УДК 512.543.7+512.543.16

SQ-УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОПРЕДСТАВЛЕНИЙ С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119992, Ленинские горы, МГУ
klyachko@daniil.math.msu.su

Если к нетривиальной группе без кручения добавить два образующих и одно произвольное соотношение, то всегда получится SQ-универсальная группа. По ходу доказательства этого утверждения мы устанавливаем ещё несколько фактов, имеющих самостоятельный интерес. Например, если к свободному произведению двух нетривиальных групп без кручения добавить один образующий и одно соотношение с единичной суммой показателей степеней при добавленном образующем, то также получится SQ-универсальная группа.
Ключевые слова: относительные копредставления, группы с одним соотношением, SQ-универсальность, уравнения над группами.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *SQ-универсальной*, если каждая счётная группа может быть вложена в некоторую факторгруппу группы G. SQ-универсальными являются все неабелевы свободные группы; все группы, раскладывающиеся нетривиальным образом в свободное произведение, кроме бесконечной диэдральной группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (см. [ЛШ80]); многие свободные произведения с объединёнными подгруппами и HNN-расширения ([Ло86], [ЛШ80]); все подгруппы конечного индекса SQ-универсальных групп и все почти SQ-универсальные группы [Neu73]; все неэлементарные гиперболические группы [Оль95] и даже все (кроме некоторых очевидных исключений) относительно гиперболические группы, в частности, все группы с бесконечным числом концов [AMO06].

Отправной точкой нашего исследования служит следующая теорема.

Теорема Сасердота–Шуппа [SaSc74] (см. также [ЛШ80]). *Группа с одним соотношением и по меньшей мере тремя образующими SQ-универсальна.*

На самом деле имеет место значительно более общий факт.

Теорема Баумслага–Прайда [BaPr78]. *Группа, обладающая копредставлением, в котором число образующих по меньшей мере на два больше числа соотношений, SQ-универсальна. Более того, каждая такая группа является большой в смысле Громова, то есть обладает подгруппой конечного индекса, допускающей эпиморфизм на неабелеву свободную группу.*

Дальнейшим обобщением теоремы Сасердота–Шуппа является следующий результат.

Теорема Штёра–Громова [St83], [Gr83]. *Группа, обладающая копредставлением, в котором число образующих больше числа соотношений и одно из соотношений есть истинная степень, является SQ-универсальной и даже большой в смысле Громова.**)

Дальнейшие результаты на эту тему можно найти, например, в работах [Ed84], [How98], [Bu05], [La05], [OlOs06]. В этой статье мы обобщаем теорему Сасердота–Шуппа в несколько ином направлении.

Пусть G — некоторая группа. Под группой, заданной относительным копредставлением с одним соотношением над группой G, понимается группа

$$\widetilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1 \rangle \stackrel{\text{опр}}{=} G * F(x_1, x_2, \ldots, x_n) / \langle\langle w \rangle\rangle .$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — буквы (не лежащие в G) и w — произвольное слово в алфавите $G \cup \{x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}\}$ (которое можно трактовать как элемент свободного произведения $G * F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ группы G и свободной группы с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Другими словами, копредставление группы $\widetilde{G}$ получается из копредставления $G = \langle A \mid R \rangle$ группы G добавлением нескольких новых образующих и одного соотношения: $\widetilde{G} = \langle A \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid R \cup \{w\} \rangle$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №05-01-00895.

*) Под *истинной степенью* мы понимаем элемент свободной группы F вида u^k, где $u \in F$ и $\mathbb{Z} \ni k \geqslant 2$. В частности, единица является истинной степенью, поэтому теорема Штёра–Громова является обобщением теоремы Баумслага–Прайда.

Теорема 1. *Если G — нетривиальная группа без кручения и $n \geqslant 2$, то группа $\widetilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1\rangle$ является SQ-универсальной при любом $w \in G * F(x_1, \ldots, x_n)$.*

Следствие [Кл06b]. *В условиях теоремы 1 группа $\widetilde{G}$* (как и всякая SQ-универсальная группа) *обладает неабелевыми свободными подгруппами.*

Замечание 1. Нетрудно показать, что группа $\widetilde{G}$ из теоремы 1 уже не обязана быть большой в смысле Громова.

Замечание 2. Разумеется, при $n = 1$ утверждение теоремы 1 перестаёт быть верным (равно как и утверждение теоремы Сасердота–Шуппа перестаёт быть верным для групп с двумя порождающими). Однако некоторыми свойствами, более слабыми, чем SQ-универсальность, группа $\widetilde{G}$ при $n = 1$ всё же обладает. В частности, она нетривиальна [Kl93], не является неабелевой простой группой (если $w \neq g_1 x_1^{\pm 1} g_2$) [Кл05], естественное отображение $G \to \widetilde{G}$ несюръективно (если $w \neq g_1 x_1^{\pm 1} g_2$) [CR01]; а в случае, когда сумма показателей степеней при x_1 в слове w равна ± 1, группа $\widetilde{G}$ всегда (кроме нескольких очевидных исключений) содержит неабелеву свободную подгруппу [Кл06b].

Теорема 1 говорит об относительных копредставлениях по меньшей мере с двумя дополнительными порождающими, однако важную роль в её доказательстве играет изучение однопорождённых относительных копредставлений

$$\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1\rangle \overset{\text{опр}}{=} (G * \langle t\rangle_\infty) / \langle\langle w\rangle\rangle, \quad \text{где } w \equiv \prod g_i t^{\varepsilon_i}, \ g_i \in G, \ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}. \tag{1}$$

Такое копредставление называется *унимодулярным*, если $\sum \varepsilon_i = \pm 1$. Известно, что унимодулярные относительные копредставления обладают многими хорошими свойствами и лучше поддаются изучению (см., например, [Kl93], [Кл94], [FeR96], [CR01], [FoR05], [Кл05], [Кл06a], [Кл06b]).

В работе [Кл06a] было предложено следующее обобщение понятия унимодулярности на так называемые *обобщённые относительные копредставления*

$$\widetilde{G} = \left\langle G * T \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n} g_i t_i = 1 \right\rangle \overset{\text{опр}}{=} (G * T) \Big/ \left\langle\!\!\left\langle \prod g_i t_i \right\rangle\!\!\right\rangle. \tag{$*$}$$

Здесь T — произвольная (то есть не обязательно циклическая) группа, $g_i \in G$ и $t_i \in T$; слово $\prod\limits_{i=1}^{n} g_i t_i$ мы считаем циклически несократимым.

Обобщённое относительное копредставление $(*)$ над группой G называется *унимодулярным*, если
1) $\prod t_i$ является элементом бесконечного порядка в группе T;
2) циклическая подгруппа $\langle \prod t_i \rangle$ нормальна в T;
3) факторгруппа $T / \langle \prod t_i \rangle$ является группой с сильно однозначным умножением.

Напомним, что группа H называется *группой с однозначным умножением* (или *UP-группой*), если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ их произведение XY содержит по крайней мере один элемент, раскладывающийся в произведение элемента из X и элемента из Y однозначно.*)

Мы называем группу H *группой с сильно однозначным умножением*, если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ таких, что $|Y| \geqslant 2$, их произведение XY содержит по крайней мере два однозначно разложимых элемента $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ таких, что $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$.

Насколько мы знаем, все известные примеры UP-групп обладают сильно однозначным умножением. Например, этим свойством обладают все правоупорядочиваемые группы, локально индикабельные группы, диффузные группы в смысле Бовдича.

Теорема 1 легко выводится из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть обобщённое относительное копредставление $(*)$ над нециклической группой без кручения G унимодулярно и группа T не является циклической. Тогда группа $\widetilde{G}$, заданная копредставлением $(*)$, является SQ-универсальной.*

Для доказательства теоремы 2 мы устанавливаем следующий факт об обычных (необобщённых) унимодулярных относительных копредставлениях:

---

*) Одно время была гипотеза, что всякая группа без кручения является группой с однозначным умножением (обратное, очевидно, верно). Однако выяснилось, что существует контрпример ([P88], [RS87]).

Теорема 3. *Если $G_1, \ldots, G_l$ — нециклические группы без кручения, $l \geqslant 2$ и относительное копредставление $L = \langle G_1 * \ldots * G_l, t \mid w = 1\rangle$ над группой $G_1 * \ldots * G_l$ унимодулярно, то группа L является SQ-универсальной. Более того, каждая счётная группа S вкладывается в некоторую факторгруппу L/N, в которой выполняется теорема о свободе, то есть*

$$\left\langle t, G_{i_1}, \ldots, G_{i_{l-1}} \right\rangle = \langle t\rangle_\infty * G_{i_1} * \ldots * G_{i_{l-1}} \quad \text{в группе } L/N,$$

если слово w не сопряжено в группе $\langle t\rangle_\infty * G_1 * \ldots * G_l$ никакому элементу подгруппы $\langle t\rangle_\infty * G_{i_1} * \ldots * G_{i_{l-1}}$.

