КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП И ГЕОМЕТРИЯ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su

В этой статье, предназначенной для детей от пятнадцати до девяноста девяти лет, в популярной форме рассказывается о некоторых связях между комбинаторной теорией групп и геометрией: о геометрической интерпретации вывода следствий из соотношений и о теории малых сокращений.

Что такое соотношение между элементами группы?

Между элементами группы могут существовать разные зависимости. Например, элементы a и b могут коммутировать ($ab = ba$) или удовлетворять более сложному соотношению $(a^{2008}b^{-2008})^{2008} = 1$. Изучением всевозможных зависимостей, или соотношений, занимается *комбинаторная теория групп.* Эта наука тесно связана с геометрией. О некоторых таких связях рассказывается в этой статье.

Давайте попытаемся аккуратно определить понятие соотношения между элементами группы. Пусть X — некоторый алфавит (то есть просто некоторое множество) и X^{-1} — копия алфавита X. При этом мы считаем, что $X \cap X^{-1} = \varnothing$ и для каждой буквы $x \in X$ однозначно определена некоторая буква $x^{-1} \in X^{-1}$, причём отображение $x \mapsto x^{-1}$ является взаимно однозначным соответствием между множествами X и X^{-1}. Мы будем предполагать, что $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $X^{-1} = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots\}$. Рассмотрим объединённый алфавит $X^{\pm 1} \overset{\text{опр}}{=} X \cup X^{-1}$ и некоторое слово $w(x_1, x_2, \ldots)$ в этом алфавите (это значит, что w представляет собой конечную последовательность, каждый элемент которой есть либо одна из букв x_i, либо одна из букв x_i^{-1}). Если теперь $a_1, a_2, \ldots$ — элементы некоторой группы G, то естественным образом определяется значение $w(a_1, a_2, \ldots)$ слова $w(x_1, x_2, \ldots)$ на этом наборе элементов $a_1, a_2, \ldots$ — надо вместо каждой буквы x_i подставить элемент a_i, вместо x_i^{-1} подставить a_i^{-1} и всё перемножить. Например, если в качестве G взять симметрическую группу S_3, а в качестве слова w взять *коммутатор* $w(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \overset{\text{опр}}{=} x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$, то значением этого слова на паре транспозиций будет тройной цикл: $w((12), (23)) = (12)^{-1}(23)^{-1}(12)(23) = (321)$.

Если значение слова $w(x_1, x_2, \ldots)$ на наборе элементов $a_1, a_2, \ldots$ равно единице в группе G, то говорят, что элементы $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяют *соотношению* $w(x_1, x_2, \ldots) = 1$. Иногда, соотношением мы будем для краткости называть само слово $w(x_1, x_2, \ldots)$, написанное в левой части этого равенства.

При работе с соотношениями используют обычные сокращения. Например, соотношение $x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_2x_2 = 1$ можно записать в виде $(x_1^{-1}x_2)^2x_2^2 = 1$ или $(x_1^{-1}x_2)^2 = x_2^{-2}$.

Что такое следствие соотношений?

Бывает так, что какое-то соотношение следует из других соотношений. Например, соотношение коммутативности $xy = yx$ следует из соотношений $x^2 = 1$, $y^2 = 1$ и $(xy)^2 = 1$. Действительно, эти равенства означают, что элементы x, y и xy совпадают со своими обратными. С другой стороны, в любой группе имеет место тождество $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Таким образом, $xy = yx$, что и требовалось.

Следующее определение выглядит вполне естественным.

Семантическое определение следствия. Соотношение $w(x_1, x_2, \ldots) = 1$ называют *следствием* семейства соотношений $\mathcal{V}$, если в любой группе G любой набор элементов, удовлетворяющий всем соотношениям семейства $\mathcal{V}$, удовлетворяет также соотношению $w(x_1, x_2, \ldots) = 1$.

Мы назвали это определение семантическим, поскольку в нём речь идёт о смысле определяемого понятия. Определения, в которых не упоминается смысл, а говорится только о внешнем виде, о формальных признаках, называют синтаксическими. Например, если мы скажем, что *хороший студент* — это студент, который интересуется наукой и способен решать нетривиальные задачи, то это будет семантическое определение. Если же мы скажем, что *хороший студент* — это студент, у которого в зачётке нет троек, то это будет синтаксическое определение. Разумеется, эти два определения неэквивалентны. Вряд ли вам удастся придумать удовлетворительные синтаксические определения таких понятий, как *интересная книга, красивая женщина, трудная задача* и т.п. В математике форма и содержание более тесно связаны, чем в реальной жизни. В частности, понятие следствия можно определить чисто синтаксически. Для этого нам понадобится кое-какая нехитрая техника работы со словами. Слово в алфавите $X^{\pm 1}$ называется *несократимым*, если оно не содержит подслов вида xx^{-1} и $x^{-1}x$, где $x \in X$. Несократимое слово, полученное из слова w последовательным вычёркиванием двухбуквенных подслов указанного вида, мы будем называть *несократимой формой* слова w и обозначать НФ(w). Нетрудно проверить, что несократимая форма любого слова определена однозначно (то есть окончательный результат сокращений не зависит от того, в каком порядке эти сокращения производятся). Слово, полученное из слова u приписыванием к нему справа слова v, мы будем обозначать uv. *Формально обратным* к слову $u = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\ldots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_i \in X$ и $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, называют слово $u^{-1} \overset{\text{опр}}{=} x_n^{-\varepsilon_n}x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}}\ldots x_1^{-\varepsilon_1}$.

