

РАЗРЕШИМОСТЬ УНИМОДУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГРУППАХ И В АЛГЕБРАХ ЛИ

Антон А. Клячко[#] Михаил А. Михеенко[#] Александр Ю. Ольшанский^{b#}[#]Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.^bDepartment of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37240, U.S.A.
klyachko@mech.math.msu.su mamikheenko@mail.ru alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

Из наших результатов вытекает, в частности, что конечно порождённая разрешимая группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда она содержит решение всякого унимодулярного уравнения, то есть уравнения вида $\prod g_i x^{n_i} = 1$, где $g_i \in G$ и $\sum n_i = \pm 1$. Аналогичный факт оказывается верным и для алгебр Ли. Мы также строим пример унимодулярного уравнения $w(x) = g$ над конечно порождённой группой G , которое разрешимо (в G) при всех $g \in G$, но не при всех $g \in G$ решение единственно. Мы показываем, что для нильпотентных групп G множество унимодулярных отображений $G^n \rightarrow G^n$ (которые определяются естественным образом) образует группу относительно композиции.

1. Введение

Уравнение $g_1 x^{n_1} \dots g_k x^{n_k} = 1$ над группой G (где $g_i \in G$ и $n_i \in \mathbb{Z}$) называют невырожденным, если $\sum n_i \neq 0$; если же $\sum n_i = \pm 1$, то уравнение называют унимодулярным; а левые части таких уравнений мы называем невырожденными [унимодулярными] словами. Эти определения распространяются естественным образом на произвольные системы уравнений с произвольным множеством неизвестных (смотрите, например, [KMR24]), однако большая часть данной работы посвящена случаю одного уравнения с одним неизвестным. Исключение составляет параграф 4, в котором рассматриваются унимодулярные системы из n уравнений с n неизвестными, то есть такие системы уравнений над группами, для которых определитель матрицы, составленной из сумм показателей при i -м неизвестном в j -м уравнении, равен ± 1 . Вообще говоря,

- невырожденные уравнения ведут себя лучше, чем вырожденные; например, вырожденное уравнение $x^{-1}axb = 1$, где $a, b \in G$ — элементы разных порядков, не имеет решений ни в какой группе, содержащей группу G в качестве подгруппы; а существует ли пример невырожденного уравнения с таким свойством — это известный открытый вопрос — гипотеза Кервера–Лауденбаха;
- а унимодулярные уравнения ведут себя лучше, чем произвольные невырожденные; например, (невырожденное, но не унимодулярное) уравнение $x^2g = 1$ не имеет решений в бесконечной циклической группе $\langle g \rangle$; а унимодулярного уравнения с таким свойством не существует ни над какой нильпотентной группой (смотрите ниже); другой пример: в [K93] (смотрите также [FeR96]) показано, что

всякое унимодулярное уравнение над группой без кру-
чения имеет решение в некоторой большей группе,

а верно ли аналогичное утверждение для произвольных невырожденных уравнений — неизвестно.

Теорема Шмелькина [Ш67] (упрощённая и ослабленная формулировка). *Любая конечная унимодулярная система уравнений над нильпотентной группой G имеет решение (причём единственное) в группе G .*

Для разрешимых групп ситуация сложнее:

Работа первых двух авторов выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

- для каждого $n > 1$ существует унимодулярное уравнение с одним неизвестным над некоторой разрешимой группой степени n , не имеющее решений ни в какой большей разрешимой группе той же степени n [M26b];
- но для каждого натурального n всякая невырожденная система уравнений над любой группой G , обладающей субнормальным рядом $G = G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n+1} = \{1\}$, у которого все факторы G_i/G_{i+1} абелевы и без кручения, имеет решение в некоторой большей группе, обладающей субнормальным рядом такой же длины n , у которого все факторы абелевы и без кручения [KMR24].

В параграфе 3 мы дополняем эти результаты из [Ш67], [KMR24] и [M26b], доказывая (в частности) следующее утверждение:

Над каждой конечно порождённой разрешимой (или линейной) ненильпотентной группой существует унимодулярное уравнение, не имеющее решений в этой группе.

Группу можно назвать *унимодулярно [невырожденно] замкнутой*, если всякое унимодулярное [невырожденное] уравнение над ней имеет решение в ней.

Таким образом, конечно порождённая разрешимая (или линейная) группа унимодулярно замкнута тогда и только тогда, когда она нильпотентна.

