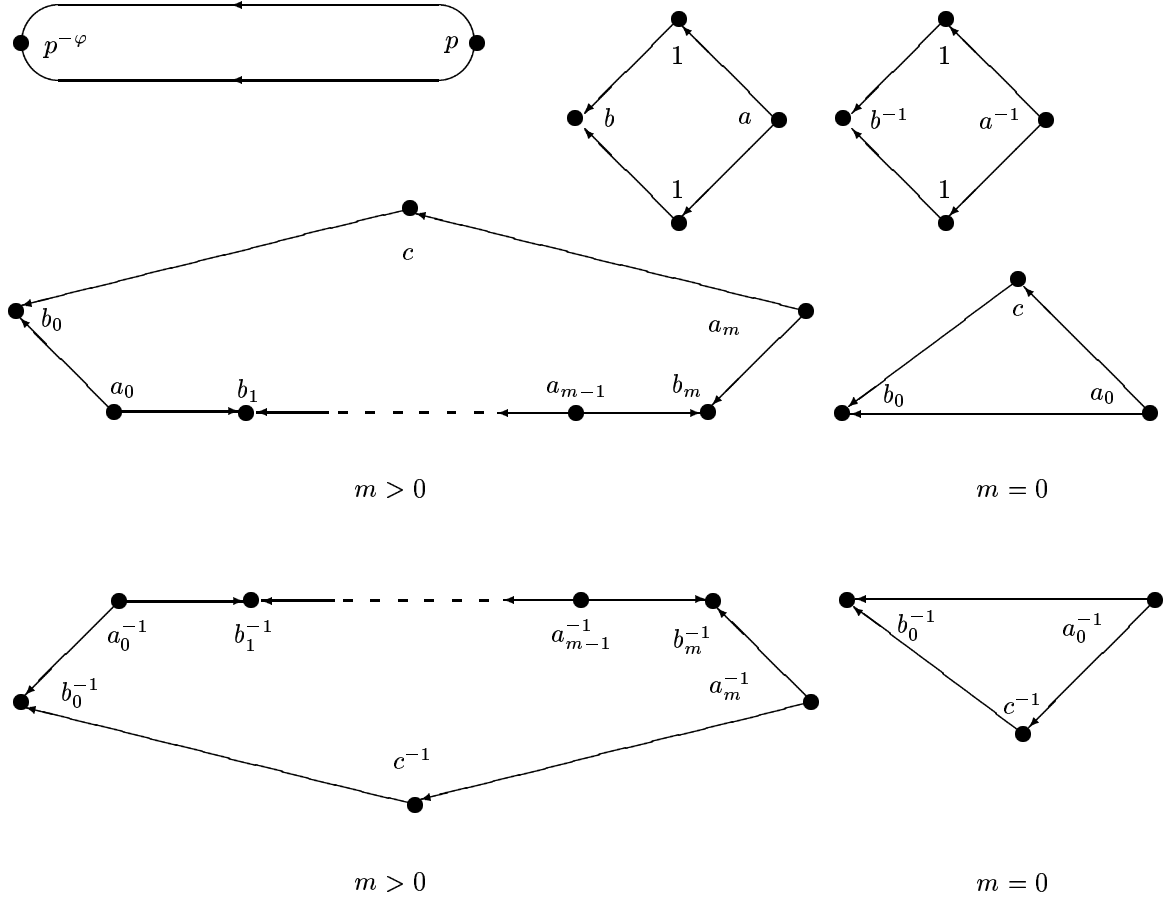


Рис. 8

Согласно лемме 9 полные столкновения могут происходить только в вершинах, являющихся стоками или источниками.

Допустим, что вершина полного столкновения является стоком. Тогда все углы при ней имеют тип $(+-)$; метка каждого из этих углов есть либо p^φ , где $p \in P$, либо $b_i^{\pm 1}$, либо $b^{\pm 1}$ (см. рис. 8). Если при вершине есть угол с меткой $b_i^{\pm 1}$ и угол с меткой $b_j^{\pm 1}$, где $i \neq j$, то полного столкновения в такой вершине не происходит, так как в этих углах автомобили никогда не находятся одновременно (сравните рисунки 8, 6б и 6в). Если присутствует угол с меткой $b^{\pm 1}$, то речь может идти только о столкновении в момент времени $0 \pmod{4m+2}$, только в этот момент времени автомобиль появляется в этом углу (рисунки 8 и 6г); но тогда в вершине полного столкновения не может быть углов с метками $b_i^{\pm 1}$, где $i \neq 0$, поскольку в таких углах автомобили не появляются в момент времени $0 \pmod{4m+2}$ (рисунки 8, 6б и 6в). Таким образом метка вершины, являющейся стоком, в которой происходит полное столкновение, есть либо

$$\prod_j (b_i^{\varepsilon_j} p_j^\varphi), \quad \text{либо} \quad \prod_j (x^{\varepsilon_j} p_j^\varphi),$$

где $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$, $p_j \in P$ и $x \in \{b, b_0\}$. Но метка внутренней вершины должна быть равна единице, значит мы имеем нетривиальное (в силу φ -приведённости диаграммы) соотношение указанного вида, что противоречит свойству 3 из леммы 2 и выбору b .

Аналогичным образом, предположив, что полное столкновение в момент времени t происходит во внутренней вершине, являющейся источником, мы получим нетривиальное соотношение вида

$$\prod_j (a_i^{\varepsilon_j} p_j) = 1 \quad (\text{если } t \neq 2m+1 \pmod{4m+2}) \quad \text{или} \quad \prod_j (x^{\varepsilon_j} p_j) = 1 \quad (\text{если } t = 2m+1 \pmod{4m+2}),$$

где $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$, $p_j \in P$ и $x \in \{a, a_m\}$, что противоречит свойству 3 из леммы 2 и выбору a .