Согласно [Кл06а] мы говорим, что копредставление (1) является *магнусовым*, если естественное отображение $G \to \widetilde{G}$ инъективно и в группе $\widetilde{G}$ имеет место разложение $\langle H, t\rangle = H * \langle t\rangle_\infty$ (то есть элемент t *трансцендентен* над H в $\widetilde{G}$) для всякого свободного сомножителя H группы G такого, что w не сопряжено в $G * \langle t\rangle_\infty$ с элементами группы $H * \langle t\rangle$.

В работе [Кл06а] было показано, что каждое унимодулярное копредставление над группой без кручения является магнусовым. Для доказательства основных результатов этой статьи нам понадобится более сильное свойство унимодулярных копредставлений.

Мы будем называть копредставление (1) *сильно магнусовым*, если элемент t трансцендентен в $\widetilde{G}$ над каждой подгруппой $H \subseteq G$ такой, что

1) w не сопряжено в $G * \langle t\rangle_\infty$ с элементами группы $H * \langle t\rangle$;
2) каждый коэффициент g_i либо лежит в H, либо трансцендентен над H.

Утверждение 1. *Если копредставление (1) унимодулярно и неединичные коэффициенты g_i имеют бесконечный порядок в группе G, то копредставление (1) сильно магнусово.*

Доказательство утверждения 1 опирается на несколько ранее известных результатов, в частности, на следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $A \underset{C}{*} B$ — свободное произведение групп A и B с объединённой подгруппой C, $v = b_0a_0 \ldots b_m a_m b_{m+1} \in (A \underset{C}{*} B)$, $m \geqslant 1$, причём каждый коэффициент слова v (кроме, возможно, крайних) трансцендентен над C, то есть $\langle a_i, C\rangle = \langle a_i\rangle_\infty * C$ в группе A для $i = 0, \ldots, m$ и $\langle b_i, C\rangle = \langle b_i\rangle_\infty * C$ в группе B для $i = 1, \ldots, m$. Тогда для любого автоморфизма φ группы B естественные отображения*

$$A \to \left\langle A \underset{C}{*} B \;\middle|\; \{b^v = b^\varphi \mid b \in B\} \right\rangle \leftarrow B$$

инъективны.

Эта теорема была доказана [Кл94], но не была опубликована. В последнем разделе статьи мы приводим доказательство теоремы 4. В отличие от чисто алгебраических рассуждений всех предыдущих разделов, доказательство теоремы 4 имеет геометрическую природу. Другие ранее известные факты, из которых выводится утверждение 1, доказываются в том же духе.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, x и y — элементы некоторой группы, а φ — гомоморфизм из этой группы в какую-нибудь другую группу, то x^y, x^{ky}, x^{-y}, x^φ, $x^{k\varphi}$ и $x^{-\varphi}$ обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$, $y^{-1}x^{-1}y$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^k)$ и $\varphi(x^{-1})$ соответственно; коммутатор $[x, y]$ понимается как $x^{-1}y^{-1}xy$. Если X — подмножество некоторой группы, то $\langle X\rangle$ и $\langle\langle X\rangle\rangle$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X, и нормальную подгруппу, порождённую множеством X. Символом $|X|$ мы обозначаем мощность множества X.

2. Доказательство теоремы 1

Если группа G является циклической, то группа $\widetilde{G}$ является группой с по меньшей мере тремя образующими и одним соотношением. SQ-универсальность таких групп утверждается в теореме Сасердота–Шуппа. В дальнейшем предполагаем, что группа G нециклическая.

Пусть слово w имеет вид $w \equiv g_1 x_{j_1}^{\varepsilon_1} g_2 x_{j_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_p x_{j_p}^{\varepsilon_p}$ и слово $w' \in F(x_1, \ldots, x_n)$ получается из w стиранием коэффициентов: $w' = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{j_p}^{\varepsilon_p}$.

Случай 1: w' является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \ldots, x_n)$. В этом случае группа $\widetilde{G}$ SQ-универсальна, поскольку по теореме Штёра–Громова SQ-универсальна группа с одним соотношением $T_1 = \langle x_1, \ldots, x_n \mid w' = 1\rangle$, которая является гомоморфным образом группы $\widetilde{G}$.

Случай 2: w' не является истинной степенью. Рассмотрим группы

$$T = \langle x_1, \ldots, x_n \mid [x_1, w'] = \ldots = [x_n, w'] = 1\rangle \quad \text{и} \quad T_1 = \langle x_1, \ldots, x_n \mid w' = 1\rangle = T/\langle w'\rangle.$$

Группа T является свободным центральным расширением группы с одним соотношением T_1. Хорошо известно, что если w' не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1,\ldots,x_n)$, то группа T_1 является локально индикабельной ([Б84]) и, следовательно, группой с сильно однозначным умножением. Элемент w' имеет бесконечный порядок в группе T (см. [ЛШ80]). Таким образом, обобщённое относительное копредставление $\langle G,T \mid w=1\rangle$ является унимодулярным. Группа T не является циклической, поскольку её факторгруппа по коммутанту является свободной абелевой ранга $n \geqslant 2$. Значит, по теореме 2 группа $\langle G,T \mid w=1\rangle$ SQ-универсальна. Осталось заметить, что эта группа является гомоморфным образом группы $\widetilde{G}$, а группа, имеющая SQ-универсальный гомоморфный образ, сама, очевидно, является SQ-универсальной.

3. Итерированные свободные произведения с объединёнными подгруппами

В этом разделе мы воспроизводим в несколько более общей ситуации одну конструкцию из [Кл06а].

Пусть I — некоторое множество и Ω — некоторое семейство подмножеств множества I. Для каждого $i\in I$ рассмотрим некоторую группу G_i, и для каждого $\omega\in\Omega$ рассмотрим некоторую факторгруппу G_ω свободного произведения $\mathop{\ast}\limits_{i\in\omega} G_i$:

$$G_\omega = \Bigl(\mathop{\ast}_{i\in\omega} G_i\Bigr)\Big/ N_\omega.$$

Возникает естественный вопрос: при каких условиях естественные отображения

$$\varphi_\omega\colon G_\omega \to G_I \overset{\text{опр}}{=} \Bigl(\mathop{\ast}_{i\in I} G_i\Bigr)\Big/\Bigl\langle\!\Bigl\langle \bigcup_{\omega\in\Omega} N_\omega \Bigr\rangle\!\Bigr\rangle$$

инъективны? Или, при каких условиях группу G_I можно трактовать как свободное произведение с объединёнными подгруппами групп G_ω?

Следующее утверждение даёт некоторые достаточные условия для положительного ответа на эти вопросы.

Утверждение 2. *Пусть*

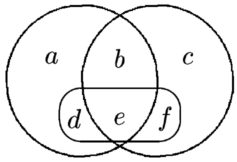
$$N_\omega \cap \mathop{\ast}_{j\in\omega\setminus\{i\}} G_j = \{1\} \qquad (**)$$

для каждого $\omega\in\Omega$ и каждого $i\in\omega\setminus(\bigcap\Omega)$. Допустим, что, кроме того, для каждого конечного подсемейства $F\subseteq\Omega$ такого, что $|F|\geqslant 2$, найдутся такие элементы $\min,\max\in\bigcup F$, что

1) *элемент $\min$ содержится ровно в одном множестве $\omega_{\min}\in F$;*
2) *элемент $\max$ содержится ровно в одном множестве $\omega_{\max}\in F$;*
3) *$\omega_{\min}\neq\omega_{\max}$.*

Тогда все естественные отображения $\varphi_\omega\colon G_\omega\to G_I$ инъективны.

Пример. Пусть $I=\{a,b,c,d,e,f\}$ и $\Omega=\{\{a,b,d,e\},\{b,c,e,f\},\{d,e,f\}\}$.



Соответствующие шесть групп G_i мы обозначим $A,\ldots,F$, а три группы G_ω мы обозначим **ABDE**, **BCEF** и **DEF**. Нетрудно убедиться, что в данном случае условия 1), 2) и 3) выполнены для семейства Ω и каждого его подсемейства, состоящего из двух множеств. Допустим, что выполнено также условие $(**)$. Тогда справедливость утверждения 2 (в данном случае) вытекает из следующего разложения группы G_I в свободное произведение с объединёнными подгруппами:

$$G_I = \Bigl((\mathbf{DEF} * B) \mathop{\ast}_{B*D*E} \mathbf{ABDE}\Bigr) \mathop{\ast}_{B*E*F} \mathbf{BCEF}.$$

Для доказательства утверждения в общем случае докажем сперва лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия утверждения 2, Ω' — конечное подсемейство семейства Ω, $\omega\in\Omega$ и $\alpha\subseteq\omega\cap(\bigcup\Omega')$ — некоторое собственное подмножество множества ω, лежащее в $\bigcup\Omega'$ и содержащее $\bigcap\Omega$. Тогда естественное отображение*

$$\mathop{\ast}_{i\in\alpha} G_i \to G_{\Omega'} \overset{\text{опр}}{=} \Biggl(\mathop{\ast}_{i\in\bigcup\Omega'} G_i\Biggr)\Bigg/\Bigl\langle\!\Bigl\langle \bigcup_{\omega'\in\Omega'} N_{\omega'} \Bigr\rangle\!\Bigr\rangle$$

инъективно.