Однако, как заметил Д. В. Осин, существуют конечно порождённые ненильпотентные унимодулярно замкнутые группы. Действительно, пусть $w_1(x) = 1$, $w_2(x) = 1, \dots$ — все унимодулярные уравнения над свободной группой F ранга два, а $n_1, n_2, \dots$ — натуральные числа, и $\tilde{x}_i \gamma_i(F)$ — решение уравнения $w_i(x) = 1$ в $F/\gamma_i(F)$ (существующее по теореме Шмелькина). Тогда $w_i(\tilde{x}_i) \in \gamma_i(F)$, и конечно порождённая унимодулярно замкнутая факторгруппа $G = F / \langle\langle w_1(\tilde{x}_1), w_2(\tilde{x}_2), \dots \rangle\rangle$ является группой Голода–Шафаревича, если числа n_i растут достаточно быстро (смотрите [E12]); в частности, группа G ненильпотентна. А в ненильпотентной конечно порождённой факторгруппе $G / \bigcap \gamma_i(G)$ каждое унимодулярное уравнение имеет даже единственное решение (единственность вытекает из теоремы Шмелькина, поскольку эта факторгруппа нильпотентно аппроксимируема).

Известно также, что унимодулярно (и даже невырожденно) замкнуты следующие группы:

- связные компактные группы Ли [GR62];
- универсальная локально конечная группа Холла [Ha59] (её невырожденная замкнутость почти немедленно следует из результатов работы [GR62]).

В параграфе 4 мы доказываем теоремы об обратной и о неявной функции, из которых вытекает, в частности, что

для нильпотентной группы G множество унимодулярных отображений $G^n \rightarrow G^n$ (которые определяются естественным образом, смотрите параграф 4) образует группу относительно композиции.

Строение этой группы $\mathbf{GA}_n(G)$, которую мы называем *полной аффинной группой*, это предмет дальнейших исследований; в простейшем случае $G = \mathbb{Z}$ получается известная группа $\mathbf{GA}_n(\mathbb{Z}) \simeq \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$.

Для произвольной группы унимодулярные отображения могут вести себя очень странно. Из результатов Анашина [An77] вытекает, что для конечной неабелевой простой группы G все отображения $G^n \rightarrow G^n$ унимодулярны (для всех n). А в параграфе 2 мы строим сюръективное, но не инъективное унимодулярное отображение из некоторой группы в себя.

Если же не требовать унимодулярность, то могут происходить очень странные вещи: существует уравнение над бесконечной конечно порождённой группой, имеющее ровно одно нерешение [KT05] (в параграфе 2 мы используем значительно более сильный результат из [KOO13]).

В связи с теоремой Шмелькина отметим ещё теорему Кузьмина [Ку74] (смотрите также [Ку06]): конечно порождённая метабелева группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда всякое унимодулярное уравнение с одним неизвестным над G имеет в G не более одного решения. (и то же самое верно для конечно порождённых групп, у которых какой-то член нижнего центрального ряда абелев [Ку78]). Другие недавние результаты о невырожденных и унимодулярных уравнениях над группами можно найти, например, в [NT22], [KM23], [M23], [KMR24], [M26a], [M26b], [M26c].

В параграфе 5 мы распространяем результаты параграфа 3 на алгебры Ли и показываем, что

конечно порождённая разрешимая алгебра Ли (над любым полем) нильпотентна тогда и только тогда, когда всякое невырожденное уравнение над этой алгеброй имеет в ней решение.

Здесь *невырожденное уравнение* над алгеброй Ли A это равенство вида $w(x) = 0$, где $w(x)$ — это элемент свободного произведения $A * \langle x \rangle$, не лежащий в идеале, порождённом алгеброй A (а $\langle x \rangle$ — это одномерная алгебра Ли, порождённая неизвестным x).

Отметим, что теоретико-групповые рассуждения параграфа 3 не переносятся на алгебры Ли. Дело в том, что всякая конечно порождённая ненильпотентная разрешимая группа имеет конечный ненильпотентный гомоморфный образ (и это существенным образом используется в параграфе 3); а для алгебр Ли аналогичное утверждение неверно. Действительно, трёхмерная нильпотентная алгебра Ли $L = \langle a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = 0 \rangle$ (над полем F) имеет бесконечномерное представление $L \rightarrow \mathfrak{gl}(F[t])$, где $a \mapsto$ (умножение на t), $b \mapsto \frac{d}{dt}$, $c \mapsto \text{id}$. Это представление неприводимо, если $\text{char } F = 0$; поэтому соответствующая полупрямая сумма алгебры L и идеала $F[t]$ при любом гомоморфизме в конечномерную алгебру превращается в нильпотентную алгебру (поскольку идеал $F[t]$ является бесконечномерным и минимальным).

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y , x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Коммутатор (групповой) $[x, y]$ понимается как $x^{-1}y^{-1}xy$. Символ $\langle x \rangle_n$ обозначает циклическую группу порядка n , порождённую элементом x . Свободная группа ранга n (с базисом $x_1, \dots, x_n$) обозначается символом F_n (или $F(x_1, \dots, x_n)$). Символ $*$ обозначает свободное произведение, а $\langle\langle X \rangle\rangle$ — это нормальное замыкание множества X (в какой-то группе); $\gamma_i(G)$ — это i -й член нижнего центрального ряда группы G . Символ G^n обозначает n -ю прямую степень группы G .