Синтаксическое определение следствия. Соотношение $w(x_1, x_2, \ldots) = 1$ называют *следствием* семейства соотношений $\mathcal{V}$, если найдутся неотрицательное целое число k, слова $v_i \in \mathcal{V}$, слова u_i в алфавите $\{x_1, x_2, \ldots\}$ и числа $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ такие, что

$$\text{НФ}(w) = \text{НФ}\left(u_1^{-1} v_1^{\varepsilon_1} u_1 u_2^{-1} v_2^{\varepsilon_2} u_2 \ldots u_k^{-1} v_k^{\varepsilon_k} u_k\right).$$

При $k = 0$ правая часть этого равенства по определению считается пустым словом.

Два определения следствия на самом деле эквивалентны. В частности, продолжая пример, с которого мы начали этот параграф, несложно показать, что соотношение $xy = yx$ является синтаксическим следствием соотношений $x^2 = 1$, $y^2 = 1$ и $(xy)^2 = 1$. Действительно, это вытекает из следующего представления коммутатора в виде произведения трёх квадратов:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = \text{НФ}\left(x^{-2}xy^{-2}x^{-1}(xy)^2\right). \qquad (*)$$

Утверждение 1. *Для любого семейства соотношений $\mathcal{V}$ множество синтаксических следствий этих соотношений совпадает с множеством семантических следствий.*

Доказательство. То, что каждое синтаксическое следствие является семантическим, совершенно очевидно. Если для элементов $a_1, a_2, \ldots$ некоторой группы G справедливы равенства $v_i(a_1, a_2, \ldots) = 1$, то справедливы также равенства $u_i(a_1, a_2, \ldots)^{-1}(v_i(a_1, a_2, \ldots))^{\pm 1} u_i(a_1, a_2, \ldots) = 1$ и, следовательно, верно равенство

$$\prod_i u_i(a_1, a_2, \ldots)^{-1}(v_i(a_1, a_2, \ldots))^{\pm 1} u_i(a_1, a_2, \ldots) = 1.$$

А переход к несократимой форме вообще не меняет значений слов в группе G.

Для доказательства обратной импликации рассмотрим множество всех слов в нашем групповом алфавите как полугруппу относительно операции приписывания. Назовём слова u и v *эквивалентными* и будем писать $u \sim v$, если соотношение $uv^{-1} = 1$ является синтаксическим следствием соотношений семейства $\mathcal{V}$. Это отношение эквивалентности согласовано с операцией приписывания, то есть

$$u \sim u_1,\ v \sim v_1 \Longrightarrow uv \sim u_1 v_1.$$

Значит, на множество классов эквивалентности корректно определена операция приписывания, относительно которой это множество G будет полугруппой и даже группой, поскольку $uu^{-1} \sim 1$ (символом 1 мы здесь обозначаем пустое слово). При этом однобуквенные слова (точнее, их классы эквивалентности) удовлетворяют всем соотношениям семейства $\mathcal{V}$. Значит, каждое семантическое следствие $w = 1$ этих соотношений также должно выполняться на однобуквенных словах. Но по построению это возможно лишь в том случае, когда $w = 1$ является синтаксическим следствием рассматриваемых соотношений. Детальное доказательство мы оставляем читателям в качестве несложного упражнения.

Синтаксическое определение, в отличие от семантического, делает совершенно очевидным следующий факт.

Теорема компактности. *Каждое следствие семейства соотношений является следствием некоторого конечного подсемейства этого семейства.*

При чём тут геометрия?

Всё, что мы говорили до сих пор о группах, легко переносится на другие алгебраические системы. Заинтересованный читатель может самостоятельно сформулировать и доказать аналогичные факты о соотношениях между элементами, например, кольца или алгебры.

Отличительная черта теории групп, о которой пойдёт речь в этом параграфе, состоит в наличии геометрической интерпретации вывода следствий из соотношений. Эта особенность теории групп позволяет задействовать геометрическую интуицию при решении чисто алгебраических задач.

Начнём с примера. На рисунке 1 слева нарисован четырёхугольник, рёбра которого ориентированы (то есть на них имеются стрелки) и помечены буквами x и y. На границе этого четырёхугольника написан коммутатор $[x, y]$, то есть мы прочитаем слово $x^{-1}y^{-1}xy$, если будем обходить границу этого четырёхугольника против часовой стрелки (начав с правой верхней вершины) и читать метки рёбер, причём вместо букв x и y читать x^{-1} и y^{-1}, соответственно, в тех случаях, когда мы проходим соответствующее ребро против стрелки. Если мы склеим четыре таких четырёхугольника, как показано на рисунке 1 справа, то получим диаграмму, на границе которой написан коммутатор $[x^2, y^2]$, то есть $x^{-2}y^{-2}x^2y^2$. Этот рисунок, как мы увидим, может служить доказательством того, что соотношение $[x^2, y^2] = 1$ является следствием соотношения $[x, y] = 1$. Более того, у любого следствия любого набора соотношений существует такое геометрическое доказательство.