Таким образом, полное столкновение может произойти только во внешней вершине, но по лемме 4 должно быть по меньшей мере две точки полного столкновения. Это противоречие завершает доказательство леммы 10 и лёгкого случая основной теоремы.

Замечание. Отметим, что попутно мы доказали следующий факт. Пусть на φ -приведённой диаграмме над копредставлением (2), обладающим свойствами 1 и 3 из леммы 2, задано движение, являющееся стандартным на внутренних гранях. Тогда полные столкновения могут происходить только во внешних вершинах и на границах внешних граней. Отсюда, в частности, вытекает (в силу лемм 2, 4, 5 и 6) основной результат статьи [К93]: если группа G не имеет кручения и $\sum \varepsilon_i = 1$, то естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ инъективно.

9. Кодвижения и кратные движения

В этом разделе мы изложим теорию кодвижений, которые были введены в работах [К94] и [К97]; там же можно найти некоторые применения кодвижений к уравнениям над группами. Наше нынешнее изложение будет несколько отличаться по языку и по общности от того, что написано в упомянутых работах.

Понятие кодвижения двойственно понятию периодического движения.

Определение. Кодвижением A на ориентированной поверхности S называется карта $M: \coprod D_i \rightarrow S$ на этой поверхности и набор непрерывных отображений $\{\alpha_i: \partial D_i \rightarrow \mathbf{T}\}$, где \mathbf{T} — ориентированная окружность, называемая окружностью времени. Иногда мы будем трактовать кодвижение, как непрерывное отображение $A: \coprod \partial D_i \rightarrow \mathbf{T}$. Отображение α_i мы называем *коавтомобилем*, объезжающим грань D_i . Мы говорим, что в момент времени $t \in \mathbf{T}$ коавтомобиль α_i находится в точке $p \in S$, если $\alpha_i(\mu_i^{-1}(p)) \ni t$. Мы говорим, что в момент $t \in \mathbf{T}$ в точке p одномерного остова поверхности S происходит *полное столкновение* если $A^{-1}(t) \supseteq M^{-1}(p)$. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. Точки полного столкновения, лежащие на рёбрах, мы называем просто *точками столкновения*.

Кодвижение называется *правильным*, если отображения α_i являются неубывающими.

Отметим, что при непрерывном неубывающем отображении окружности в окружность число односвязных компонент связности прообраза точки всегда является конечным, не зависит от точки и совпадает со степенью отображения.

Основное свойство кодвижений, которое нам понадобится в этой статье, состоит в следующем:

Лемма 11. При правильном кодвижении $\{\alpha_i\}$ на поверхности S

$$(\text{число точек полного столкновения}) + \sum_i (1 - \deg \alpha_i) \geq e(S).$$

На самом деле это неравенство есть простое следствие некоторого равенства, для формулировки которого нам понадобится несколько дополнительных обозначений.

Зафиксируем взаимнооднозначное непрерывное сохраняющее ориентацию отображение $f: [0; T) \rightarrow \mathbf{T}$ полуинтервала $[0; T)$ ($T \in \mathbb{R}$) на окружность. Определим функции $\chi: \mathbf{T} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{Z}$ и $\psi: \coprod_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ формулами

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y); \\ 1, & \text{если } f^{-1}(x) > f^{-1}(y); \end{cases}$$

$$\psi(t_1, \dots, t_k) = \chi(t_1, t_2) + \chi(t_2, t_3) + \dots + \chi(t_k, t_1); \quad \psi(t_1) = 0.$$

Лемма 12. Функция ψ обладает следующими свойствами:

- 1) ψ не зависит от выбора функции f и может быть определена инвариантно так: рассмотрим ориентированную окружность X , точки $x_1, \dots, x_k \in X$, расположенные на ней по порядку в положительном направлении, и непрерывное неубывающее отображение $F: X \rightarrow \mathbf{T}$, которое отображает точки x_i в точки t_i , а дуги $[x_i, x_{i+1}]$ в дуги $[t_i, t_{i+1}]$ (здесь индексы по модулю k и дуга с совпадающими концами считается состоящей из одной точки); тогда $\psi(t_1, \dots, t_k) = \deg F$;
- 2) ψ принимает целые неотрицательные значения;
- 3) $\psi(t_1, \dots, t_k) = 0$ тогда и только тогда, когда все t_i равны.

Доказательство. Свойства 2) и 3) очевидны. Чтобы доказать свойство 1), заметим, что по определению $\psi(t_1, \dots, t_k)$ равно числу полуоткрытых дуг вида $(t_i, t_{i+1}]$, содержащих $f(0)$ (здесь индексы по модулю k и полуоткрытая дуга с совпадающими концами считается пустым множеством). А это число, в свою очередь, есть число прообразов при отображении F точки $f(T - \varepsilon)$, где ε — достаточно маленькое положительное вещественное число. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $A: \coprod \partial D_i \rightarrow \mathbf{T}$ есть правильное кодвижение на поверхности S . Определим вес ν грани D_i , ребра e и вершины v следующими формулами

$$\nu(D_i) = 1 - \deg \alpha_i,$$

$$\nu(e) = -1 + (\text{число компонент связности множества точек ребра } e, \text{ не являющихся точками столкновения}),$$

$$\nu(v) = 1 - \psi(A(c_0), \dots, A(c_k)),$$

где в последней формуле c_0, \dots, c_k — это все углы при вершине v , занумерованные против часовой стрелки. Тогда суммарный вес всех граней, рёбер и вершин равен эйлеровой характеристике поверхности S . (Напоминаем, что, согласно нашему определению, концы ребра не принадлежат ребру.)