Авторы благодарят Дениса Осина за ценное замечание о ненильпотентных унимодулярно замкнутых конечно порождённых группах (смотрите выше). Второй автор благодарит также Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Сюръективное, но не инъективное, унимодулярное отображение

Унимодулярное отображение из группы G в себя — это отображение вида $g \mapsto w(g)$, где слово $w \in G * \langle x \rangle_\infty$ унимодулярно.

Следующее утверждение представляет собой сильно упрощённую и ослабленную формулировку теоремы 2.3 из [KOO13].

Теорема КОО [KOO13]. *Любая счётная группа G_1 без элементов порядка два вкладывается в простую 2-порождённую группу $\text{KOO}(G_1)$, над которой существует уравнение $w(x) = 1$, имеющее ровно одно нерешение в $\text{KOO}(G_1)$ (то есть решениями этого уравнения являются все элементы группы $\text{KOO}(G_1)$, кроме ровно одного).*

Лемма 1. Существует группа G_1 без кручения и вырожденное уравнение $v(x) = 1$ над G_1 такое, что в любой большей группе $\tilde{G}_1 \supseteq G_1$ множество M решений этого уравнения таково, что $bM \subsetneq M$ для некоторого $b \in G_1$.

Доказательство. Пусть $G_1 = \langle a, b, c \mid a^b = a^2, [a^2, c] = 1 \rangle$ (это свободное произведение с объединёнными циклическими подгруппами группы Баумслага–Солитера $BS(1, 2)$ и свободной абелевой группы ранга два). Положим $v(x) = [a^x, c] \in G_1 * \langle x \rangle_\infty$.

Если $\tilde{x} \in \tilde{G}_1$ — решение (то есть $v(\tilde{x}) = [a^{\tilde{x}}, c] = 1$), то

$$v(b\tilde{x}) = [a^{b\tilde{x}}, c] = [a^{2\tilde{x}}, c] = \left[\left(a^{\tilde{x}} \right)^2, c \right] = 1.$$

Таким образом, $bM \subseteq M$. Чтобы показать, что включение строгое, заметим, что единица не является решением ($v(1) = [a, c] \neq 1$), а $b \cdot 1$ — решение: $v(b) = [a^b, c] = [a^2, c] = 1$. Таким образом, $b \in M \setminus bM$. Это завершает доказательство леммы.

Теорема 1. Существует 2-порождённая простая группа G и унимодулярное слово $u \in G * \langle x \rangle_\infty$ такое, что отображение $G \rightarrow G$, $g \mapsto u(g)$ сюръективно, но не инъективно.

Доказательство. Положим $G = \text{КОО}(G_1)$, где G_1 — группа из леммы 1. Пусть $w(x) = 1$ — уравнение над G с ровно одним нерешением.

- Во-первых, можно считать, что единственное нерешение уравнения $w(x) = 1$ есть единица (это достигается очевидной заменой переменных).
- Во-вторых, можно считать, что $w(1)$ — это произвольный наперёд заданный неединичный элемент группы $\text{КОО}(G_1)$. Действительно, каждый элемент $g' \in G$ лежит в нормальном замыкании элемента $w(1)$ (в силу простоты группы $G = \text{КОО}(G_1)$), то есть $g' = \prod w(1)^{\pm g_i}$. Тогда у уравнения $w'(x) \equiv \prod w(x)^{\pm g_i} = 1$ все неединичные элементы группы G являются решениями, а $w'(1) = g'$.
- В частности, существует слово $w(x) \in G * \langle x \rangle_\infty$ такое, что $w(g) = \begin{cases} 1 & \text{при } g \neq 1; \\ b^{-1} & \text{при } g = 1; \end{cases}$ (где $b \in G_1$ из леммы 1).
- Теперь унимодулярное слово $u(x) = w(v(x))$ является искомым. Действительно, по лемме 1 (для $\tilde{G}_1 = \text{КОО}(G_1) = G$)
 - при $g \notin M$ мы имеем $u(g) = \underbrace{w(v(g))}_{\neq 1} \cdot g = 1 \cdot g = g$;
 - а при $g \in M$ мы имеем $u(g) = \underbrace{w(v(g))}_{=1} \cdot g = b^{-1} \cdot g$.

Таким образом, слово $u(x)$ задаёт отображение, которое действует тождественно вне множества M , а это множество M переводит в большее множество $b^{-1}M \supsetneq M$ (по лемме 1). Это завершает доказательство.

3. Финитная аппроксимация унимодулярных уравнений

Теорема 2. Если все унимодулярные уравнения над группой G разрешимы в группе $\tilde{G} \supseteq G$, то всякий гомоморфизм из $\tilde{G}$ в конечную группу отображает G в нильпотентную подгруппу.

Доказательство. Поскольку разрешимость унимодулярных уравнений сохраняется при переходе к гомоморфным образам, группу $\tilde{G}$ можно считать конечной, а доказать надо нильпотентность подгруппы $G \subseteq \tilde{G}$. Покажем сперва, что

$$\text{для любой конечной ненильпотентной группы } G \text{ найдётся несюръективное унимодулярное отображение } f: G \rightarrow G. \quad (1)$$

Гипотетический контрпример минимального порядка к этому утверждению обязан иметь тривиальный центр, ибо несюръективность унимодулярного отображения $G/Z(G) \rightarrow G/Z(G)$ влечёт несюръективность его (унимодулярного) поднятия $G \rightarrow G$, а группа с нильпотентной факторгруппой по центру нильпотентна.