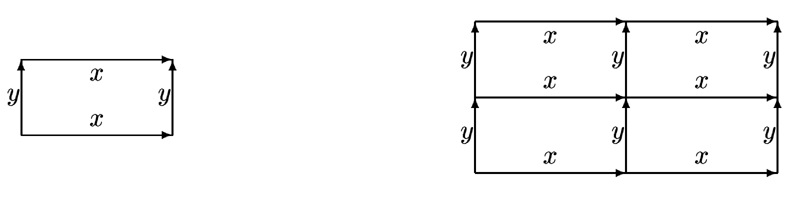


Рис. 1

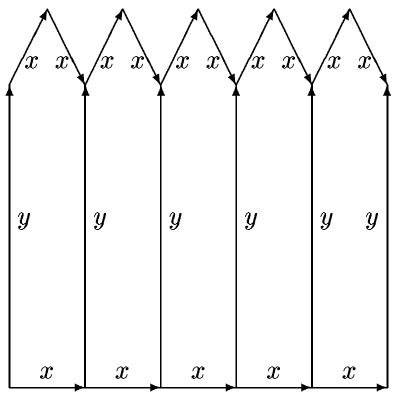
Необходимые определения выглядят следующим образом. *Картой* мы будем называть конечный связный плоский (то есть нарисованный на плоскости) граф. Такой граф делит плоскость на конечное число областей, называемых *клетками*, ровно одна из которых неограничена. Неограниченную клетку называют *внешней*, остальные клетки называют *внутренними*. Границу внешней клетки называют также *границей карты*. Под *длиной* пути (составленного из рёбер) между двумя вершинами в графе понимается число рёбер на этом пути.

Пусть X — некоторый алфавит и $\mathcal{V}$ — некоторый набор слов (соотношений) в алфавите $X^{\pm 1}$. Допустим, что у нас имеется карта, рёбра которой ориентированы (то есть на них нарисованы стрелки) и помечены буквами алфавита X. Под *меткой клетки* мы понимаем слово в алфавите $X^{\pm 1}$, которое читается при обходе границы этой клетки против часовой стрелки (при этом буквы, отвечающие рёбрам, которые проходятся против направления ребра, следует заменять на обратные). Метка клетки определена с точностью до циклического сдвига.

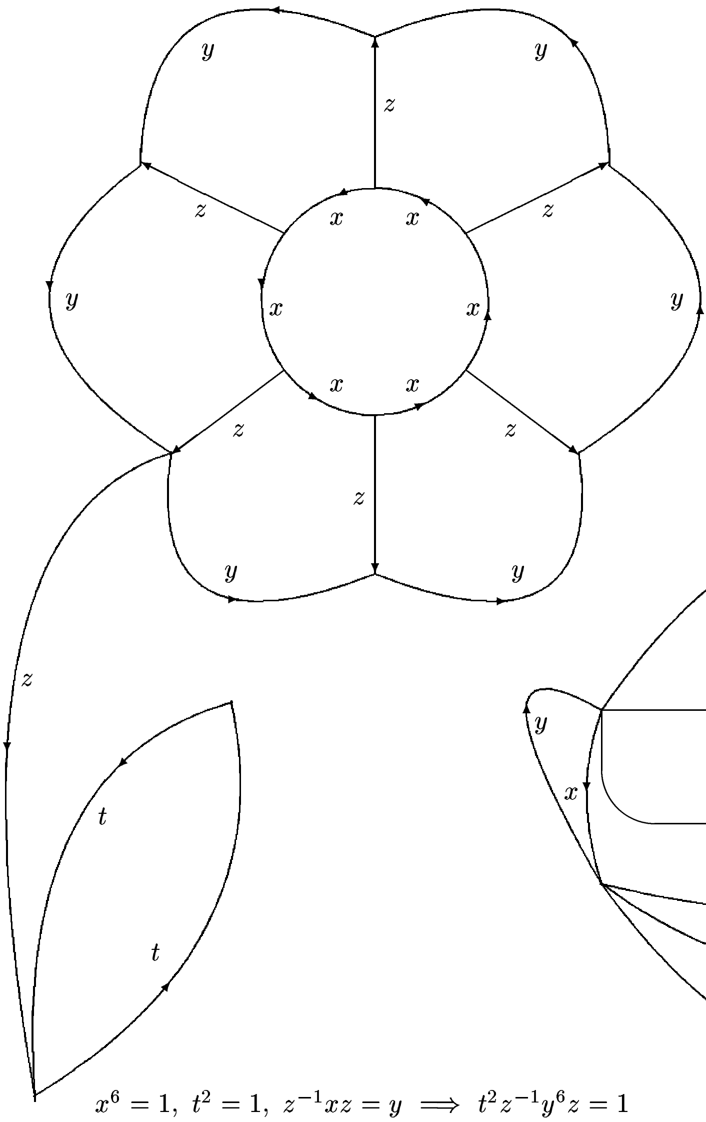
Такая размеченная карта называется *диаграммой ван Кампена* над набором соотношений $\mathcal{V}$, если метка каждой внутренней клетки является либо одним из соотношений набора $\mathcal{V}$, либо формально обратным к соотношению из $\mathcal{V}$.

Геометрическое определение следствия. Соотношение $w = 1$ называют *следствием* семейства соотношений $\mathcal{V}$, если w является меткой внешней клетки некоторой диаграммы ван Кампена над семейством $\mathcal{V}$.