Доказательство.
Случай 1: $\omega \in \Omega'$**.** Воспользуемся индукцией по мощности семейства Ω'. Если $|\Omega'| = 1$ (то есть $\Omega' = \{\omega\}$), то утверждение леммы верно по условию $(**)$. Допустим, что $|\Omega'| \geqslant 2$. В этом случае в соответствии с условиями 1), 2) и 3) семейство $F = \Omega'$ содержит множество $\omega' \neq \omega$, содержащее элемент $m \in \omega'$, не лежащий в $\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})$.

По предположению индукции (применённому к множеству ω' в качестве ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω') группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \beta \overset{\text{опр}}{=} \omega' \cap \left(\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})\right)$$

свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. А по условию $(**)$ те же группы G_i, где $i \in \beta$, свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\omega'}$ (поскольку ω' содержит элемент m, не лежащий в β). Значит, группа $G_{\Omega'}$ раскладывается в свободное произведение групп $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$ и $G_{\omega'}$ с объединённой подгруппой $\underset{i \in \beta}{\ast} G_i$. При этом интересующие нас группы G_i с номерами $i \in \alpha$ лежат в сомножителе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Следовательно, утверждение леммы следует из предположения индукции, применённого к множеству ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω'.
Случай 2: $\omega \notin \Omega'$**.** Доказательство в этом случае устроено похожим образом. Снова воспользуемся индукцией по мощности семейства Ω'. Если $\Omega' = \varnothing$, то доказывать нечего. Допустим, что $|\Omega'| \geqslant 1$. В этом случае в соответствии с условиями 1), 2) и 3) семейство $F = \Omega' \cup \{\omega\}$ содержит множество $\omega' \neq \omega$, содержащее элемент $m \in \omega'$, не лежащий в $\bigcup(F \setminus \{\omega'\})$ (Рис.1).

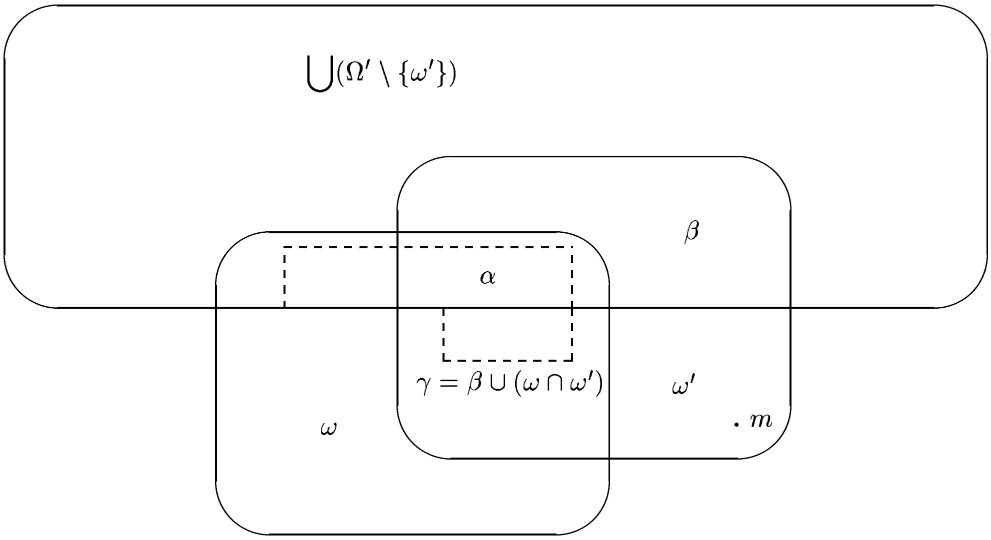


Рис. 1

По предположению индукции (применённому к множеству ω' в качестве ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω') группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \beta \overset{\text{опр}}{=} \omega' \cap \left(\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})\right)$$

свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Значит, группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \gamma \overset{\text{опр}}{=} \beta \cup (\omega \cap \omega') = \omega' \cap \left(\bigcup((\Omega' \cup \omega) \setminus \{\omega'\})\right)$$

свободно порождают своё произведение в группе

$$H = \left(\underset{j \in (\omega \cap \omega') \setminus \beta}{\ast} G_j\right) \ast G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}.$$

Но по условию $(**)$ те же группы G_i, где $i \in \gamma$, свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\omega'}$ (поскольку ω' содержит элемент m, не лежащий в γ). Значит, группа $G_{\Omega'}$ раскладывается в свободное произведение с объединённой подгруппой групп H и $G_{\omega'}$:

$$G_{\Omega'} = H \underset{\langle G_i \ ; \ i \in \gamma \rangle}{\ast} G_{\omega'}.$$

При этом интересующие нас группы G_i с номерами $i \in \alpha$ лежат в сомножителе H. Следовательно, по предположения индукции, применённому к множеству ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω', группы G_i с номерами $i \in \alpha \cap (\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})$ свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Отсюда немедленно вытекает, что группы G_i с номерами $i \in \alpha$ свободно порождают своё свободное произведение в группе H и, следовательно, в группе $G_{\Omega'}$, содержащей, как мы видели, H в качестве подгруппы. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 2. Ясно, что утверждение достаточно доказать для конечного семейства Ω мощности большей единицы. Но в этом случае

$$G_I = G_\Omega * \left(\mathop{\ast}_{i \notin \bigcup \Omega} G_i \right),$$

а группа G_Ω раскладывается в свободное произведение с объединённой подгруппой:

$$G_\Omega = G_{\omega_{\min}} \mathop{\ast}_{K} G_{\Omega \setminus \{\omega_{\min}\}},$$

где объединяемая группа K является свободным произведением групп G_i с номерами из множества $\omega_{\min} \cap \bigcup(\Omega \setminus \{\omega_{\min}\})$ в силу леммы 1. Поэтому утверждение очевидным образом вытекает из индуктивных соображений.

4. Доказательство теоремы 2. Нерасщепляющийся случай

В этом разделе мы докажем теорему 2 в случае, когда группа $\langle \{t_i\} \rangle \subseteq T$ не является циклической.

Зафиксируем произвольную счётную группу S. Положим $t = \prod t_i$. Разложим T в объединение смежных классов:

$$T = \coprod_{x \in T/\langle t \rangle} c_x \langle t \rangle, \quad \text{где } c_1 = 1.$$

Для каждого $x \in T/\langle t \rangle$ рассмотрим изоморфную копию $G^{(c_x)}$ группы G (подразумевая, что изоморфизм отображает элемент $g \in G$ в элемент $g^{(c_x)} \in G^{(c_x)}$) и запишем соотношение $\prod g_i t_i = 1$ в виде

$$t \prod_i g_i{}^{c_{x_i} t^{k_i}} = 1. \tag{2}$$

Пусть X_1 — это множество всех $x \in T/\langle t \rangle$, встречающихся в несократимой записи соотношения (2). Заметим, что $|X_1| \geqslant 2$, поскольку в рассматриваемом случае $\langle \{t_i\} \rangle \neq \langle t \rangle$. Положим

$$H_1 = \mathop{\ast}_{y \in X_1} G^{(c_y)}$$

и рассмотрим унимодулярное относительное копредставление

$$\widetilde{H}_1 = \left\langle H_1, z \;\middle|\; z \prod_i g_i{}^{(c_{x_i}) z^{k_i}} = 1 \right\rangle$$

над группой H_1. По теореме 3 группа $\widetilde{H}_1$ имеет такую факторгруппу K_1, что

1) группа S вкладывается в K_1;
2) в группе K_1 имеет место разложение

$$\left\langle z, \{G^{(c_y)} \; ; \; y \in Y\} \right\rangle = \langle z \rangle_\infty * \left(\mathop{\ast}_{y \in Y} G_y \right) \tag{3}$$

для каждого собственного подмножества $Y \subset X_1$.

Группа K_1 является факторгруппой группы

$$L_1 = H_1 * \langle z \rangle_\infty = \left(\mathop{\ast}_{y \in X_1} G^{(c_y)} \right) * \langle z \rangle_\infty$$

по некоторой нормальной подгруппе N_1.

Рассмотрим теперь свободное произведение

$$L = \left(\mathop{\ast}_{y \in T/\langle t \rangle} G^{(c_y)} \right) \ast \langle z \rangle_\infty .$$

Группа T действует справа на группе L автоморфизмами по формулам

$$z^x = z^{\varepsilon_x}, \ \left(g^{(c_y)}\right)^x = g^{(c_{yx})z^l},$$

где $x \in T$, $y \in T/\langle t \rangle$, $\varepsilon_x = \pm 1$ в зависимости от того, коммутирует x с t или нет, а целое число l однозначно определяется из равенства $c_y x = c_{yx} t^l$.