Возьмём теперь в нетривиальной конечной группе G с тривиальным центром минимальную нормальную подгруппу B , элемент $b \in B \setminus \{1\}$ и элемент $g \in G$, не коммутирующий с B . Тогда $B = \langle\langle b \rangle\rangle = \langle\langle [g, b] \rangle\rangle$, то есть $b = \prod [g, b]^{\pm g_i}$, и унимодулярное уравнение $x = \prod [g, x]^{\pm g_i}$ имеет два разных решения: $x = b$ и $x = 1$, то есть унимодулярное отображение $x \mapsto x (\prod [g, x]^{\pm g_i})^{-1}$ неинъективно (и, следовательно, несюръективно, поскольку речь идёт о конечных группах). Это противоречие доказывает (1).

Доказывая от противного, предположим, что группа G ненильпотентна. Расширим небиективное отображение f из факта (1) до унимодулярного отображения $\tilde{f}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ (задающегося тем же унимодулярным словом w) и заметим, что каждая степень $\tilde{f}^k \stackrel{\text{опр}}{=} \tilde{f} \circ \dots \circ \tilde{f}$ отображения $\tilde{f}$ тоже является унимодулярным отображением, причём для некоторой степени $F = \tilde{f}^k$ выполнено равенство $F = F \circ F$ (так как каждая конечная полугруппа содержит идемпотент). Подгруппа G не может содержаться в образе отображения F , поскольку на этом образе отображение F действует тождественно, а на подгруппе G отображения f и F неинъективны. Поэтому унимодулярное уравнение $\underbrace{w(w(\dots(t)\dots))}_{k \text{ пар скобок}} = g$ (с коэффициентами

из G) неразрешимо в $\tilde{G}$ при $g \in G \setminus F(\tilde{G})$. Это завершает доказательство.

Следствие. Пусть конечно порождённая группа G обладает одним из следующих свойств:

- а) каждая нетривиальная факторгруппа группы G содержит нетривиальную конечную или абелеву нормальную подгруппу (например, группа G разрешима);
- б) группа G линейна.

Тогда в G унимодулярно замкнута тогда и только тогда, когда она нильпотентна.

Доказательство. В нильпотентной группе разрешимы все унимодулярные уравнения по теореме Шмелькина. А в другую сторону утверждение немедленно вытекает из теоремы 2 и следующего известного факта:

каждая конечно порождённая ненильпотентная группа со свойствами а) или б) обладает конечной ненильпотентной факторгруппой.

В случае а) это доказано в [Ro70] (смотрите также [Ro82]), а в случае б) это установлено в [Пл66] и [We68].

4. Теоремы об обратной и о неявной функции

Пусть G — группа. Мы рассматриваем группу *формальных полиномиальных отображений* $G(X) = G(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{опр}}{=} (G * F(x_1, \dots, x_n))^n$ (где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — набор букв) с обычным (покомпонентным) умножением. Компоненты формального полиномиального отображения Φ мы обозначаем символами Φ_i , то есть $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$. На группе $G(X)$ есть дополнительная бинарная операция, *композиция*: $(\Phi \circ \Psi)_i = \Phi_i(\Psi) = \Phi_i(\Psi_1, \dots, \Psi_n)$, относительно которой $G(X)$ является полугруппой с единицей $e \stackrel{\text{опр}}{=} (x_1, \dots, x_n)$. Покомпонентное умножение и композиция связаны односторонней дистрибутивностью: $(\Phi \Psi) \circ \Theta = (\Phi \circ \Theta)(\Psi \circ \Theta)$. Ещё одно простое наблюдение состоит в том, что

$$\text{если } \Phi \in [G(X), G(X)], \text{ то } \Phi \circ (\Psi \Theta) \in (\Phi \circ \Psi) \cdot [\langle\langle \Theta \rangle\rangle, G(X)]. \quad (2)$$

Действительно, компоненты Φ_i лежат в коммутанте группы $G(x_1, \dots, x_n)$, а компоненты Θ_i центральные (если считать по модулю $[\langle\langle \Theta \rangle\rangle, G(X)]$), поэтому $\Phi_i(\Psi \Theta) = \Phi_i(\Psi)$.

Лемма 2. Если $\Psi \in G(X)$, а $\Phi \in \gamma_k(G(X))$, где $k \geq 2$, то $(e\Psi) \circ (e\Phi) \in e\Psi\Phi \cdot \gamma_{k+1}(G(X))$.