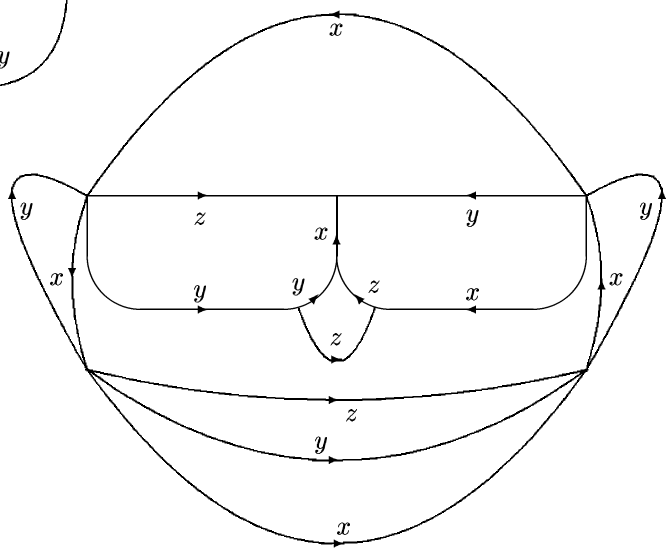
На рисунке 2 изображено несколько примеров «геометрических импликаций». Что нарисовано справа внизу, догадайтесь сами.



$y^{-1}xy = x^2 \Longrightarrow y^{-1}x^5y = x^{10}$



$x^6 = 1,\ t^2 = 1,\ z^{-1}xz = y \implies t^2z^{-1}y^6z = 1$



$? \Longrightarrow ?$

Рис. 2

Лемма ван Кампена. *Для любого семейства соотношений $\mathcal{V}$ множество геометрических следствий этих соотношений совпадает с множеством синтаксических* (а значит, и семантических) *следствий.*

Мы не будем доказывать эту лемму, но рассмотрим один пример. Формула $(*)$ показывает, что соотношение $[x, y] = 1$ является синтаксическим следствием соотношений $x^2 = 1$, $y^2 = 1$ и $(xy)^2 = 1$. На рисунке 3 слева показана диаграмма, состоящая из отдельных клеток с хвостиками, на границе которой написано слово $x^{-2}xy^{-2}x^{-1}(xy)^2$, фигурирующее в правой части формулы $(*)$.

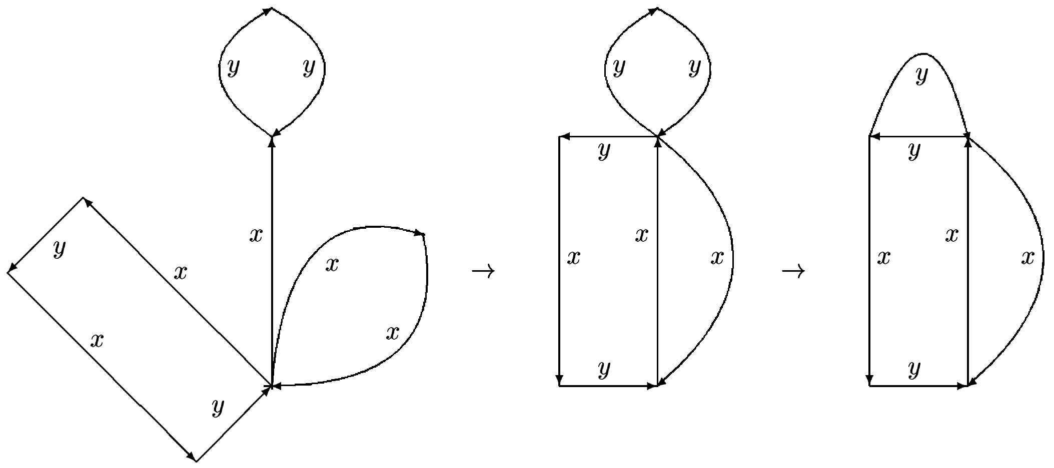


Рис. 3

Произведя «схлопывания» (рис. 4), мы получим диаграмму, изображённую на рисунке 3 справа, на контуре которой написан коммутатор $[x, y]$. Тем самым мы показали, что данное синтаксическое следствие является геометрическим.

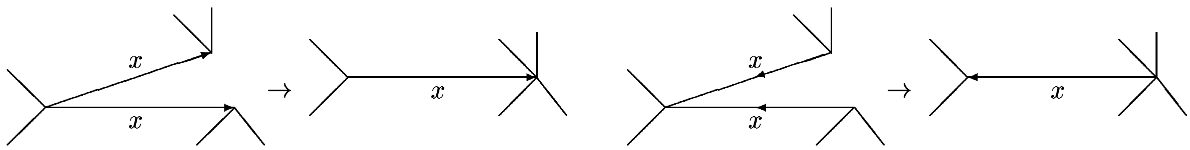


Рис. 4

Если мы хотим, наоборот, показать, что геометрическое следствие является синтаксическим, мы должны «расчленить» данную диаграмму на отдельные клетки с хвостиками. На рисунке 5 показано, как расчленяется диаграмма, изображённая на рисунке 1.