Доказательство. Заметим, что суммарный вес граней, рёбер и вершин не меняется при измельчении рёбер, то есть при добавлении вершины v , которая разделяет ребро e на два ребра e_1 и e_2 . В самом деле, если вершиной v объявляется точка ребра e , не являющаяся точкой столкновения, то суммарное число компонент связности множества точек рёбер e_1 и e_2 , не являющихся точками столкновения, будет на единицу больше аналогичной величины для ребра e , а вес вершины v окажется нулевым. Таким образом, суммарный вес не изменится: $\nu(e_1) + \nu(e_2) + \nu(v) = \nu(e)$. Если же вершиной v объявляется точка ребра e в которой происходит столкновение, то суммарное число компонент связности множества точек рёбер e_1 и e_2 , не являющихся точками столкновения, будет равно аналогичной величине для ребра e , а вес вершины v окажется единицей. Таким образом, суммарный вес снова не изменится.

Измельчая рёбра, можно добиться того, чтобы каждое ребро e обладало следующими свойствами:

- 1) в некоторый момент времени на замыкании ребра e нет ни одного коавтомобиля;
- 2) либо на ребре e не происходит столкновений, либо они происходят в каждой точке ребра e (последнее означает, что функция A является постоянной на $M^{-1}(e)$).

Заметим, что вес ребра e , обладающего этими свойствами, равен либо нулю, либо -1 и может быть записан в виде

$$\nu(e) = \psi(A(c_1), A(c_2), A(c_3), A(c_4)) - 1,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — углы при ребре e , занумерованные по часовой стрелке (как на рисунке 7). Справедливость этой формулы легко усматривается из свойств функции ψ (лемма 12), если заметить, что свойства 1) и 2) ребра e означают, что интервалы $(A(c_1), A(c_2))$ и $(A(c_3), A(c_4))$ не пересекаются.

Согласно лемме 12 вес грани может быть записан в виде

$$\nu(D_i) = 1 - \psi(\alpha_i(c_0), \dots, \alpha_i(c_k)),$$

где c_0, \dots, c_k — это все углы грани D_i , занумерованные против часовой стрелки. Для завершения доказательства осталось сослаться на следующий очевидный факт.

Лемма 14. Пусть имеется произвольная карта на произвольной поверхности S и две произвольные функции g и h , сопоставляющие паре углов число. Определим вес ν грани D , ребра e и вершины v следующими формулами:

$$\nu(D) = 1 - \sum_{i=0}^k g(c_i, c_{i+1}),$$

$$\nu(e) = -1 + g(c_1, c_2) + h(c_2, c_3) + g(c_3, c_4) + h(c_4, c_1),$$

$$\nu(v) = 1 - \sum_{i=0}^k h(c_i, c_{i+1}),$$

где в первой формуле c_0, \dots, c_k — это все углы грани D , занумерованные против часовой стрелки, во второй формуле c_1, \dots, c_4 — это углы при ребре e , занумерованные по часовой стрелке (рис. 7), а в последней формуле c_0, \dots, c_k — это все углы при вершине v , занумерованные против часовой стрелки. Тогда суммарный вес всех граней, рёбер и вершин равен эйлеровой характеристике поверхности S .

Для доказательства этого утверждения достаточно понять, что при суммировании всех весов все значения функций g и h сократятся: каждое встречающееся выражение $g(x, y)$ один раз входит в вес грани со знаком минус и один раз в вес ребра со знаком плюс; аналогично, каждое встречающееся выражение $h(x, y)$ один раз входит в вес вершины со знаком минус и один раз в вес ребра со знаком плюс.

Для завершения доказательства леммы 13 надо положить в лемме 14 $g(c_1, c_2) = h(c_1, c_2) = \chi(A(c_1), A(c_2))$.

Лемма 11 немедленно вытекает из леммы 13; надо только заметить, что вес ребра (из леммы 13) не больше числа точек полного столкновения на этом ребре, а вес вершины равен единице, если в этой вершине происходит полное столкновение, и неположителен в противном случае.

Кратным движением периода $T \in \mathbb{R}$ на поверхности S называется карта $\{\mu_i: D_i \rightarrow S \mid i \in I\}$ на этой поверхности и набор отображений $\{\alpha_{i,j}: \mathbb{R} \rightarrow \partial D_i; i \in I, j = 1, \dots, d_i\}$ (называемых автомобилями), удовлетворяющих следующим условиям периодичности:

- 1) $\alpha_{i,j}(t + T) = \alpha_{i,j+1}(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и $j \in \{1, \dots, d_i\}$ (индексы по модулю d_i);
- 2) существует такое разбиение каждой из окружностей ∂D_i на d_i дуг, что на протяжении интервала времени $[0, T]$ каждый автомобиль $\alpha_{i,j}$ движется по j -й дуге.

Натуральные числа d_i называются *кратностями* кратного движения. Кратное движение называется *правильным*, если все функции $\alpha_{i,j}$ являются накрытиями, сохраняющими ориентацию.