Доказательство. По модулю $\gamma_{k+1}(G(X))$ мы имеем

$$(e\Psi) \circ (e\Phi) = (e \circ (e\Phi))(\Psi \circ (e\Phi)) = e\Phi(\Psi \circ (e\Phi)) \stackrel{(2)}{=} e\Phi(\Psi \circ e) = e\Phi\Psi = e\Psi\Phi,$$

где первое равенство — это дистрибутивность. Это завершает доказательство леммы.

Формальное полиномиальное отображение Φ мы называем *унимодулярным*, если определитель матрицы, составленной из сумм показателей при переменной x_i в слове Φ_j , равен ± 1 .

Каждое формальное полиномиальное отображение Φ задаёт отображение $G^n \rightarrow G^n$, которое мы обозначаем символом Φ_G . Отображение $G^n \rightarrow G^n$, имеющее вид Φ_G для некоторого $\Phi \in G(X)$ мы называем *полиномиальным*; а если Φ унимодулярно, то и отображение Φ_G мы называем *унимодулярным*.

По теореме Шмелькина для нильпотентной группы G всякое унимодулярное отображение $G^n \rightarrow G^n$ биективно.

Теорема об обратной функции. Для любой нильпотентной группы G и любого унимодулярного отображения $\Gamma_G: G^n \rightarrow G^n$ обратное отображение является унимодулярным.

Доказательство. Нам надо найти унимодулярное формальное отображение $\Psi \in G(X)$ такое, что отображение $(\Psi \circ \Gamma)_G$ тождественно.

Во-первых, заменив Γ на композицию $\Theta \circ \Gamma$, где Θ — (любое) унимодулярное формальное отображение, матрица которого обратна к матрице отображения Γ , мы сводим задачу к случаю, когда матрица отображения Γ единичная.

Во-вторых, заменив Γ на композицию $\Xi \circ \Gamma$, где $\Xi = e \cdot (\Gamma_G(1, \dots, 1))^{-1}$, мы сводим задачу к случаю, когда матрица отображения Γ единичная и $\Gamma_G(1, \dots, 1) = (1, \dots, 1)$.

Таким образом, мы считаем, что $\Gamma \in e \cdot \gamma_2(G(X))$. По лемме 2 для некоторого $\Delta' \in G(X)$ мы имеем $\Gamma' = \Delta' \circ \Gamma \in e \cdot \gamma_3(G(X))$ (а именно, если $\Gamma = e\Phi$, то $\Delta' = e\Phi^{-1}$). Ещё раз применяя лемму 2 и продолжая в том же духе мы получим $\Gamma^{(s)} = \Delta^{(s)} \circ \Delta^{(s-1)} \circ \dots \circ \Delta' \circ \Gamma \in e \cdot \gamma_{s+2}(G(X))$, где $s + 2$ больше степени нильпотентности группы G . Это значит, что отображение $\Gamma_G^{(s)}$ тождественно, а отображение $(\Delta^{(s)} \circ \dots \circ \Delta')_G$ обратное к отображению Γ_G . Это завершает доказательство.

Теорема о неявной функции. Для любой нильпотентной группы G и любой системы уравнений $S = \{w_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 1, \dots, w_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 1\}$ такой, что определитель матрицы, состоящей из сумм показателей при неизвестных x_i в уравнении $w_j = 1$, равен единице, найдутся такие слова $v_1(y_1, \dots, y_m), \dots, v_n(y_1, \dots, y_m) \in G * F(y_1, \dots, y_m)$, что множество решений системы S имеет вид

$$\{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \in G^{n+m} \mid \tilde{x}_1 = v_1(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m), \dots, \tilde{x}_n = v_n(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)\}.$$

Таким образом, $\tilde{y}_i$ — свободные переменные, то есть они могут принимать любые значения из G .

Доказательство. Пусть $G_Y = (G * F(y_1, \dots, y_m)) / \gamma_{s+1}(G * F(y_1, \dots, y_m))$, где s — степень нильпотентности группы G . Слова w_i задают унимодулярное отображение $\Phi_{G_Y}: G_Y^n \rightarrow G_Y^n$. По теореме об обратной функции обратное отображение $(\Phi_{G_Y})_o^{-1}$ также унимодулярно, то есть (в частности) для некоторых слов $r_i(t_1, \dots, t_n) \in G_Y * F(t_1, \dots, t_n)$

$$(\Phi_{G_Y})_o^{-1}(1, \dots, 1) = (r_1(1, \dots, 1), \dots, r_n(1, \dots, 1)).$$

Элементы $v_i = r_i(1, \dots, 1) \in G_Y$ (рассматриваемые как слова от $y_1, \dots, y_m$) будут искомыми. Действительно,

- систему уравнений $\{w_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 1\}$ над G_Y можно записать так:

$$\Phi_{G_Y}(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1);$$

- по построению $x_i = v_i$ — это решение этой системы уравнений, поскольку после подстановки $x_i = v_i$ в левой части мы получаем

$$\Phi_{G_Y}(v_1, \dots, v_n) = \Phi_{G_Y}((\Phi_{G_Y})_o^{-1}(1, \dots, 1)) = (1, \dots, 1);$$