Для каждого $x \in T/\langle t \rangle$ рассмотрим множество $X_x = X_1 x \subseteq T/\langle t \rangle$ и подпроизведение

$$L_x = \left(\mathop{\ast}_{y \in X_x} G^{(c_y)} \right) \ast \langle z \rangle_\infty$$

свободного произведения L. В группе L_x имеется нормальная подгруппа $N_x = N_1^x \stackrel{\text{опр}}{=} N_1^\chi$, где $\chi \in T$ — это любой представитель элемента $x \in T/\langle t \rangle$.

Покажем, что семейство подпроизведений $\{L_x \mid x \in T/\langle t \rangle\}$ вместе с подгруппами $N_x \triangleleft L_x$ удовлетворяет условиям утверждения 2. Действительно, условия 1), 2) и 3) этого утверждения непосредственно вытекают из сильной однозначности умножения в группе $T/\langle t \rangle$. Выполнение условия $(\ast\ast)$ для пары групп $N_1 \triangleleft L_1$ следует из разложения (3). Выполнение этого условия для других пар $N_x \triangleleft L_x$ вытекает из того, что группа L_x изоморфна группе L_1; причём изоморфизм (действие элемента $x \in T$) переводит подгруппу N_1 в подгруппу N_x, а каждый из сомножителей $G^{(c_y)}$ группы L_1 в подгруппу $(G^{(c_{yx})})^{z^l}$ группы L_x.

Мы видим, что условия утверждения 2 выполнены. Следовательно, естественные отображения

$$K_x = L_x/N_x \to K \stackrel{\text{опр}}{=} L \Big/ \left\langle\!\!\left\langle \bigcup_{y \in T/\langle t \rangle} N_y \right\rangle\!\!\right\rangle$$

инъективны.

Группа T действует на K автоморфизмами. Возьмём соответствующее полупрямое произведение $T \leftthreetimes K$ и профакторизуем его по циклической нормальной подгруппе $\langle zt^{-1} \rangle$. Получившаяся группа

$$P = (T \leftthreetimes K)/\langle zt^{-1} \rangle$$

и будет искомой факторгруппой группы $\widetilde{G}$.

Действительно, группа G вкладывается в P в качестве подгруппы: $G = G^{(1)} \subseteq K \subseteq P$. Согласно определению действия, мы имеем $G^{(c_x)} = G^{c_x}$, значит, соотношение группы $\widetilde{H}_1$, выполненное в K, и равенство $t = z$ в группе P дают соотношение (2). То есть группа $P = \langle T, G \rangle$ является факторгруппой группы $\widetilde{G}$, содержащей подгруппу K_1, которая, в свою очередь, содержит произвольную наперёд заданную счётную группу S. Теорема 2 в случае, когда группа $\langle \{t_i\} \rangle$ не является циклической, доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Расщепляющийся случай

Докажем теперь теорему 2 в случае, когда группа $\langle \{t_i\} \rangle$ циклическая. Если копредставление $(\ast)$ имеет вид $\widetilde{G} = \langle G \ast T \mid t = 1 \rangle$, то группа $\widetilde{G}$ представляет собой свободное произведение двух бесконечных групп G и $T/\langle t \rangle$ и, следовательно, является SQ-универсальной (см. [ЛШ80]). В дальнейшем предполагаем, что копредставление $(\ast)$ имеет другой вид.

Из условия унимодулярности следует, что $\langle \{t_i\} \rangle = \langle t \rangle_\infty$, где $t = \prod t_i$. Рассмотрим группу R, заданную унимодулярным относительным копредставлением

$$R = \left\langle G, z \,\middle|\, \prod_{i=1}^n g_i z^{k_i} = 1 \right\rangle,$$

где показатели k_i определяются из равенств $t_i = t^{k_i}$, при этом $k_i \neq 0$ и $\sum k_i = 1$. Известно, что элемент z имеет бесконечный порядок в группе R и равенство $R = \langle z \rangle$ имеет место только в случае, когда $n = 1$ и $G = \langle g_1 \rangle$ [CR01]. В этом случае теорема в доказательстве не нуждается. В остальных случаях возьмём элемент r группы R, не лежащий в $\langle z \rangle$, но обладающий тем свойством, что $z^{kr} \neq z^l$, если целые числа k и l различны. Нетрудно сообразить, что такой элемент всегда найдётся. Действительно, для каждого $x \in R$ определим неотрицательное целое число $k(x)$ равенством $\langle z\rangle^x \cap \langle z\rangle = \left\langle z^{k(x)}\right\rangle$. Возможны три случая:

1) $k(x) = 0$ для некоторого $x \in R$;
2) $k(x) > 1$ для некоторого $x \in R$;
3) $k(x) = 1$ для всех $x \in R$.

В первом случае мы можем положить $r = x$. В втором случае мы можем положить $r = z^{x^{-1}}$. В случае 3) циклическая подгруппа $\langle z\rangle$ является нормальной в R и не совпадает со своим централизатором (поскольку индекс этого централизатора в R не превосходит двух, а каждая почти циклическая группа без кручения является циклической); в качестве r в этом случае мы можем взять произвольный элемент централизатора z, не лежащий в $\langle z\rangle$.

Выберем также такую бесконечную последовательность элементов $\{t_{ij}\ ;\ i = 1, 2, \dots,\ j = 1, \dots, 1000\}$ централизатора элемента t в группе T, что все $t_{ij}^{\pm 1}$ лежат в разных смежных классах по нормальной подгруппе $\langle t\rangle$. Такая последовательность найдётся, поскольку $T/\langle t\rangle$ является нетривиальной группой без кручения и индекс централизатора элемента t в группе T не превосходит двух.

Возьмём произвольную счётную группу $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ и положим $K = R \times S$. Рассмотрим группу

$$L = \left(K \underset{z=t}{*} T\right) \Big/ \left\langle\!\!\left\langle s_i \prod_{j=1}^{1000} r t_{ij}\ ;\ i = 1, 2, \dots \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Это копредставление группы L удовлетворяет условию малого сокращения $C'(1/100)$ для свободных произведений с объединённой подгруппой (см. [ЛШ80]). Следовательно естественные отображения $S \to K \to L$ инъективны. Для завершения доказательства осталось заметить, что группа L является факторгруппой группы $\widetilde{G} = R \underset{z=t}{*} T$.

6. Доказательство теоремы 3

Лемма 2. *Никакая бесконечная нециклическая группа не может быть объединением конечного числа своих циклических подгрупп.*

Доказательство. Пусть группа G является объединением конечного числа циклических подгрупп. Такая группа, очевидно, обладает следующим свойством:

любые два бесконечных множества $X, Y \subseteq G$ содержат пару коммутирующих элементов $x \in X$, $y \in Y$.

Хорошо известно, что бесконечные группы с таким свойством являются абелевыми.*) Поскольку всякая подгруппа и факторгруппа группы G также является объединением конечного числа своих циклических подгрупп, достаточно показать, что $G \not\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$. Но в группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ имеется бесконечно много максимальных циклических подгрупп: $\langle(1, 1)\rangle$, $\langle(p, 1)\rangle$, $\left\langle(p^2, 1)\right\rangle$,...; следовательно, эта группа не может быть объединением конечного числа своих циклических подгрупп.

Лемма 3. *Пусть $l \geqslant 2$ — натуральное число, $G_1, \dots, G_l$ — нециклические бесконечные группы, $u_1, \dots, u_s \in G_1 * \ldots * G_l$ и S — произвольная счётная группа. Тогда в группе $G_1 * \ldots * G_l$ найдётся такая нормальная подгруппа N, что*

1) *группа S вкладывается в $(G_1 * \ldots * G_l)/N$;*
2) $N \cap \left\langle u_i, G_{i_1}, \dots, G_{i_{l-1}}\right\rangle = \{1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $i_1, \dots, i_{l-1} \in \{1, \dots, l\}$.