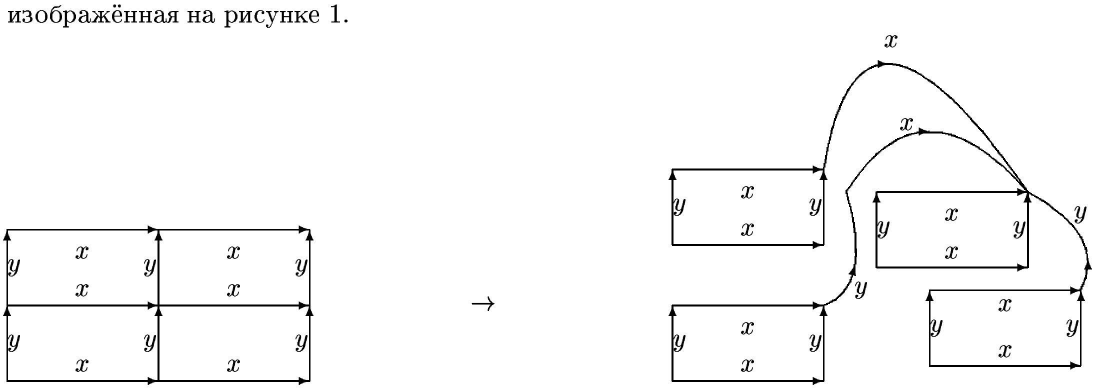


Рис. 5

Расчленённая диаграмма даёт следующее выражение коммутатора $[x^2, y^2]$ через сопряжённые к простым коммутаторам:

$$[x^2, y^2] = \left(x^{-1}[x, y]x\right) \cdot \left((yx)^{-1}[x, y](yx)\right) \cdot [x, y] \cdot \left(y^{-1}[x, y]y\right).$$

В качестве упражнения мы предлагаем читателю расчленить диаграмму, изображённую на рисунке 6 (заимствованном из книжки [Оль89]), и получить представления коммутатора $[[x, y], y]$ в виде произведения четырёх кубов. Из возможности такого представления нетрудно вывести, что каждая конечно порождённая группа, в которой все неединичные элементы имеют порядок три, является конечной (и разрешимой).

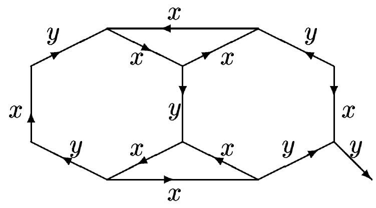


Рис. 6

Условия малого сокращения

На самом деле, проверить, что что-то является следствием чего-то, — это не самая трудная задача. Гораздо труднее бывает доказать, что что-то НЕ следует из чего-то. Для доказательства отсутствия импликации нужно построить группу, в которой некоторые соотношения выполняются, а некоторые нет. Например, посмотрев на симметрическую группу S_3 и две транспозиции в ней, можно сделать вывод, что соотношение $[x,y]^{2008}=1$ не является следствием соотношений $x^2=1$ и $y^2=1$.

Беда, однако, в том, что построить группу с нужными свойствами бывает не так просто. Более того, может случиться, что никакие традиционные примеры групп заведомо не годятся для достижения нужной цели. Например, импликация

$$y^{-1}x^2y=x^3 \Longrightarrow [y^{-1}xy,x]=1$$

выполняется в каждой конечной группе (докажите!) и в каждой линейной группе (то есть в группе невырожденных матриц над полем), но, тем не менее, эта импликация неверна в классе всех групп. Другими словами, существует очень хитрая группа, в которой для некоторых двух элементов первое соотношение выполняется, а второе нет.

Геометрическая интерпретация вывода следствий из соотношений может помочь доказать отсутствие некоторых импликаций. Самым известным инструментом здесь является *теория малых сокращений*, простейший вариант которой мы рассмотрим в этом параграфе.

Возьмём некоторый набор соотношений $\mathcal{V}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все соотношения несократимы и набор $\mathcal{V}$ является ***симметризованным***, то есть вместе с каждым соотношением $v\in\mathcal{V}$ набор $\mathcal{V}$ содержит формально обратное соотношение v^{-1} и все циклические перестановки соотношения v. Это предположение не ограничивает общности, поскольку и формально обратное соотношение, и циклические перестановки соотношения являются очевидными следствиями исходного соотношения.

Скажем, что симметризованный набор слов (соотношений) $\mathcal{V}$ удовлетворяет *условию малого сокращения* $C'(\lambda)$, где λ — некоторое положительное вещественное число, если для любых двух различных слов v_1 и v_2 из набора $\mathcal{V}$ длина их общего начала меньше, чем $\lambda\cdot|v_1|$.

Рассмотрим, например, набор соотношений

$$\begin{matrix} x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy=1, & y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}=1, & xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}=1, & yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x=1,\\ y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}yx=1, & x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}=1, & yxy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}=1, & xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y=1,\end{matrix} \qquad (**)$$

получающийся симметризацией из соотношения $[x,y]^2=1$. Каждое из слов этого набора имеет длину 8, а общее начало двух слов этого набора состоит не более чем из одной буквы. Таким образом, этот набор удовлетворяет условию $C'(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lambda>\frac{1}{8}$.