- каждый набор $(g_1, \dots, g_m) \in G^m$ определяет ретракцию $G_Y \rightarrow G$ (при которой $y_i \mapsto g_i$);
- значит, каждый набор $(v_1(g_1, \dots, g_m), \dots, v_n(g_1, \dots, g_m), g_1, \dots, g_m)$ является решением системы S над G ;
- наоборот, если есть некоторое решение $x_i = g'_i, y_j = g_j$ системы уравнений S в группе G , то система уравнений $\{w_i(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_m) = 1\}$ над G имеет два решения: $\{x_i = g'_i\}$ и $\{x_i = v_i(g_1, \dots, g_m)\}$; но эта унимодулярная система уравнений над нильпотентной группой имеет единственное решение по теореме Шмелькина; следовательно, $g'_i = v_i(g_1, \dots, g_m)$, что и требовалось.

5. Унимодулярные уравнения над алгебрами Ли

Теорема Квиллена [Qu69] (смотрите также [Ди78] или [Ба85]). Если ассоциативная алгебра U с единицей над полем F обладает такой фильтрацией

$$1 \in U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots \quad (\text{где } U_i \text{ — подпространства, } U_i U_j \subseteq U_{i+j} \text{ и } \bigcup U_i = U),$$

что ассоциированная градуированная алгебра $\text{gr}(U) \stackrel{\text{онп}}{=} \bigoplus U_i/U_{i-1}$ (где $U_{-1} \stackrel{\text{онп}}{=} \{0\}$) конечно порождена и коммутативна, то любой эндоморфизм простого U -модуля алгебраичен над F (то есть обнуляется некоторым ненулевым многочленом из $F[x]$).

Лемма 3. Если на ассоциативной алгебре U с единицей над полем F задана произвольная фильтрация

$$1 \in U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots \quad (\text{где } U_i \text{ — подпространства, } U_i U_j \subseteq U_{i+j} \text{ и } \bigcup U_i = U),$$

а на алгебре многочленов $U[t]$ задана фильтрация $U[t]_i = \bigoplus_{k+l=i} U_k t^l$, то алгебры $\text{gr}(U[t])$ и $\text{gr}(U)[t]$ изоморфны (как абстрактные, не градуированные алгебры).

Доказательство. $U[t]_i/U[t]_{i-1} = \left(\bigoplus_{k+l=i} U_k t^l \right) / \left(\bigoplus_{p+q=i-1} U_p t^q \right) \simeq \bigoplus_{k+l=i} (U_k/U_{k-1}) t^l$ (последний изоморфизм — это просто $(\bigoplus C_s) / (\bigoplus D_s) \simeq \bigoplus (C_s/D_s)$, если $D_s \subseteq C_s$). Поэтому $\text{gr}(U[t]) = \bigoplus U[t]_i/U[t]_{i-1} = \bigoplus_i \bigoplus_{k+l=i} (U_k/U_{k-1}) t^l = \bigoplus_{k,l} (U_k/U_{k-1}) t^l$. С другой стороны, $\text{gr}(U)[t] = \bigoplus_k (U_k/U_{k-1})[t] = \bigoplus_{k,l} (U_k/U_{k-1}) t^l$. Нетрудно убедиться, что умножение элементов подпространств $(U_k/U_{k-1}) t^l$ в алгебрах $\text{gr}(U[t])$ и $\text{gr}(U)[t]$ устроено одинаково (а именно, естественным образом: $(u_k + U_{k-1}) t^l \cdot (u_j + U_{j-1}) t^m = (u_k u_j + U_{k+j-1}) t^{l+m}$). Это завершает доказательство.

Лемма 4. Пусть ассоциативная алгебра U над полем F обладает такой возрастающей фильтрацией, что ассоциированная градуированная алгебра конечно порождена и коммутативна, а φ — такой эндоморфизм конечно порождённого U -модуля M , что эндоморфизм $f(\varphi)$ сюръективен для любого многочлена $f \in F[x]$ с ненулевым свободным членом. Тогда $\varphi^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Сюръективность эндоморфизма $f(\varphi)$ переносится на фактормодули по φ -инвариантным подмодулям. Покажем сперва, что

среди φ -инвариантных подмодулей $N \subset M$, не содержащих $\varphi^n(M)$ ни для какого n , найдётся максимальный по включению.

Действительно, по лемме Цорна достаточно показать, что, если объединение линейно упорядоченного по включению семейства $\mathcal{N}$ подмодулей содержит $\varphi^n(M)$ (для некоторого n), то один из членов N этого семейства содержит $\varphi^n(M)$. А это немедленно вытекает из конечной порождённости модуля M : пусть B — конечное множество порождающих модуля M , тогда один из модулей $N \in \mathcal{N}$ содержит конечное множество $\varphi^n(B)$, и, стало быть, $\varphi^n(M) \subseteq N$.