Доказательство. Пусть $U \subseteq G_1 \cup \ldots \cup G_l$ — конечное множество, состоящее из всех коэффициентов всех слов u_i. Из леммы 2 следует, что множество

$$M_k = G_k \setminus \left(\bigcup_{u \in U} \langle u\rangle\right)$$

бесконечно для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$. Рассмотрим счётное множество слов

$$v_i = \prod_{j=1}^{2006} \prod_{k=1}^{l} g_{ijk} \in G_1 * \ldots * G_l,$$

*) Это легко следует теоремы Б. Неймана [Neu76] (ответ на вопрос П. Эрдёша): *группы, в которых любое бесконечное подмножество содержит пару различных коммутирующих элементов, — это в точности группы, у которых индекс центра конечен.*

где $g_{ijk} \in M_k$ и все $g_{ijk}^{\pm 1}$ различны. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Положим

$$H = (G_1 * \ldots * G_l * S) \,/\, \langle\langle v_1 s_1^{-1}, v_2 s_2^{-1}, \ldots \rangle\rangle .$$

Ясно, что указанное копредставление группы H удовлетворяет условию малого сокращения $C'(1/(100l))$ (см. [ЛШ80]), из которого вытекает, что естественное отображение $S \to H$ инъективно, а каждое слово, содержащееся в ядре N естественного эпиморфизма $G_1 * \ldots * G_l \to H$ содержит коэффициенты из каждого из множеств M_k. В частности, $N \cap \langle u_i, G_{i_1}, \ldots, G_{i_{l-1}} \rangle = \{1\}$, что и требовалось.

Докажем теперь теорему 3. Пусть слово w имеет вид $u_1 t^{\varepsilon_1} \ldots u_s t^{\varepsilon_s}$, где $u_i \in G_1 * \ldots * G_l$ и $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Заметим, что в группе $G_1 * \ldots * G_l$ каждый неединичный элемент u_i имеет бесконечный порядок и трансцендентен над каждой из подгрупп $G_{i_1} * \ldots * G_{i_k}$, не содержащей этот элемент u_i.

Выберем нормальную подгруппу $N \triangleleft G_1 * \ldots * G_l$ в соответствии с леммой 3 и положим $G = (G_1 * \ldots * G_l)/N$. По лемме 3 группа G содержит произвольную наперёд заданную счётную группу S и образ каждого неединичного элемента u_i в группе G по-прежнему остаётся элементом бесконечного порядка трансцендентным над каждой из подгрупп $G_{i_1} * \ldots * G_{i_k}$, не содержащей этот элемент u_i. Для завершения доказательства осталось сослаться на утверждение 1.

7. Доказательство утверждения 1

Отметим несколько простых фактов.

Лемма 4. *Пусть $u \in X * Y$ — элемент свободного произведения групп X и Y и Z — подгруппа группы Y, причём элемент u алгебраичен (то есть нетрансцендентен) над $X * Z$. Тогда либо $u \in (X * Z)Y(X * Z)$, либо u имеет вид $x_1 u' x_2$, где $x_1, x_2 \in X * Z$, а элемент $u' \in X * Y$ имеет конечный порядок.*

Доказательство этой элементарной леммы мы оставляем читателю в качестве лёгкого упражнения.

Лемма 5. *Пусть A — нетривиальная подгруппа группы B и $b \in B$. Тогда b трансцендентен над A в том и только том случае, когда*

$$\left\langle \{A^{b^i} \ ; \ i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle = \mathop{\ast}_{i \in \mathbb{Z}} A^{b^i}.$$

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, а в другую сторону следует из того, что, если $u \in A * \langle b \rangle_\infty$ — нетривиальное соотношение между A и b в группе B и $a \in A \setminus \{1\}$, то $[a, u]$ — нетривиальное соотношение между группами A^{b^i}. Лемма 5 доказана.

До конца этого раздела будем предполагать, что подгруппа H группы G удовлетворяет условиям 1) и 2) из определения сильной магнусовости, копредставление (1) является унимодулярным и все неединичные коэффициенты g_i имеют бесконечный порядок в группе G. Будем доказывать, что элемент t трансцендентен над H в группе $\widetilde{G}$.

Лемма 6. *Если*

$$\left\langle \{H^{t^i} \ ; \ i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle = \mathop{\ast}_{i \in \mathbb{Z}} H^{t^i} \tag{4}$$

в группе $\widetilde{G}$, то элемент $t \in \widetilde{G}$ является трансцендентным над H.

Доказательство. В случае, когда группа H нетривиальна, утверждение немедленно вытекает из леммы 5. Если же $H = \{1\}$, то утверждается лишь то, что элемент $t \in \widetilde{G}$ имеет бесконечный порядок (если w не сопряжено с $t^{\pm 1}$); в явном виде этот факт отмечен в [CR01]. Лемма 6 доказана.

Положим

$$\overline{H} = \mathop{\ast}_{i \in \mathbb{Z}} H_i, \quad \overline{G} = \overline{H} \mathop{\ast}_{H_0 = H} G,$$

где H_i — это изоморфные копии группы H. Ясно, что $\widetilde{G}$ обладает копредставлением

$$\widetilde{G} \simeq \langle \overline{G}, t \,|\, w(t) = 1, \ \{H_i^t = H_{i+1}; \quad i \in \mathbb{Z}\} \rangle .$$

Передвигая в слове w все буквы $t^{\pm 1}$ влево через коэффициенты, лежащие в H, с помощью соотношений $H_i t^{\pm 1} = t^{\pm 1} H_{i \pm 1}$, мы перепишем копредставление группы $\widetilde{G}$ в виде

$$\widetilde{G} \simeq \left\langle \overline{G}, t \,\middle|\, \prod_{i=1}^{p} \overline{g}_i t^{k_i} = 1, \ \{H_i^t = H_{i+1} \ ; \ i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle ,$$

где $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\sum k_i = 1$ и $\overline{g}_i \in \overline{G}$. Причём каждый коэффициент $\overline{g}_i$ имеет вид

$$\overline{g}_i = \prod_{j=1}^{s} \overline{h}_j f_j, \quad \text{где } s \geqslant 1,\ f_j \in \{g_1, g_2, \dots\} \setminus H,\ \overline{h}_j \in \overline{H} \setminus H \text{ при } j \neq 1, \text{ а } \overline{h}_1 \in \overline{H}.$$

Здесь f_j, $\overline{h}_j$ и s зависят от i. Заметим, что $f_1, \dots, f_s$ и $\overline{h}_2, \dots, \overline{h}_s$ трансцендентны над H в $\overline{G}$.

Если $p = 1$, то есть первое соотношение рассматриваемого копредставления группы $\widetilde{G}$ переписывается в виде

$$t = u, \quad \text{где } u = \overline{g}_1 = \prod_{j=1}^{s} \overline{h}_j f_j \in \overline{G},$$

то всё копредставление переписывается в виде

$$\widetilde{G} \simeq \left\langle \overline{H} \mathop{\ast}_{H_0 = H} G \,\middle|\, \{H_i^u = H_{i+1}\ ;\ i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle.$$

По лемме 6 достаточно доказать инъективность естественного отображения $f\colon \overline{H} \to \widetilde{G}$.

Если $s > 1$, то есть $u \notin \overline{H} G \overline{H}$, то гомоморфизм f является инъективным в силу теоремы 4.

Допустим теперь, что $s = 1$, то есть $u = \overline{h}_1 f_1$, где $\overline{h}_1 \in \overline{H}$, а элемент $f_1 \in G$ трансцендентен над H. В этом случае, вложимость $\overline{H}$ в $\widetilde{G}$ очевидным образом вытекает из разложения

$$\widetilde{G} = G \mathop{\ast}_{K = L} (H \ast \langle t \rangle_\infty),$$

где $G \supseteq K = \langle f_1, H \rangle = \langle f_1 \rangle_\infty \ast H \simeq L = \left\langle (\overline{h}_1)^{-1} t, H \right\rangle = \left\langle (\overline{h}_1)^{-1} t \right\rangle_\infty \ast H \subseteq H \ast \langle t \rangle_\infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда $p > 1$. Рассмотрим следующие подгруппы группы $G \ast \langle t \rangle_\infty$: $G_i = t^{-i} G t^i$, $H_i = t^{-i} H t^i$,

$$\overline{H} = \mathop{\ast}_{i=-\infty}^{\infty} H_i, \quad K^{(m)} = \mathop{\ast}_{i=0}^{m} G_i \quad \text{и} \quad G^{(m)} = \overline{H} \mathop{\ast}_{H_0 \ast \ldots \ast H_m} K^{(m)}. \tag{5}$$

Рассмотрим все возможные записи соотношения $w = 1$ в виде

$$ct \prod_{i=1}^{n} b_i t^{-1} a_i t = 1, \quad \text{где } a_i, b_i, c \in G^{(m)}. \tag{6}$$

Из всех таких записей выберем те, в которых m минимально, после чего из всех записей с минимальным m выберем запись с наименьшим n. Для такой минимальной записи (6) будем иметь:

1) $n \geqslant 1$ (то есть длина этой записи строго больше единицы);
2) $a_i \notin G^{(m-1)}$ и $b_i \notin (G^{(m-1)})^t$;
3) каждый коэффициент a_i трансцендентен над $G^{(m-1)}$, а каждый коэффициент b_i трансцендентен над $(G^{(m-1)})^t$.