Пример 2. На карте, изображённой на рисунке 1, определим кратное движение так: автомобили $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε , объезжающие грани A, B, C, D и E , соответственно, движутся так же, как в примере 1, то есть с единичной скоростью (одно ребро в единицу времени) в положительном направлении, находясь в нулевой момент времени в углах a_0, b_0, c_0, d_0 и e_0 , соответственно; кроме того, имеется ещё один автомобиль β' , объезжающий грань B в положительном направлении с единичной скоростью, находясь в нулевой момент времени в углу b_3 . На рисунке 1 показано положение автомобилей и направление их движения в момент времени $t = 4/3$. Это кратное движение является правильным, имеет период 3 и набор кратностей $\{1, 2, 1, 1, 1\}$. Полные столкновения происходят в тех же трёх точках, что в примере 1 (они помечены восклицательными знаками на рисунке 1). Однако на этот раз никакие изменения расписания движения не помогут уменьшить число точек полного столкновения.

Лемма 15. Число точек полного столкновения правильного кратного движения с кратностями $\{d_i; i \in I\}$ на поверхности S не может быть меньше чем

$$e(S) + \sum_{i \in I} (d_i - 1).$$

Доказательство. Правильное кратное движение $\{\alpha_{i,j}\}$ очевидным образом позволяет определить кодвижение $\{\beta_i: \partial D_i \rightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}\}$. Достаточно положить $\beta_i(x)$ равным такому t , что $\alpha_{i,j}(t) = x$; это выражение не зависит от j , корректно определено по модулю T и является накрытием степени d_i . Для завершения доказательства осталось заметить, что точки полного столкновения этого кодвижения совпадают с точками полного столкновения исходного кратного движения, и сослаться на лемму 11.

Кратное движение $\{\alpha_{i,j}\}$ называется *кратным движением с разделёнными остановками*, если все автомобили $\alpha_{i,j}$ являются неубывающими функциями и остановки разделены в смысле определения из раздела 5.

Лемма 16. Число точек полного столкновения кратного движения с разделёнными остановками на поверхности S не может быть меньше чем

$$e(S) + \sum_{i \in I} (d_i - 1),$$

где d_i суть кратности кратного движения.

Эта лемма выводится из леммы 15 так же, как лемма 4 выводится из леммы 3.

Назовём карту на поверхности *2-градуированной*, если на ней имеется следующая дополнительная структура: некоторые из вершин и некоторые из граней выделены и называются *внешними*, остальные вершины и грани называются *внутренними*; кроме того, некоторые из граней называются *большими*, остальные грани называются *малыми*.

Пусть на 2-градуированной карте M на поверхности S задано (кратное) движение. Скажем, что две различные большие грани A и B *плохо примыкают друг к другу*, если они имеют такие углы $a_1, a_2 \in \partial A$ и $b_1, b_2 \in \partial B$, что

- 1) a_i и b_i являются несмежными углами при некоторой внутренней вершине полного столкновения $v_i = M(a_i) = M(b_i)$ (при $i = 1, 2$);
- 2) $v_1 \neq v_2$;
- 3) замкнутый путь на поверхности S , состоящий из участка $[a_1, a_2]$ границы грани A и участка $[b_2, b_1]$ границы грани B не проходит через внешние вершины и является контуром дисковой подкарты, каждая вершина которой является внутренней, а каждая клетка — малой внутренней.

Скажем, что большая грань A *плохо примыкает к самой себе* если либо она имеет такие углы $a_1, a_2, b_2, b_1 \in \partial A$ (все различные и расположенные именно в таком порядке), что выполнены условия 1), 2) и 3), либо она имеет углы $a, b \in \partial A$, являющиеся несмежными (и несовпадающими) углами при некоторой внутренней вершине полного столкновения $v = M(a) = M(b)$, причём участок $[a, b]$ границы грани A на поверхности S не проходит через внешние вершины и является контуром дисковой подкарты, каждая вершина которой является внутренней, а каждая клетка — малой внутренней.

Рисунок 9 иллюстрирует все случаи плохого примыкания; звёздочкой на этом рисунке отмечены подкарты, не содержащие ни внешних вершин, ни внешних граней, ни больших граней; в вершинах, отмеченных восклицательным знаком, происходят полные столкновения.

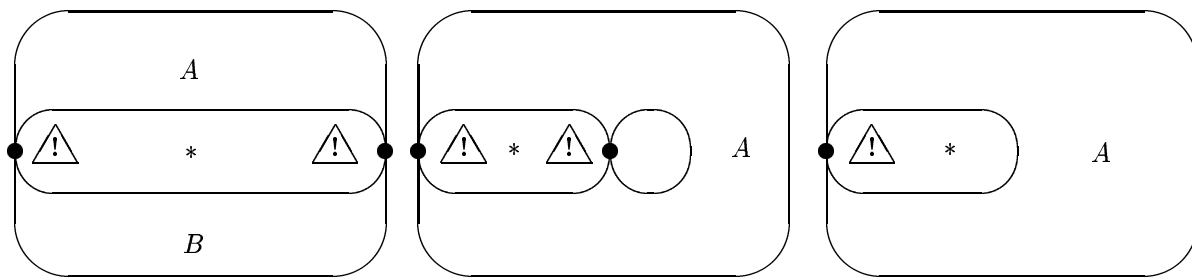


Рис. 9

Лемма 17. На сферической 2-градуированной карте с единственной внешней вершиной и без внешних граней не может существовать кратного движения с разделёнными остановками, удовлетворяющего следующим условиям:

- 1) кратность движения на каждой большой грани не меньше четырёх, а на каждой малой грани не меньше одного;
- 2) при каждой из внутренних точек полного столкновения имеется по меньшей мере два несмежных угла больших клеток;
- 3) не существует плохо примыкающих (к себе или другим) больших клеток.