Следующий результат представляет собой простейший (и важнейший) частный случай известной *леммы Гриндлингера.**)

Основная теорема. *Если симметризованный набор соотношений $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$ и соотношение $w=1$, где w — непустое несократимое слово, является следствием набора соотношений $\mathcal{V}$, то некоторая циклическая перестановка слова w имеет с одним из слов $v\in\mathcal{V}$ общее начало u, длина которого больше, чем половина длины слова v:*

$$|u|>\frac{|v|}{2}.$$

Например, из этой теоремы следует, что соотношение $[x^{2008},y^{2008}]^{2008}=1$ не является следствием соотношения $[x,y]^2=1$. Действительно, набор соотношений (**), получающийся из соотношения $[x,y]^2=1$ симметризацией удовлетворяет, как мы видели, условию $C'(\frac{1}{6})$; следовательно, согласно основной теореме у каждого следствия есть циклическая перестановка, несократимая форма которого обладает с одним из соотношений набора (**) общим подсловом длины большей, чем $\frac{8}{2}=4$. Но максимальные общие подслова циклических перестановок слова $[x^{2008},y^{2008}]^{2008}$ и слов набора (**) имеют длину два (это слова $x^{-1}y^{-1}$, $y^{-1}x$, xy и yx^{-1}). Таким образом, мы получаем следующий факт.

*) Мартин Давидович Гриндлингер (Martin Greendlinger) родился в Нью-Йорке в 1932 году. После защиты диссертации переехал в СССР, долгое время работал в Тульском и Ивановском педагогических институтах; потом вернулся в США. Много информации о его жизни можно найти в рассекреченных архивах ФБР.

Следствие. *Существует группа G, в которой для некоторых двух элементов $a, b \in G$*

$$[a,b]^2 = 1, \quad \textit{но} \quad [a^{2008}, b^{2008}]^{2008} \neq 1.$$

Подобных следствий, разумеется, мы можем получить сколько угодно. На самом деле, можно сказать даже больше:

если конечный симметризованный набор соотношений $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, то для любого соотношения $w = 1$ мы можем быстро определить, является ли оно следствием набора соотношений $\mathcal{V}$.

Действительно, посмотрим на все циклические перестановки слова w. Если ни одна из них не имеет ни с одним из слов v набора $\mathcal{V}$ общего начала длины большей, чем $|v|/2$, то, в силу основной теоремы, мы заключаем, что соотношение $w = 1$ не является следствием соотношений данного набора.

Рассмотрим теперь случай, когда слово w (или какая-то его циклическая перестановка) имеет длинное общее начало u с одним из соотношений $v \in \mathcal{V}$:

$$w \equiv uf, \quad \mathcal{V} \ni v \equiv ug, \quad |u| > |g|.$$

В этом случае соотношение $v = 1$ может быть переписано в виде $u = g^{-1}$, и соотношение $w = 1$ (то есть $uf = 1$) является следствием соотношений из $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда таким следствием является соотношение $g^{-1}f = 1$. Но это соотношение короче чем исходное, поэтому, заменив слово w на слово $g^{-1}f$ и повторив эту процедуру несколько раз, в конце концов мы получим ответ. Мы либо придём к пустому слову и таким образом установим, что $w = 1$ является следствием набора соотношений $\mathcal{V}$, либо получим слово, не имеющее длинных общих подслов со словами набора $\mathcal{V}$ и заключим, что $w = 1$ не является следствием соотношений набора $\mathcal{V}$. Этот простой метод выявления следствий называется *алгоритмом Дэна.*

Для доказательства основной теоремы вам понадобится одно общее наблюдение, касающееся диаграмм ван Кампена. Если в диаграмме есть две клетки, имеющие общее ребро и «зеркально симметричные» относительно этого ребра (рис. 7, слева), то такую пару клеток называют *сократимой парой.* Дело в том, что сократимую пару всегда можно сократить, как показано на рисунке 7. Поэтому диаграммы, о которых идёт речь в определении геометрического следствия, можно считать *приведёнными*, то есть не содержащими сократимых пар.

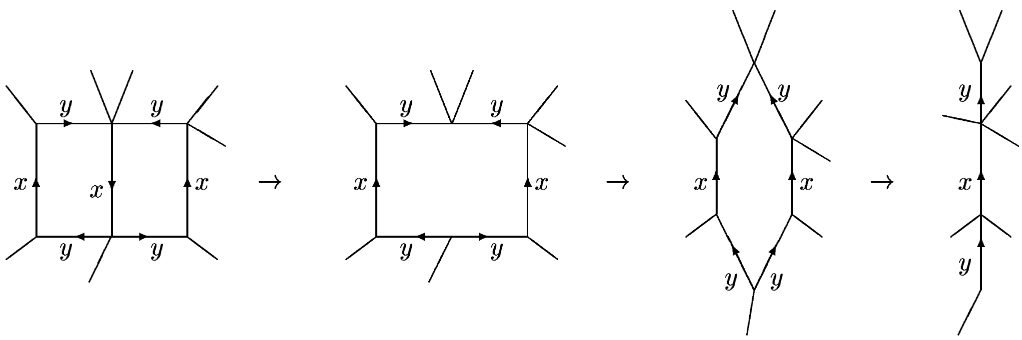


Рис. 7

В приведённой диаграмме ван Кампена над набором соотношений, удовлетворяющим условию $C'(\frac{1}{6})$, никакие две внутренние клетки не могут иметь общего участка границы, длина которого больше или равна $\frac{1}{6}$ периметра одной из этих клеток. Это замечание подсказывает следующее определение.

Если некоторая карта не имеет вершин степени один (то есть каждая вершина лежит по крайней мере на двух рёбрах) и каждый связный общий участок границы любых двух внутренних клеток карты имеет длину (в смысле количества рёбер) меньше, чем $\frac{1}{6}$ от периметра каждой из этих клеток, то про такую карту говорят, что она *удовлетворяет условию* $C'(\frac{1}{6})$.