Первое свойство обеспечивается тем, что $p > 1$, значит в записи длины 1 $m > 0$; следовательно, m можно уменьшить, заменив все вхождения элементов группы G_m на фрагменты вида $t^{-1} g t$, где $g \in G_{m-1}$. Второе свойство очевидным образом следует из условий минимальности n и m. Для доказательства свойства 3) надо заметить, что в нормальной форме, соответствующей разложению

$$G^{(m)} = X \ast Y, \quad \text{где } X = \left(\mathop{\ast}_{j \neq m} H_j \right) \ast G_0 \ast \ldots G_{m-1} \text{ и } Y = G_m,$$

каждый Y-слог каждого коэффициента a_i лежит в $(H\{f_1, \dots, f_p\}H)^{t^m}$, и воспользоваться леммой 4, положив $Z = H_m$. Аналогичным образом устанавливается трансцендентность b_i над $(G^{(m-1)})^t$.

Пусть теперь символы H_i и G_i обозначают абстрактные изоморфные копии групп H и G, а группы $\overline{H}$, $K^{(m)}$ и $G^{(m)}$ определены формулами (5). Рассмотрим следующее копредставление группы $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{G} = \left\langle G^{(m)}, t \;\middle|\; ct \prod_{i=1}^{n} b_i a_i^t = 1,\ \{G_i^t = G_{i+1}\ ;\ \ i \in \{0, \dots m-1\}\},\ \{H_i^t = H_{i+1}\ ;\ \ i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle. \tag{7}$$

Для завершения доказательства утверждения 1 остаётся только заметить, что свойства 1) и 3) копредставления (7) влекут инъективность естественного отображения $G^{(m)} \to \widetilde{G}$ в силу следующей теоремы.

Теорема ([Kl93], см. также [Fer96]). *Пусть M и N — изоморфные подгруппы группы L, $\varphi : M \to N$ — изоморфизм, $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n$ — элементы группы L, трансцендентные над M, $b_1, \ldots, b_n$ — элементы группы L, трансцендентные над N, и $c \in L$. Тогда система уравнений*

$$\begin{cases} x^{-1}gx = g^{\varphi}, \quad g \in M, \\ cx\prod_{i=1}^{n} b_i x^{-1} a_i x = 1 \end{cases} \tag{***}$$

разрешима над L, то есть естественное отображение $L \to \langle L, x \mid (***)\rangle$ инъективно.

Воспользовавшись этой теоремой для $L = G^{(m)}$ и $M = G^{(m-1)}$, мы получаем, что естественное отображение $\overline{H} \subset G^{(m)} \to \widetilde{G}$ инъективно и элемент $t \in \widetilde{G}$ трансцендентен над H в силу леммы 6.

8. Доказательство теоремы 4

Нам будет удобно переформулировать теорему 4 на языке уравнений над группами. Напомним, что *уравнением над группой G с неизвестным* (или *переменной*) t называют формальное выражение вида

$$g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \ldots g_n t^{\varepsilon_n} = 1, \tag{8}$$

где $g_i \in G$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$. Уравнение (8) называют *разрешимым над группой G*, если найдётся бо́льшая группа $\widetilde{G}$, содержащая группу G в качестве подгруппы, и элемент $\widetilde{t} \in \widetilde{G}$ (называемый решением уравнения $(*)$) такой, что $g_1\widetilde{t}^{\varepsilon_1} g_2 \widetilde{t}^{\varepsilon_2} \ldots g_n \widetilde{t}^{\varepsilon_n} = 1$ в группе $\widetilde{G}$. Аналогичным образом определяется понятие *разрешимости системы уравнений с несколькими неизвестными над группой G.*

Лемма 7. *Пусть $G = A \mathop{*}\limits_{C} B$ — свободное произведение некоторых групп A и B с объединённой подгруппой C, $v = b_0 a_0 \ldots b_m a_m b_{m+1} \in G$, φ — автоморфизм группы B и*

$$\widehat{G} = \left\langle A \mathop{*}_{C} B \;\middle|\; \{b^v = b^{\varphi} \mid b \in B\} \right\rangle.$$

Тогда инъективность естественных отображений $A \to \widehat{G} \leftarrow B$ равносильна разрешимости следующей системы уравнений с неизвестными t и x над группой G:

$$\begin{cases} b^{-x} b^{\varphi} = 1 \quad \text{при } b \in B \setminus \{1\} \\ [t, c] = 1 \quad \text{при } c \in C \setminus \{1\} \\ x^{-1} b_0 a_0^t \ldots b_m a_m^t b_{m+1} = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Если $\widetilde{t}, \widetilde{x} \in \widetilde{G} \supseteq G$ — решение системы (9), то отображения $a \mapsto a^{\widetilde{t}}$ и $b \mapsto b$ продолжаются до инъективного на A и на B гомоморфизма $\widehat{G} \to \widetilde{G}$.

Наоборот, если естественные отображения $A \to \widehat{G} \leftarrow B$ инъективны, то рассмотрим изоморфную копию

$$\overline{G} = \left\langle \overline{A} \mathop{*}_{\overline{C}} \overline{B} \;\middle|\; \{\overline{b}^{\overline{v}} = \overline{b}^{\overline{\varphi}} \mid b \in B\} \right\rangle$$

группы $\widehat{G}$. Непосредственно видно, что элементы $\widetilde{t}$ и $\widetilde{x} = b_0 a_0^{\widetilde{t}} \ldots b_m a_m^{\widetilde{t}} b_{m+1} = \overline{v}$ HNN-расширения

$$\left\langle G \mathop{*}_{B = \overline{B}} \overline{G}, \widetilde{t} \;\middle|\; \{a^{\widetilde{t}} = \overline{a}\ ;\ a \in A\} \right\rangle$$

являются решениями системы (9). Лемма 7 доказана.

Эта лемма показывает, что теорема 4 будет вытекать из следующего утверждения:

Теорема 4′. *Пусть G — некоторая группа, содержащая некоторые подгруппы C, B и B^{φ}, $\varphi\colon B \to B^{\varphi}$ — изоморфизм, $m \geqslant 1$, $b_i, a_i \in G$, причём элементы $a_0, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_m$ трансцендентны над C. Тогда система уравнений (9) разрешима над группой G.*

Для доказательства теоремы 4′ нам понадобится лемма Хауи, которую мы здесь излагаем для простоты в частном случае, относящемся к системе уравнений (9).

Пусть на ориентированной двумерной сфере имеется карта, углы которой помечены элементами группы G, а рёбра ориентированы (на рисунках на них имеются стрелки) и помечены переменными t и x.

Метка вершины в такой ситуации определяется как произведение меток всех углов при этой вершине, перечисленных по часовой стрелке. Метка вершины является элементом группы G, определённым с точностью до сопряжённости. Например, метка вершины, изображённой на рисунке 2, равна $a_0^{-1} c a_0^2 c'$.

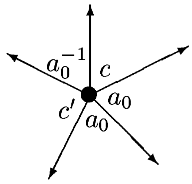


Рис. 2

Чтобы получить *метку грани*, надо обойти её границу против часовой стрелки, выписывая метки всех углов и рёбер этой грани, причём метку ребра надо записывать в минус первой степени, если мы его проходим против стрелки. Метка грани является элементом группы $G * F(t, x)$ (свободного произведения G и свободной группы с базисом $\{t, x\}$), определённым с точностью до циклической перестановки. Например, метка грани, изображённой на рисунке 3 вверху слева, равна $b^{-x}b^{\varphi}$.

Размеченную таким образом карту мы называем *сферической диаграммой Хауи* (или просто *диаграммой*) над системой уравнений (9), если

1) одна из вершин выделена и называется *внешней*, остальные вершины называются *внутренними*;
2) метка каждой внутренней вершины равна единице в группе G;
3) метка каждой грани равна левой части одного из уравнений системы (9) или слову, обратному к левой части одного из уравнений системы (9); все возможные типы граней изображёны на рисунке 3, на котором буквы b и c означают произвольные неединичные элементы групп B и C соответственно, а рёбра, не помеченные буквой x, считаются помеченными буквой t (на числа, написанные с внешних сторон клеток, пока не следует обращать внимание).