Доказательство. Чтобы получить противоречие с леммой 16, достаточно показать, что из условий 2) и 3) следует, что

$$(\text{число внутренних точек полного столкновения}) < 3 \cdot (\text{число больших граней}) + 1.$$

Отметим внутри каждой большой грани D точку v_D . При каждой внутренней точке полного столкновения p выделим 2 несмежных угла a и b , лежащих на больших гранях, которые мы назовём A и B соответственно. Проведём на сфере дугу от точки v_A по внутренности грани A через угол a до точки p и далее через угол b по внутренности грани B до точки v_B . Если мы позаботимся о том, чтобы различные построенные дуги не пересекались, то мы получим граф Γ на сфере, число вершин которого равно числу больших клеток карты, а число рёбер равно числу внутренних точек полного столкновения. Для завершения доказательства осталось заметить, что условие 3) означает, что граф Γ удовлетворяет условиям следующей леммы.

Лемма 18. Пусть имеется конечный (необязательно связный) граф Γ на сфере S^2 такой, что периметр каждой односвязной компоненты связности множества $S^2 \setminus \Gamma$, кроме, быть может, одной — исключительной, не меньше трёх. Тогда число рёбер этого графа не больше утроенного числа его вершин.

Здесь под периметром области мы понимаем число рёбер на её границе, причём ребро считается дважды, если область лежит по обе стороны от этого ребра.

Доказательство. Если граф не имеет рёбер, то доказывать нечего. Считая, что рёбра есть, воспользуемся индукцией по числу компонент связности графа Γ . В случае, когда граф связный, по формуле Эйлера мы имеем $V - E + F = 2$, где V , E и F — это число вершин, рёбер и граней соответствующей карты на сфере. Добавив одну вершину внутри исключительной компоненты и соединив её ребром с вершиной границы этой компоненты, мы добьёмся того, что каждая грань станет по меньшей мере треугольником. Следовательно, $F \leq \frac{2}{3}(E + 1)$. Значит, $V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E \geq 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Тем самым для связных графов лемма доказана.

Если рёбра есть, но граф несвязный, то соединим компоненту связности, отличную от точки, с какой-нибудь другой компонентой новым ребром. При этом число компонент связности графа уменьшится, число вершин не изменится, число рёбер увеличится, а возникающая односвязная компонента дополнения к графу будет иметь периметр не меньше трёх. Ссылка на предположение индукции завершает доказательство леммы 18, а заодно и леммы 17.

Мы скажем, что карта с ориентированными рёбрами имеет тип B_m , $m \geq 0$, если последовательность ориентаций прорёбер каждой грани имеет одну из трёх форм:

- а) $+(+)^{m+1}$ (рисунок 6б);
- б) $-(-)^{m+1}$ (рисунок 6в);
- в) $((+)^{k+1}(-)^{l+1})^s$, $k, l, s \geq 1$ (рисунок 10).

Определим *стандартное кратное движение* на карте типа B_m следующим образом. На гранях типов $+(+)^{m+1}$ и $-(-)^{m+1}$ стандартное движение (однократное) определяется так же, как для карты типа A_m . На грани типа $((+)^{k+1}(-)^{l+1})^s$ определим s -кратное движение как поднятие стандартного движения на грани типа $(+)^{k+1}(-)^{l+1}$ (из определения стандартного движения на карте типа A_m). Более точно: имеется естественное сохраняющее ориентацию прорёбер s -листное накрытие $\pi: \partial B \rightarrow \partial A$, где B — грань типа $((+)^{k+1}(-)^{l+1})^s$,

а A — грань типа $(+)^{k+1}(-)^{l+1}$; у стандартного автомобиля $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \partial A$ имеется ровно s поднятий, то есть таких функций $\alpha_1, \dots, \alpha_s: \mathbb{R} \rightarrow \partial B$, что $\alpha = \pi \alpha_i$; эти функции мы и называем стандартными автомобилями, объезжающими ∂B .

На рисунке 10 представлено расписание стандартного кратного движения на грани типа $((+)^{k+1}(-)^{l+1})^s$ при $k = l = 2$ и $s = 4$: около вершин указано когда $(\text{mod } 4m + 2)$ в этих вершинах находится один из четырёх автомобилей. Это расписание, разумеется, относится к случаю $m > 0$; при $m = 0$ все 4 автомобиля движутся равномерно со скоростью $k + 1 = l + 1 = 3$ и находятся в вершинах, помеченных числом 0, в нулевой момент времени.