С учётом сделанного выше замечания основная теорема сводится к следующему простому, чисто геометрическому факту.

Утверждение 2. *Пусть имеется карта, удовлетворяющая условию $C'(\frac{1}{6})$. Тогда найдётся клетка, граница которой имеет общий связный участок с границей всей карты, длина которого больше, чем половина периметра этой клетки.*

На рисунке 8 мы изобразили некоторую карту. Эта карта удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, поскольку каждая клетка имеет периметр либо 7, либо 8, а любые две клетки имеют не более одного общего ребра. На каждой клетке написано, какой частью периметра клетка выходит на границу карты. Как мы видим, среди этих чисел есть такие, которые больше $\frac{1}{2}$. Если мы попытаемся дорисовать эту карту и «прикрыть» сильно выступающие клетки, то возникнут новые сильно выступающие клетки, и ничего у нас не получится. Проделав такие эксперименты, читатель непременно заметит, что карты с условием $C'(\frac{1}{6})$ трудно рисовать на листе бумаги. Геометрия таких карт похожа на геометрию плоскости Лобачевского.

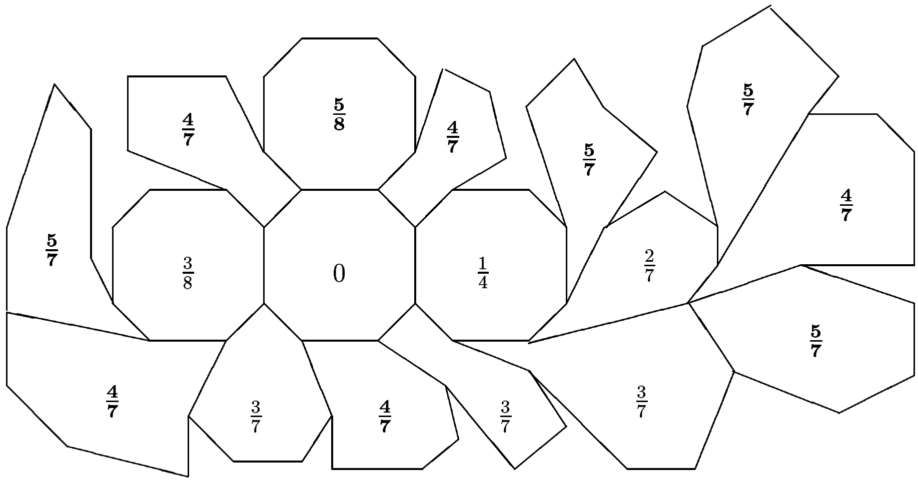


Рис. 8

Константу $\frac{1}{6}$ в утверждении 2 нельзя уменьшить. На рисунке 9 слева изображена карта, в которой общий участок границы любых двух клеток составляет не более $\frac{1}{6}$ от периметра каждой из них, но ни одна клетка не выходит на границу карты более чем половиной своего периметра. Совсем безнадёжная ситуация изображена на рисунке 9 справа. Общий участок границы двух клеток составляет не более $\frac{1}{5}$ от периметра каждой из них, но на границу карты клетки выходят совсем маленькими частями своих периметров.

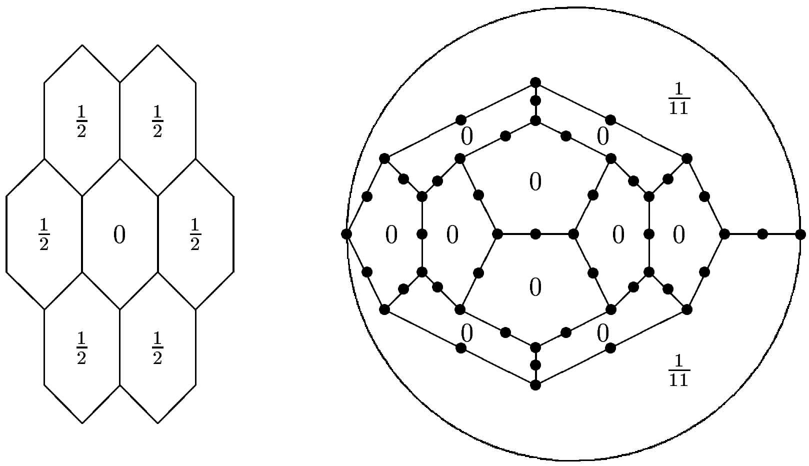


Рис. 9

Ещё раз подчеркнём, что длина пути в графе понимается как число рёбер на этом пути. Другими словами, мы меряем длины не линейкой, а просто отсчитывая число рёбер. На рисунке 9 справа мы отметили все вершины для удобства измерений. В частности, длина окружности (то есть периметр внешней клетки) на этом рисунке равна двум, а периметр каждой внутренней клетки, кроме верхней и нижней, равен десяти.

Углы, кривизны и доказательство утверждения 2

Рассмотрим некоторую клетку D карты и вершину v, лежащую на границе этой клетки. Такую пару α мы будем называть *углом клетки D при вершине v*. Число углов при каждой вершине совпадает со степенью этой вершины (то есть с числом рёбер, исходящих из неё), а число углов клетки совпадает с периметром этой клетки.

Следующее простое, но полезное утверждение называют иногда *весовым тестом*.