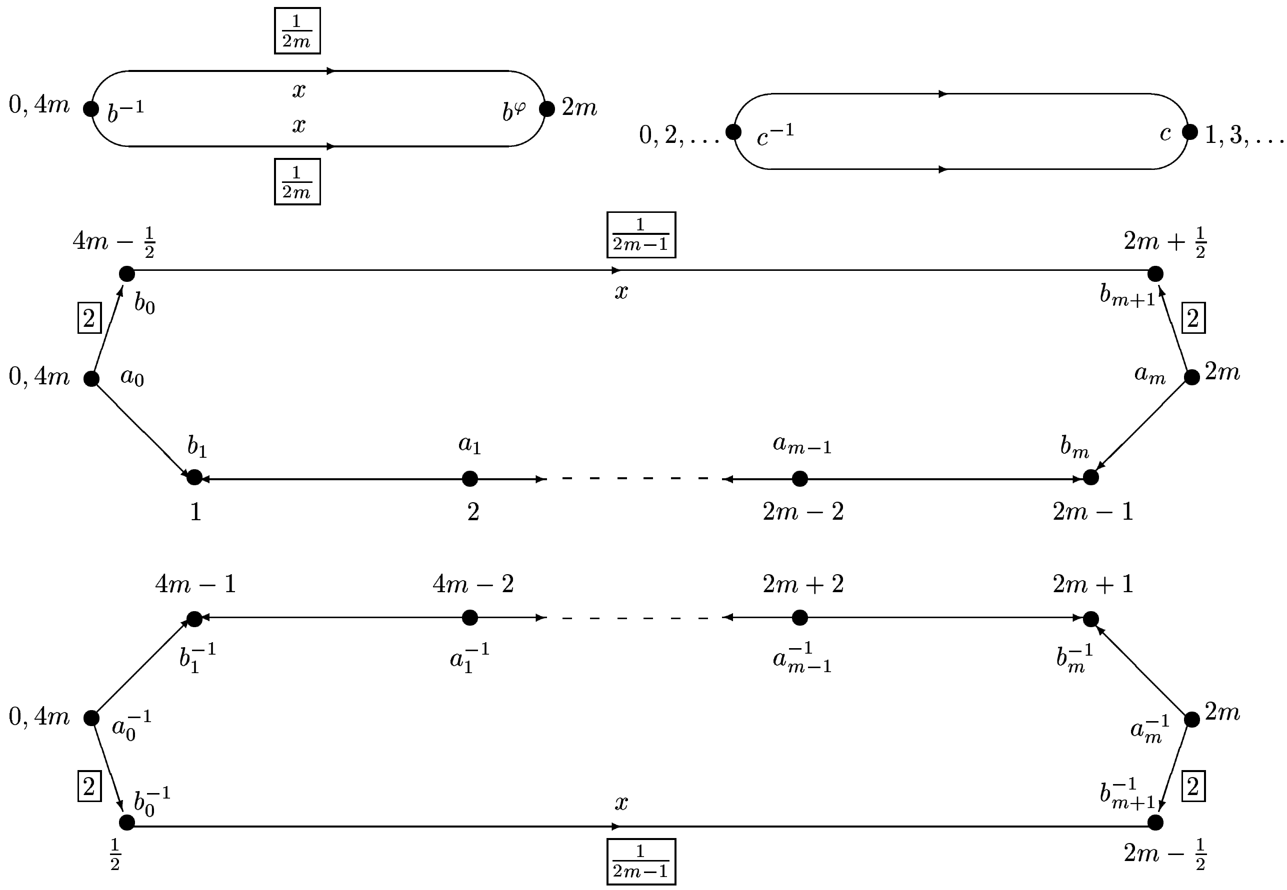


Рис. 3

Диаграмма Хауи называется *приведённой*, если она не содержит такого ребра e, что две грани, его содержащие являются различными, а их метки, написанные начиная с ребра e, взаимнообратны; такая пара клеток с общим ребром называется *сократимой парой*.

Лемма 8 [How83]. *Система уравнений (9) не является разрешимой над группой G тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этой системой, метка внешней вершины которой не равна единице в группе G. Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм является приведённой.*

Назовём диаграмму над системой (9) *сильно приведённой* если она приведена и различные клетки с метками вида $b^{-x}b^{\varphi}$ или $[c,t]$ не имеют общих рёбер.

Лемма 9. *Минимальная (по числу клеток) из всех сферических диаграмм, метка внешней вершины которой не равна единице, является сильно приведённой.*

Доказательство. Действительно, если в какой-то диаграмме пара клеток с метками, например, $b^{-x}b^{\varphi}$ и $(b')^{-x}(b')^{\varphi}$ имеет общее ребро, то либо такая пара клеток есть сократимая пара, либо общее ребро можно стереть, перемножив метки сливающихся при этом углов (рис. 4) и получить диаграмму с меньшим числом клеток и такой же меткой внешней вершины, что означает неминимальность исходной диаграммы и доказывает лемму.

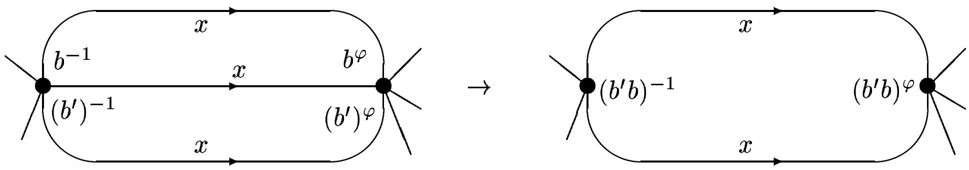


Рис. 4

Представим себе теперь, что по контуру каждой грани D некоторой карты на сфере движется точка (*автомобиль*) α_D. Автомобиль α_D движется непрерывно против часовой стрелки (то есть оставляя внутренность грани D слева) без остановок, разворотов и «бесконечных замедлений», то есть проезжая каждое ребро за конечное время. Такое движение автомобилей мы называем *правильным*.

Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени τ в точке p сферы равно кратности этой точки (иными словами, либо во внутренней точке некоторого ребра в момент τ оказываются два автомобиля, либо в вершине кратности k в момент τ оказываются k автомобилей одновременно), то мы говорим, что в точке p в момент τ происходит *полное столкновение*. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. На рисунке 5 изображены полные столкновения на ребре и в вершине кратности три.

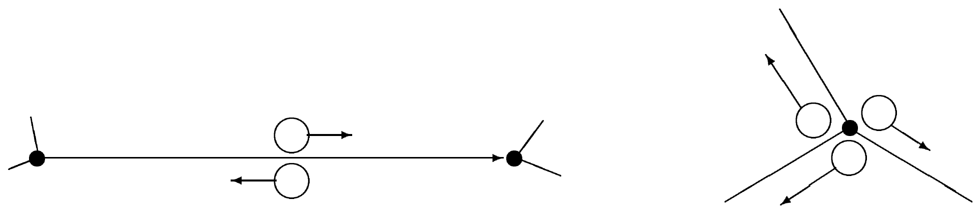


Рис. 5

Лемма 10 [Kl93] (см. также [FeR96]). *При любом правильном движении на сфере по крайней мере в двух точках происходит полное столкновение.*

Возьмём теперь в качестве карты сферическую диаграмму над копредставлением (9). Рассмотрим следующее правильное движение на этой карте:

а) автомобиль, объезжающий грань с меткой $b^{-x}b^{\varphi}$, движется против часовой стрелки равномерно со скоростью $\frac{1}{2m}$ ребра в единицу времени, проезжая в нулевой момент времени угол с меткой b^{-1};

б) автомобиль, объезжающий грань с меткой $[t,c]$, движется против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью (одно ребро в единицу времени), проезжая в нулевой момент времени угол с меткой c^{-1};

в) автомобиль, объезжающий против часовой стрелки грань с меткой $x^{-1}b_0a_0^t\dots b_ma_m^tb_{m+1}$, в нулевой момент времени находится в углу с меткой a_0, далее проезжает $2m$ ребер с меткой t с единичной скоростью и оказывается в момент $2m$ в углу с меткой a_m, следующее ребро с меткой t проезжает со скоростью 2, следующее за ним ребро с меткой x проезжает со скоростью $\frac{1}{2m-1}$, после чего проезжает ребро с меткой t со скоростью 2 и оказывается в момент $4m$ в исходном углу с меткой a_0; далее всё повторяется с периодом $4m$;

г) автомобиль, объезжающий против часовой стрелки грань с меткой $(x^{-1}b_0a_0^t\dots b_ma_m^tb_{m+1})^{-1}$, в нулевой момент времени находится в углу с меткой a_0^{-1}, первое ребро с меткой t проезжает со скоростью 2, следующее за ним ребро с меткой x проезжает со скоростью $\frac{1}{2m-1}$, после чего проезжает ребро с меткой t со скоростью 2, оказывается в момент $2m$ в углу с меткой a_m^{-1}, следующие $2m$ ребер с меткой t проезжает с единичной скоростью и оказывается в момент $4m$ в исходном углу с меткой a_0^{-1}; далее всё повторяется с периодом $4m$.

Это движение является правильным и периодическим с периодом $4m$ (при этом на гранях с меткой $[t, c]$ минимальный период равен двум). На рисунке 3 показано подробное расписание движения на протяжении интервала времени $0 \leqslant \tau \leqslant 4m$, числа в рамочках около рёбер означают скорость автомобиля на этих рёбрах (по умолчанию скорость единичная).

Лемма 11. *При описанном режиме движения на сильно приведённой диаграмме над системой (9) полные столкновения могут происходить только во внешней вершине.*

Доказательство.
Столкновение на ребре с меткой t в момент времени τ означает, что в этот момент направление движения одного из автомобилей совпадает с направлением ребра, а направление движения другого автомобиля противоположно направлению ребра (рис. 5 слева). Но расписание рассматриваемого движения устроено таким образом, что в каждый момент времени τ либо все автомобили, находящиеся на рёбрах с меткой t, едут в направлении ребра (это происходит, когда целая часть τ чётна), либо все автомобили, находящиеся на рёбрах с меткой t, едут в направлении, противоположном направлению ребра (это происходит, когда целая часть τ нечётна).