Факторизуя по максимальному φ -инвариантному подмодулю, не содержащему $\varphi^n(M)$ ни для какого n , мы получаем (доказывая от противного), что утверждение леммы неверно для M , но верно для любого его собственного фактормодуля по φ -инвариантному подмодулю. Поэтому мы считаем, что для каждого ненулевого φ -инвариантного подмодуля $N \subseteq M$ найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $\varphi^k(M) \subseteq N$. В частности, ядро $\ker \varphi$ можно считать нулевым (поскольку иначе $\varphi^k(M) \subseteq \ker \varphi$ и $\varphi^{k+1} = 0$, что и требовалось).

Значит, эндоморфизм φ инъективен, и $\varphi(M) \simeq M$. Поэтому можно построить бесконечную в обе стороны цепочку модулей $\dots \subseteq M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$, где каждый модуль M_i изоморфен модулю M , и $\varphi(M_i) = M_{i-1}$. При этом φ является автоморфизмом U -модуля $\overline{M} = \bigcup M_i$. (Эндоморфизм φ распространяется на модуль $\overline{M}$ естественным образом: $\varphi(t_i) \stackrel{\text{опр}}{=} \varphi(t)_i$, где $t \mapsto t_i$ — изоморфизм из M в M_i .) Кроме того,

$$\begin{aligned} &\text{для каждого ненулевого } \varphi\text{-инвариантного подмодуля} \\ &N \subseteq M_i \text{ найдётся такое } k \in \mathbb{N}, \text{ что } \varphi^k(M_i) \subseteq N, \end{aligned} \quad (3)$$

поскольку для модуля M такое свойство верно, как отмечено выше.

На U -модуле $\overline{M}$ возникает структура $U[x, y]$ -модуля, где x действует как φ , а y — как φ^{-1} . Каждый ненулевой подмодуль $N \subseteq \overline{M}$ нетривиальным образом пересекает одно из подпространств M_i ; следовательно, $M_{i-k} = \varphi^k(M_i) \stackrel{(3)}{\subseteq} N \cap M_i \subseteq N$ для некоторого k , а значит, все подпространства M_s содержатся в N , поскольку $M_s = y^{s-i+k} M_{i-k}$ при $s \geq i - k$. Таким образом, $N = \overline{M}$, и $U[x, y]$ -модуль прост.

По лемме 3 (применённой два раза) алгебра $U[x, y]$ обладает такой фильтрацией, что ассоциированная градуированная алгебра конечно порождена и коммутативна (поскольку U обладает такой фильтрацией). Поэтому, по теореме Квиллена автоморфизм φ $U[x, y]$ -модуля $\overline{M}$ алгебраичен над F . Минимальный многочлен автоморфизма φ обязан быть неприводимым (поскольку алгебра эндоморфизмов простого модуля является телом по лемме Шура). А это противоречит сюръективности эндоморфизмов $f(\varphi)$ для всех многочленов f с ненулевым свободным членом. Это завершает доказательство леммы.

Теорема 3. В конечно порождённой разрешимой алгебре Ли A над полем каждое невырожденное уравнение с одним неизвестным имеет решение тогда и только тогда, когда алгебра A нильпотентна.

Доказательство. В нильпотентной алгебре (даже необязательно лиевской или ассоциативной) каждое невырожденное уравнение (и даже каждая конечная невырожденная система уравнений) имеет решение [BO23].

Для доказательства в другую сторону заметим, что разрешимость невырожденных уравнений переносится на факторалгебры, поэтому по индукции по ступени разрешимости можно считать, что факторалгебра алгебры A по последнему ненулевому члену P производного ряда нильпотентна. Это означает, что идеал P абелев и имеет конечную коразмерность (поскольку конечно порождённые нильпотентные алгебры конечномерны).

Выберем в алгебре A нильпотентный идеал I минимальной коразмерности такой, что $I \supseteq P$. Надо показать, что $I = A$. Предположив противное, возьмём ненулевой элемент $z + I$ из центра факторалгебры A/I . Чтобы получить противоречие, достаточно показать, что идеал $I + Fz$ нильпотентный (где F — основное поле).

Невырожденное (унимодулярное) уравнение

$$x + c_1[z, x] + c_2[z, [z, x]] + \dots = b \quad (*)$$

(с неизвестным x) по условию имеет решение для любых $c_i \in F$ и для любого $b \in I$. Это решение $\tilde{x}$ должно лежать в I (поскольку $b \in I$, и $[z, \tilde{x}] \in I$ из-за центральности элемента $z + I \in A/I$).

Векторное пространство $M = I/[I, I]$ является модулем над нильпотентной конечномерной алгеброй A/I . На модульном языке разрешимость всех уравнений вида $(*)$ означает, что для любого многочлена $f \in F[y]$ с единичным свободным членом эндоморфизм $f(\varphi)$ модуля M сюръективен, где $\varphi: m \mapsto [z, m]$ (это эндоморфизм, поскольку $z + I$ содержится в центре алгебры A/I).