Лемма. *Если каждому углу α каждой клетки некоторой карты поставлено в соответствие число $\nu(\alpha)$* (которое мы будем называть *величиной угла α*), *то*

$$\sum_v K(v) + \sum_D K(D) = 4. \qquad (***)$$

Здесь суммирования распространяются на все вершины v и все клетки D рассматриваемой карты, а величины $K(v)$ и $K(D)$, называемые кривизнами соответствующей вершины и клетки, определяются так:

$$K(v) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_\alpha \nu(\alpha), \qquad K(D) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_\alpha (1 - \nu(\alpha)),$$

где первая сумма распространяется на все углы при вершине v, а вторая — на все углы клетки D.

Доказательство. Заметим, что результат суммирования (∗∗∗) не зависит от величин углов. Действительно, если α — угол клетки D при вершине v, то величина $\nu(\alpha)$ входит в сумму (∗∗∗) два раза: один раз со знаком минус, когда мы считаем кривизну вершины v, а другой раз со знаком плюс, когда мы считаем кривизну клетки D.

Таким образом, равенство (∗∗∗) достаточно доказать для случая, когда все величины углов равны единице. В этом случае наше равенство принимает вид

$$2 \cdot (\textit{число вершин}) - (\textit{сумма степеней всех вершин}) + 2 \cdot (\textit{число клеток}) = 4.$$

Сумма степеней всех вершин совпадает с удвоенным числом рёбер карты. Поэтому доказываемое равенство сводится к формуле Эйлера

$$(\textit{число вершин}) - (\textit{число рёбер}) + (\textit{число клеток}) = 2,$$

которая легко доказывается по индукции.

Величины $\nu(\alpha)$ можно представлять себе как обычные величины углов, измеренные в радианах, умноженных на π. Нулевая кривизна будет тогда соответствовать обычной евклидовой геометрии (например, сумма всех углов треугольника будет равна единице); отрицательная кривизна делает ситуацию похожей на геометрию Лобачевского, а положительная кривизна — на сферическую геометрию.

Приступим теперь к доказательству утверждения 2. Пусть у нас имеется карта, удовлетворяющая условию $C'(\frac{1}{6})$. Припишем углам величины по следующим правилам:

а) всем углам внешней клетки припишем величину 1;

б) углу внутренней клетки, находящемуся при вершине степени $d = k+l$, при которой имеется k углов внешней клетки и l углов внутренних клеток, припишем величину $\frac{2-k}{l}$.

Из этих правил вытекает, что

- каждая вершина имеет нулевую кривизну;
- внешняя клетка имеет кривизну 2.

Согласно лемме это означает, что должна найтись внутренняя клетка с положительной кривизной.

Внутренняя клетка, не граничащая с внешней, будет иметь отрицательную кривизну, поскольку из условия $C'(\frac{1}{6})$ следует, что у такой клетки будет по крайней мере 7 соседних клеток и, следовательно, по крайней мере 7 её углов имеют величину $\leqslant \frac{2}{3}$, а величины остальных углов не превосходят единицу (рисунок 10, слева). Вообще, несложно заметить, что кривизна внутренней клетки D может быть положительной лишь в случае, когда эта клетка имеет ровно один связный участок общей границы с внешней клеткой и граничит ещё не более чем с тремя внутренними клетками. Из условия $C'(\frac{1}{6})$ следует, что в таком случае клетка D выходит на границу всей карты более чем половиной своего периметра, что и доказывает утверждение 2, а вместе с ним и основную теорему.

На рисунке 10 представлены некоторые из возможных вариантов расположения внутренней клетки относительно внешней. В центре клетки написана её кривизна.

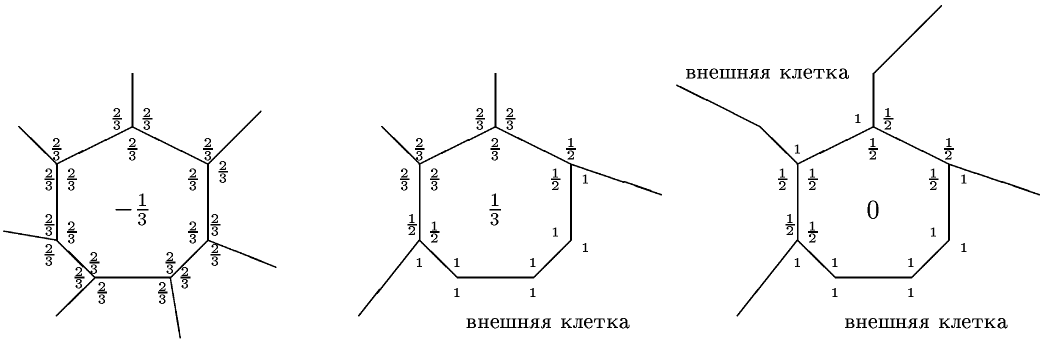


Рис. 10

Познакомиться поближе с теорией малых сокращений, её обобщениями и применением других геометрических соображений в комбинаторной теории групп можно по книгам [ЛШ80] и [Оль89].

Автор очень признателен А. Ю. Ольшанскому, который нашёл несколько существенных неточностей в предварительной версии этой статьи. Автор благодарит также Д. В. Баранова, А. О. Захарова, О. В. Куликову, Е. В. Френкель и других участников семинара по теории групп МГУ за то, что они любезно согласились прочитать этот текст и высказать свои замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980.
[Оль89] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989.