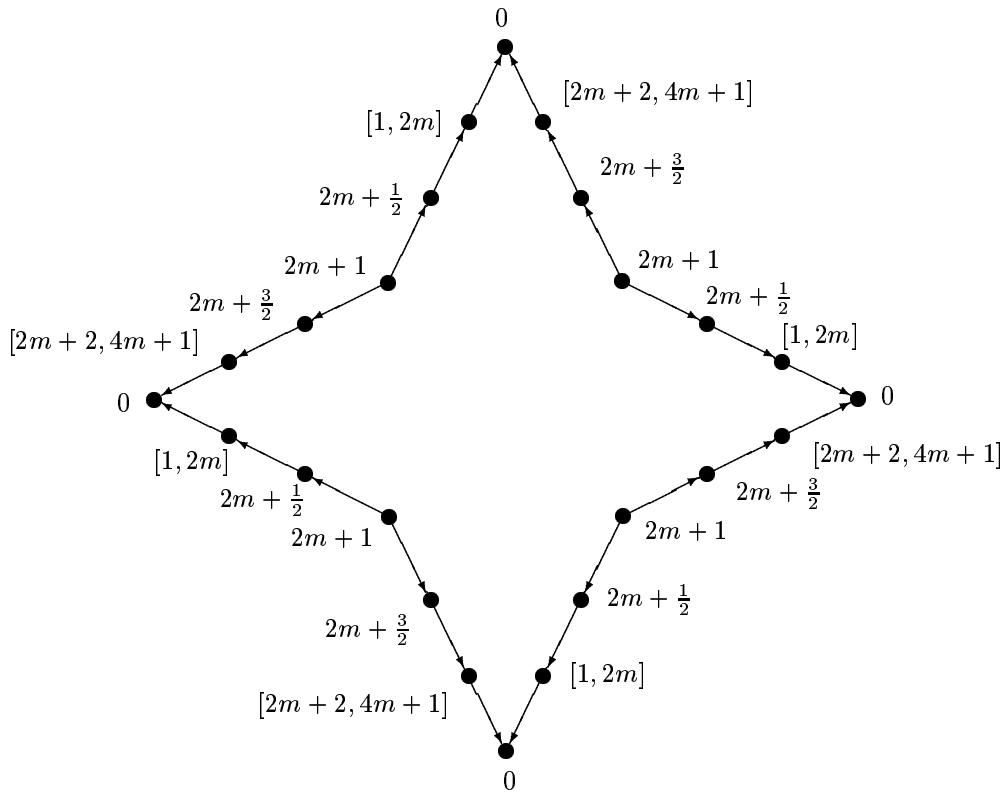


Рис. 10

Лемма 19. Стандартное движение на карте типа B_m является кратным движением с разделёнными остановками. Полные столкновения могут происходить только в вершинах, являющихся источниками или стоками, и только в целые моменты времени.

Чтобы доказать эту лемму, надо дословно повторить доказательство леммы 9.

10. Доказательство основной теоремы. Трудный случай

Мы по-прежнему считаем, что группа G без кручения и условия (1) выполнены. При этом нам достаточно доказать, что группа \tilde{G} не проста. Группа \tilde{G} обладает копредставлением (2), и мы теперь считаем, что $P = \{1\}$, то есть копредставление (2) имеет вид

$$\tilde{G} \simeq \left\langle G, t \mid ct \prod_{i=0}^m (b_i a_i^t) = 1 \right\rangle, \quad m \geq 0. \quad (4)$$

Лемма 20. $G^t \cap G = \{1\}$ в группе \tilde{G} .

Доказательство. Предполагая противное, по лемме 5 (и в силу замечания после леммы 10) мы получаем, что существует приведённая сферическая диаграмма над копредставлением (4) с единственной внешней гранью, метка которой есть $g^t h$, где $g, h \in G \setminus \{1\}$. Эта диаграмма является картой типа A_m . Она имеет одну клетку (внешнюю) типа $+-$ (рис. 6а), а остальные клетки имеют тип $+(+-)^{m+1}$ (рис. 6б) и $-(-+)^{m+1}$ (рис. 6в). Рассмотрим стандартное движение периода $4m + 2$ на этой карте. Согласно замечанию после леммы 10, полные столкновения могут происходить только в вершинах A и B , лежащих на границе внешней грани. По лемме 4 в обеих этих вершинах должны происходить полные столкновения. По лемме 9 столкновения могут происходить

только в источниках и стоках. Значит, вершина A , при которой расположен угол типа $(-+)$ внешней грани, является источником, а вершина B , при которой расположен угол типа $(+-)$ внешней грани, является стоком. При $m = 0$ из этого немедленно вытекает, что метки всех внутренних углов при вершине A равны $a_0^{\pm 1}$ (поскольку A — источник), но не все эти метки одинаковы (поскольку B — сток) (рис.11); значит, диаграмма содержит сократимую пару клеток, то есть не является приведённой.

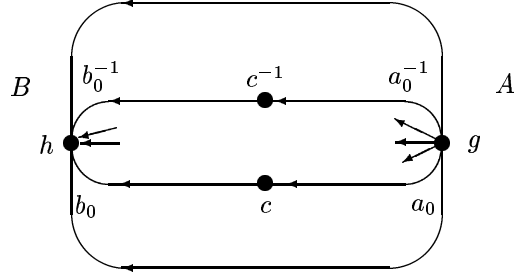


Рис. 11

Если $m > 0$, то полные столкновения не могут произойти в обеих вершинах. Действительно, допустим, что в вершине A происходит полное столкновение в момент t . Тогда один из автомобилей, объезжающих внутреннюю грань, окажется в вершине B в момент $t_1 = t + 1$, а другой автомобиль — в момент $t_2 = t - 1$. Но t_1 никогда не бывает равен t_2 по модулю периода движения, так как при $m > 0$ период больше чем 2, то есть в вершине B столкновения не происходит. Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма 21. Для любых $g, h \in G$ мы имеем одно из двух:

- либо $\langle g \rangle^{t^2} \cap \langle h \rangle = \{1\}$ в группе \tilde{G} ,
- либо $\langle g \rangle^{t^3} \cap \langle h \rangle = \{1\}$ в группе \tilde{G} .

Доказательство. Допустим противное:

$$g^{kt^2} = h^l, \quad g^{k't^3} = h^{l'}.$$

Возведём эти равенства в степени k' и k соответственно:

$$g^{kk't^2} = h^{lk'}, \quad g^{kk't^3} = h^{kl'}.$$

Сопрягая первое равенство при помощи t , получаем

$$h^{lk't} = h^{kl'},$$

откуда $h = 1$ в силу леммы 20 и отсутствия кручения в G .