Универсальная обёртывающая U к конечномерной алгебре A/I обладает, как известно, такой возрастающей фильтрацией, что соответствующая градуированная алгебра является алгеброй многочленов от конечного числа переменных (смотрите, например, [Ба85]). Поэтому по лемме 4 мы получаем, что $\varphi^k = 0$ для некоторого k . Но тогда идеал $(I + Fz)/[I, I]$ нильпотентен ступени не выше k . Это означает нильпотентность идеала $I + Fz$ (и завершает доказательство) в силу следующего известного аналога теоремы Холла.

Теорема Чао–Стюарта [Ch68], [St70]. Если I — нильпотентный идеал в алгебре Ли L , и факторалгебра $L/[I, I]$ нильпотентна, то L нильпотентна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ан77] В. С. Анашин, О функционально полных группах, Мат. заметки, 22:1 (1977), 147-151.
- [Ба85] Ю. А. Бахтурин, Тождества в алгебрах Ли. М: Наука, 1985.
- [Ди78] Ж. Диксмье, Универсальные обертывающие алгебры. М: Мир, 1978.
- [Ку74] Ю. В. Кузьмин, Аппроксимация метабелевых групп, Алгебра и логика, 13:3 (1974), 300-310.
- [Ку78] Ю. В. Кузьмин, О некоторых аппроксимационных свойствах многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$, УМН, 33:4(202) (1978), 217-218.
- [Ку06] Ю. В. Кузьмин, Гомологическая теория групп. М: Факториал, 2006.
- [М24] М. А. Михеенко, О p -невырожденных системах уравнений над разрешимыми группами, Мат. сборник, 215:6 (2024), 61-76. См. также arXiv:2309.09096.
- [М26b] М. А. Михеенко, Унимодулярные уравнения, не сохраняющие степень разрешимости группы, Известия РАН. Сер. мат. (в печати). См. также arXiv:2505.12783.
- [Пл66] В. П. Платонов, Подгруппа Фраттини линейных групп и финитная аппроксимируемость, Доклады АН СССР, 171:4 (1966), 798-801.
- [Ш67] А. Л. Шмелькин, О полных нильпотентных группах, Алгебра и логика. Семинар, 6:2 (1967), 111-114.

- [BO23] Yu. Bahturin, A. Olshanskii, Nilpotent algebras, implicit function theorem, and polynomial quasigroups, *Journal of Algebra* 632 (2023), 154-193.
См. также arXiv:2208.09527.
- [Ch68] Chong-Yun Chao, Some characterizations of nilpotent Lie algebras, *Mathematische Zeitschrift*, 103:1 (1968), 40-42.
- [E12] M. Ershov, Golod–Shafarevich groups: a survey, *International Journal of Algebra and Computation*, 22:05 (2012), 1230001. См. также arXiv:1206.0490.
- [GR62] M. Gerstenhaber, O.S. Rothaus, The solution of sets of equations in groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 48:9 (1962), 1531-1533.
- [FeR96] R. Fenn, C. Rourke, Klyachko’s methods and the solution of equations over torsion-free groups, *L’Enseignement Mathématique*, 42 (1996), 49-74.
- [Ha59] Ph. Hall, Some Constructions for Locally Finite Groups, *Journal of the London Mathematical Society*, s1-34:3 (1959), 305-319.
- [K93] A. A. Klyachko, A funny property of sphere and equations over groups, *Communications in Algebra*, 21:7 (1993), 2555-2575.
- [KMR24] A. A. Klyachko, M. A. Mikheenko, V. A. Roman’kov, Equations over solvable groups, *Journal of Algebra*, 638 (2024), 739-750. См. также arXiv:2303.13240.
- [KOO13] A. A. Klyachko, A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, On topologizable and non-topologizable groups, *Topology and its Applications*, 160:16 (2013), 2104-2120.
См. также arXiv:1210.7895.
- [KT05] A. A. Klyachko, A. V. Trofimov, The number of non-solutions of an equation in a group, *Journal of Group Theory*, 8:6 (2005), 747-754. См. также arXiv:math.GR/0411156.
- [M26a] M. A. Mikheenko, Infinite systems of equations in abelian and nilpotent groups, *Journal of Group Theory*, 29:1 (2026), 85-103. См. также arXiv:2410.20729.
- [M26c] M. A. Mikheenko, On a generalization of Shmel’kin’s theorem, arXiv:2603.25110 .
- [Qu69] D. Quillen, On the endomorphism ring of a simple module over an enveloping algebra, *Proc. Amer. Math. Soc*, 21:1 (1969), 171-172.
- [Ro70] D. J. S. Robinson, A theorem on finitely generated hyperabelian groups, *Inventiones mathematicae*, 10:1 (1970), 38-43.
- [Ro82] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*. New York: Springer, 1982.
- [St70] I. N. Stewart, Infinite-dimensional Lie algebras in the spirit of infinite group theory, *Compositio Mathematica*, 22:3 (1970), 313-331.
- [We68] B. A. F. Wehrfritz, Frattini subgroups in finitely generated linear groups, *Journal of the London Mathematical Society*, s1-43:1 (1968), 619-622.