По аналогичным причинам не может произойти столкновения на ребре с меткой x: на протяжении интервалов времени $[0, 2m] + 4m\mathbb{Z}$ все автомобили, находящиеся на рёбрах с меткой x, едут в направлении ребра, а на протяжении интервалов времени $[2m, 4m] + 4m\mathbb{Z}$ все автомобили, находящиеся на рёбрах с меткой x, едут в направлении, противоположном направлению ребра.

Таким образом, столкновения могут происходить только в вершинах.
Полные столкновения в вершинах, в которых начинается или кончается ребро с меткой x, произойти не могут, поскольку из сильной приведённости диаграммы следует, что каждое ребро с меткой x разделяет клетку с меткой $b^{-x}b^{\varphi}$ и клетку с меткой $(x^{-1}b_0a_0^t \dots b_m a_m^t b_{m+1})^{\pm 1}$ (рис. 6). Это значит, что в начале ребра с меткой x один из автомобилей бывает в моменты $4m\mathbb{Z}$, а другой — в моменты $4m\mathbb{Z} \pm \frac{1}{2}$, то есть полного столкновения не происходит. По аналогичным причинам полного столкновения не происходит в конце ребра с меткой x: один из автомобилей там бывает в моменты $4m\mathbb{Z} + 2m$, а другой — в моменты $4m\mathbb{Z} + 2m \pm \frac{1}{2}$.

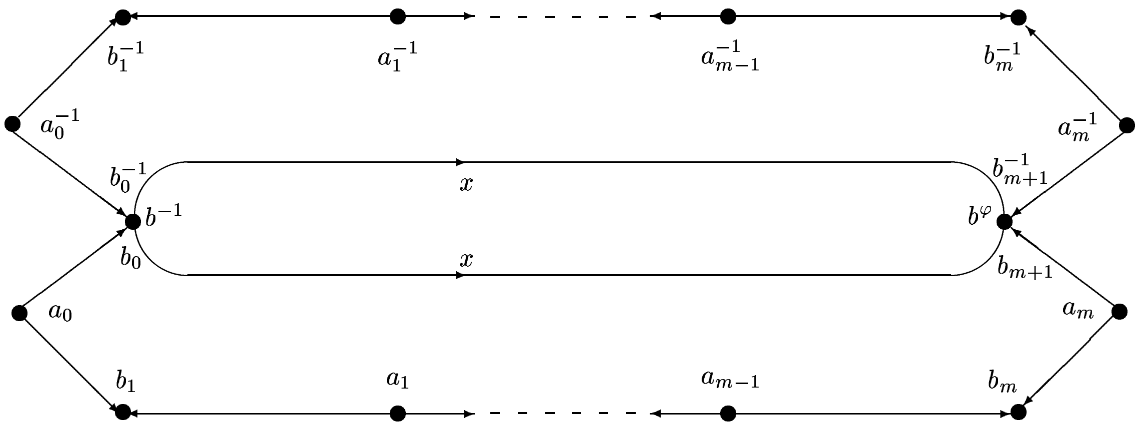


Рис. 6

Полные столкновения во внутренних вершинах, не являющихся началом или концом ребра с меткой x, также происходить не могут. В таких вершинах автомобили появляются только в целые моменты времени τ, причём в каждый такой момент времени τ каждый автомобиль, находящийся в такой вершине, проезжает либо угол с меткой $c \in C \setminus \{1\}$, либо угол с меткой $d \in \{a_0^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \dots, b_m^{\pm 1}, a_m^{\pm 1}\}$. Причём если один из автомобилей проезжает в момент τ угол с меткой d и одновременно другой автомобиль проезжает угол с меткой d', где $d, d' \in \{a_0^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \dots, b_m^{\pm 1}, a_m^{\pm 1}\}$, то либо $d' = d$, либо $d' = d^{-1}$.*) Это означает, что метка вершины, в которой в момент τ происходит полное столкновение, имеет вид $\prod z_i$, где $z_i \in \{d, d^{-1}\} \cup C \setminus \{1\}$, причём в силу приведённости диаграммы d и d^{-1} не могут быть соседними в последовательности (z_i), а в силу сильной приведённости диаграммы два элемента из $C \setminus \{1\}$ не могут быть соседними в этой последовательности. Значит, метка $\prod z_i$ вершины полного столкновения не может быть единицей группы G в силу трансцендентности элемента d над группой C. Следовательно, вершина полного столкновения не может быть внутренней вершиной диаграммы.

*) Последний случай возможен лишь при $\tau \in \{0, 2m\} + 4m\mathbb{Z}$, при этом $d = a_0^{\pm 1}$ или $d = a_m^{\pm 1}$. Это позволяет несколько ослабить условия теорем 4 и 4′, но мы не будем здесь этим заниматься.

На рисунке 2 показана гипотетическая вершина, в которой происходит полное столкновение в момент $\tau = 0$. Эта вершина не может быть внутренней, поскольку $a_0^{-1}ca_0^2c' \neq 1$ в группе G. Лемма 11 доказана.

Теорема $4'$ легко следует из всего сказанного. Действительно, предположим, что система (9) неразрешима. Тогда по лемме 8 существует диаграмма над этой системой. По лемме 9 эту диаграмму можно считать сильно приведённой. По лемме 11 на этой диаграмме можно задать правильное движение с не более чем одной точкой полного столкновения, что противоречит лемме 10. Тем самым теоремы $4'$ и 4 доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Б84] Бродский С.Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. ж. 1984. Т.25. №2. С.84–103.

[Кл94] Клячко Ант.А. Гипотеза Кервера—Лауденбаха и уравнения над группами. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1994.

[Кл05] Клячко Ант.А. Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. №4. С. 399–437. См. также arXiv:math.GR/0409146.

[Кл06a] Клячко Ант.А. Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. 2006. Т.79. №3. С. 409–419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[Кл06b] Клячко Ант.А. Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением // Алгебра и логика. (в печати). См. также arXiv:math.GR/0510582.

[ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[Ло86] Лоссов К.И. SQ-универсальность свободных произведений с конечными объединёнными подгруппами // Сиб. матем. ж. 1986. Т.27. №6. С.128–139.

[Оль95] Ольшанский А.Ю. SQ-универсальность гиперболических групп // Мат. Сборник. 1995. Т.186. №8. С.119–132.

[AMO06] Arzhantseva G., Minasyan A., Osin D. The SQ-universality and residual properties of relatively hyperbolic groups // arXiv:math.GR/0601590.

[BaPr78] Baumslag B., Pride S. Groups with two more generators than relators // J. London Math. Soc. 1978. V.17. P.425–426.

[Bu05] Button J.O. Large mapping tori of free group endomorphisms // arXiv:math.GR/0511715.

[CR01] Cohen M.M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142. See also arXiv:math.GR/0009101.

[Ed84] Edjvet M. Groups with balanced presentations // Arch. Math. 1984. V.42. no.4. P.311–313.

[FeR96] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.

[FoR05] Forester M., Rourke C. Diagrams and the second homotopy group // Comm. Anal. Geom. 2005. V.13. P.801-820. See also arXiv:math.AT/0306088.

[Gr83] Gromov M. Volume and bounded cohomology // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1982. No. 56. P.5–99. (1983).

[How83] Howie J. The solution of length three equations over groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V.26. P.89–96.

[How98] Howie J. Free subgroups in groups of small deficiency // J. Group Theory. 1998. V.1. no. 1. P.95–112.

[Kl93] Klyachko Ant.A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.

[La05] Lackenby M. A characterisation of large finitely presented groups // J. Algebra. 2005. V.287. no.2. P. 458–473. See also arXiv:math.GR/0403129.

[Neu76] Neumann B.H. A problem of Paul Erdős on groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1976. V.21. no.4. P.467–472.

[Neu73] Neumann P.M. The SQ-universality of some finitely presented groups // J. Austral. Math. Soc. 1973. V.16. P.1–6.

[OlOs06] Olshanskii A.Yu., Osin D.V. Adding high-powered relations to large groups: A short proof of Lackenby's result // arXiv:math.GR/0601589.

[P88] Promyslow S.D. A simple example of a torsion free nonunique product group // Bull. London Math. Soc. 1988. V.20. P.302–304.

[RS87] Rips E., Segev Y. Torsion free groups without unique product property // J. Algebra 1987. V.108. P.116–126.

[SaSc74] Sacerdote G.S., Schupp P.E. SQ-universality in HNN groups and one relator groups // J. London Math. Soc. 1974. V.7. P.733–740.

[Stö83] Stöhr R. Groups with one more generator than relators // Math. Z. 1983. V.182. no. 1. P.45–47.