Лемма 22. Существует такое $d \in \{2, 3\}$, что

$$u \equiv \prod_{i=1}^s y_i x_i^{t^d} \neq 1 \text{ в } \tilde{G}$$

для любого натурального s и любых $x_i, y_i \in G$ таких, что $|\{i \mid x_i \in \langle a_m \rangle\}| + |\{i \mid y_i \in \langle b_0 \rangle\}| \leq 2$ и $u \neq 1$ в $G * \langle t \rangle_\infty$.

Доказательство. В качестве d выберем такое число, что $\langle a_m \rangle^{t^d} \cap \langle b_0 \rangle = \{1\}$; такое $d \in \{2, 3\}$ существует по лемме 21.

Доказывая от противного, рассмотрим контрпример с наименьшим возможным s . По лемме 5 (и замечанию после леммы 10) существует диаграмма над копредставлением (4) на сфере с единственной внешней гранью, метка контура которой равна u .

Покажем сперва, что ни при какой вершине не может быть более одного угла типа $(+-)$ внешней грани. Действительно, предположив, что углы внешней грани с метками y_1 и y_r являются углами при одной и той же вершине и рассмотрев соответствующие поддиаграммы, мы получим, что равенство $u = 1$ распадается в произведение двух равенств

$$\left(\prod_{i=1}^{r-1} y_i x_i^{t^d} \right) g = 1 \quad \text{и} \quad g^{-1} \prod_{i=r}^s y_i x_i^{t^d} = 1, \quad \text{где } g \in G,$$

(смотрите рис. 12, на котором $s = 5$, $d = 2$ и $r = 3$), по крайней мере одно из которых противоречит минимальности рассматриваемого контрпримера. Аналогичным образом можно показать, что ни при какой вершине не может быть более одного угла типа $(-+)$ внешней грани.

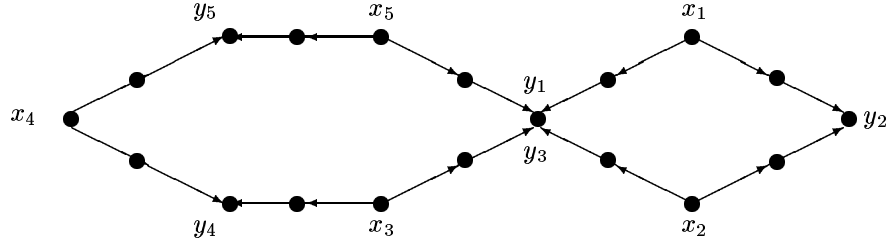


Рис. 12

Далее заметим, что диаграмма представляет собой карту типа B_m . Рассмотрим стандартное кратное движение на этой карте. Согласно замечанию после леммы 10, полные столкновения могут происходить только в вершинах, лежащих на контуре внешней грани. Кроме того, по лемме 19 вершины полных столкновений должны быть источниками или стоками. Следовательно, при каждой вершине полного столкновения имеется ровно один угол внешней грани и полные столкновения могут происходить только в моменты времени 0 и $2m+1 \pmod{4m+2}$, так как только в эти моменты автомобили, объезжающие внешнюю грань, оказываются в углах типа $(+-)$ или $(-+)$. Поскольку все остальные автомобили в эти моменты времени проезжают углы с метками $b_0^{\pm 1}$ (в момент 0) и $a_m^{\pm 1}$ (в момент $2m+1$), метка угла внешней грани при вершине полного столкновения должна лежать в $\langle b_0 \rangle$ (для угла типа $(+-)$) или в $\langle a_m \rangle$ (для угла типа $(-+)$). Но по условию внешняя грань имеет не более двух таких углов, значит, имеется не больше двух точек полного столкновения. Однако, согласно лемме 16, должна быть по меньшей мере $s+1$ точка полного столкновения. Значит, $s=1$ и u имеет вид $b_0^k a_m^{t^d}$, а такое слово не равно 1 в \tilde{G} в силу выбора d . Лемма доказана.

Лемма 23. При $m \geq 0$ найдётся такое $d \in \{2, 3\}$, что копредставление

$$\left\langle G, t \mid ct \prod_{i=0}^m (b_i a_i^t) = 1, (a^t b)^4 = 1 \right\rangle$$

асферично для любых элементов $a, b \in G$ таких, что $a^2 \notin \langle a_m \rangle$ и $b^2 \notin \langle b_0 \rangle$.

Доказательство. В качестве d выберем число, существование которого утверждается в лемме 22.

Доказывая от противного, рассмотрим приведённую сферическую диаграмму над нашим копредставлением с единственной внешней вершиной и без внешних граней. Эта диаграмма представляет собой карту типа B_m . Рассмотрим стандартное кратное движение на этой карте. Клетки с меткой границы $(a^t b)^{\pm 4}$ назовём большими, остальные клетки будем считать малыми.

Покажем, что выполнены условия 1), 2) и 3) из леммы 17.

Условие 1) выполнено по определению стандартного кратного движения.

Покажем, что условие 2) выполнено. При каждой вершине полного столкновения по меньшей мере один угол должен быть углом большой клетки (смотрите замечание после леммы 10). По лемме 19 вершина полного столкновения должна быть источником или стоком, а в таких вершинах автомобиль, объезжающий большую клетку, бывает только в моменты времени 0 и $2m+1 \pmod{4m+2}$, так как только в эти моменты автомобили, объезжающие большие клетки, оказываются в углах типа $(+-)$ или $(-+)$. Автомобили, объезжающие малые клетки, в эти моменты времени проезжают углы с метками $b_0^{\pm 1}$ (в момент 0) и $a_m^{\pm 1}$ (в момент $2m+1$). Значит, метка каждого угла при вершине полного столкновения есть либо $a_m^{\pm 1}$, либо $a^{\pm 1}$, если эта вершина — источник, и либо $b_0^{\pm 1}$, либо $b^{\pm 1}$, если эта вершина — сток. При этом метки смежных углов не являются взаимнообратными в силу приведённости диаграммы. Предположим, что условие 2) не выполнено, то есть при некоторой внутренней вершине полного столкновения нет пары различных несмежных углов больших клеток, то есть углов с метками $a^{\pm 1}$ или $b^{\pm 1}$. Допустим для определённости, что эта вершина — источник. Тогда её метка имеет вид

$$\text{либо } a^{\pm 1} a_m^k, \quad \text{либо } a^{\pm 2} a_m^k, \quad \text{либо } a^{\pm 3}.$$

С другой стороны, эта метка должна быть равна единице в группе G , поскольку речь идёт о внутренней вершине. Таким образом, мы получаем, что в группе G выполнено одно из трёх равенств, первые два из которых противоречат тому, что, по условию, $a^2 \notin \langle a_m \rangle$, а третье противоречит отсутствию кручения в группе G . Это показывает, что условие 2) леммы 17 выполнено.

Допустим, что условие 3) не выполнено. Мы имеем дисковую поддиаграмму (не содержащую внешнюю вершину), внутренние клетки которой малы, а метка контура имеет вид

$$u = \prod_{i=1}^s y_i x_i^{t^d},$$

где $s \in \mathbb{N}$, $x_i, y_i \in G \setminus \{1\}$, $|\{i \mid x_i \neq a^{\pm 1}\}| + |\{i \mid y_i \neq b^{\pm 1}\}| \leq 2$, причём 1 или 2 исключительных коэффициента являются ненулевыми степенями b_0 или a_m (рис. 13). Это означает (по лемме 5), что $u = 1$ в \tilde{G} , что невозможно по лемме 22.

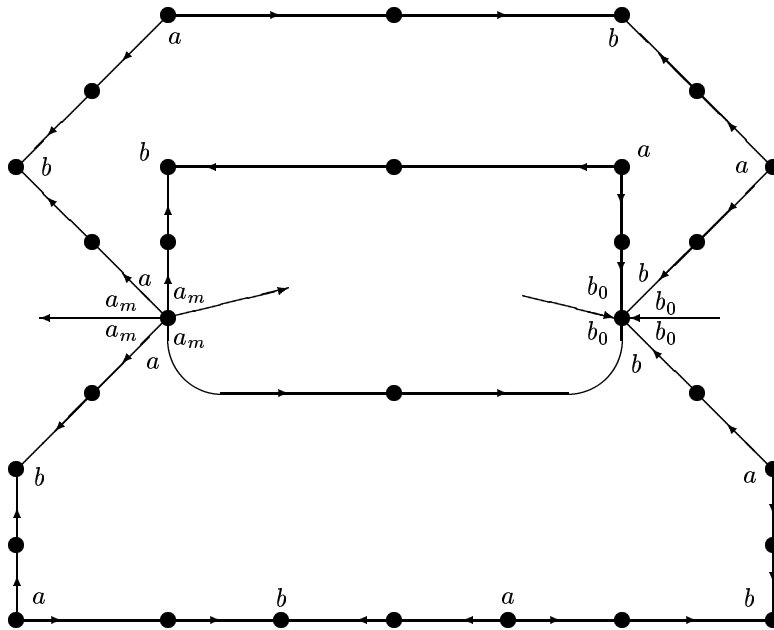


Рис. 13

Таким образом рассматриваемая диаграмма обладает свойствами 1), 2) и 3) из леммы 17, которая утверждает, что таких диаграмм не бывает. Это противоречие завершает доказательство леммы 23.

Справедливость основной теоремы (в трудном случае) вытекает из лемм 23 и 7 и того очевидного факта, что если в нетривиальной группе G квадраты всех элементов лежат в одной и той же циклической подгруппе, то G не совпадает со своим коммутантом (поскольку является метабелевой) и, следовательно, \tilde{G} также не совпадает с коммутантом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [K94] Клячко Ант. А. Гипотеза Кервера—Лауденбаха и уравнения над группами Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1994.
- [КП95] Клячко Ант. А., Прищепов М. И. Метод спуска для уравнений над группами // Вестн. МГУ: Мат., Мех. 1995. №4. С.90–93.
- [ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [МКС74] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [CG95] Clifford A., Goldstein R. Z. Tessellations of S^2 and equations over torsion-free groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1995. V.38. P.485–493.
- [CG00] Clifford A., Goldstein R. Z. Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V.43. P.295–307.
- [CR01] Cohen M. M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142.
- [FeR96] Fenn R., Rourke C. Klyachko’s methods and the solution of equations over torsion-free groups // L’Enseignement Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.
- [FeR98] Fenn R., Rourke C. Characterisation of a class of equations with solution over torsion-free groups, from “The Epstein Birthday Schrift”, (I. Rivin, C. Rourke and C. Series, editors), Geometry and Topology Monographs. 1998. V.1. P.159-166.
- [FoR03] Forester M., Rourke C. Diagrams and the second homotopy group. // arXiv:math.AT/0306088. v.1. 5 Jun 2003
- [GR62] Gerstenhaber M., Rothaus O. S. The solution of sets of equations in groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V.48 P.1531–1533.
- [H83] Howie J. The solution of length three equations over groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V.26. P.89–96.
- [K93] Klyachko Ant. A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.
- [K97] Klyachko Ant. A. Asphericity tests // J. Algebra. 1997. V.7. P.415–431.