Вербально замкнутые почти свободные подгруппы

Антон А. Клячко Андрей М. Мажуга

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su mazhuga.andrew@yandex.ru

Теорема Мясникова–Романькова утверждает, что всякая вербально замкнутая подгруппа конечно порождённой свободной группы является ретрактом. Мы доказываем, что все свободные (и многие почти свободные) вербально замкнутые подгруппы являются ретрактами в *любых* конечно порождённых группах.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой* [10] (см. также [11], [4], [9]), если всякое уравнение вида

$$w(x_1, x_2, \ldots) = h, \quad \text{где } w \text{ — это элемент свободной группы } F(x_1, x_2, \ldots) \text{ и } h \in H,$$

имеющее решение в G, имеет решение в H. Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из H

$$\{w_1(x_1, x_2, \ldots) = 1, \ldots, w_m(x_1, x_2, \ldots) = 1\}, \quad \text{где } w_i \in H * F(x_1, x_2, \ldots),$$

имеющая решение в G, имеет решение в H, то подгруппу H называют *алгебраически замкнутой* в G.

Ясно, что ретракт любой группы (то есть образ такого эндоморфизма ρ, что $\rho \circ \rho = \rho$) является алгебраически замкнутой подгруппой. Нетрудно показать [10], что для конечно порождённых подгрупп конечно определённых групп верно и обратное:

> *конечно порождённая подгруппа конечно определённой группы алгебраически замкнута тогда и только тогда, когда она является ретрактом.*

Для (более слабого) свойства вербальной замкнутости подобное структурное описание неизвестно. Однако в свободных группах ситуация простая: вербально замкнутые подгруппы, алгебраически замкнутые подгруппы и ретракты — это одно и то же.

Теорема Мясникова–Романькова [10]. *Вербально замкнутые подгруппы конечно порождённых свободных групп являются ретрактами.*

Аналогичным образом дело обстоит в свободных нильпотентных группах [4].

Мы обобщаем теорему Мясникова–Романькова в двух направлениях: во-первых, мы рассматриваем подгруппы произвольных групп (а не только свободных); а во-вторых, мы рассматриваем не только свободные подгруппы, но и почти свободные подгруппы H, то есть обладающие свободной подгруппой конечного индекса (в H).

Основная теорема. *Пусть G — произвольная группа и H — её вербально замкнутая почти свободная бесконечная недиэдральная подгруппа, любая бесконечная абелева подгруппа которой является циклической. Тогда*

1) *H алгебраически замкнута в G;*

2) *если группа G конечно порождена над H* (то есть $G = \langle H, X \rangle$ для некоторого конечного подмножества $X \subseteq G$), *то H является ретрактом группы G;*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 15-01-05823.

в частности, группа H конечно порождена, если G конечно порождена.

(Для бесконечной группы *недиэдральная* означает неизоморфная свободному произведению двух групп порядка два.)

Отметим, что каждая нетривиальная свободная подгруппа H удовлетворяет всем условиям теоремы и, следовательно, является ретрактом в любой конечно порождённой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. Уже этот факт представляется нетривиальным. Следующее утверждение, немедленно вытекающее из основной теоремы, является усилением теоремы 1(1) из [9].

Следствие 1. *В свободном произведении конечного числа конечных групп всякая вербально замкнутая бесконечная недиэдральная подгруппа является ретрактом.*

Во втором параграфе мы обсудим примеры, показывающие, что основная теорема неулучшаема в некотором смысле (впрочем, там остаются открытые вопросы). Параграф 3 посвящён доказательству этой теоремы. Наше рассуждение чуть более хитрое, чем в [10], но также основано на использовании слов Ли [8].

Зафиксируем некоторые обозначения. Если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Коммутант группы G мы обозначаем G'. Если X — подмножество некоторой группы, то $|X|$, $\langle X \rangle$ и $C(X)$ означают, соответственно, мощность множества X, подгруппу, порождённую множеством X и централизатор множества X. Индекс подгруппы H группы G обозначается $|G{:}H|$. Свободное произведение групп A и B мы обозначаем символом $A * B$, а свободную группу с базисом $x_1, \ldots, x_n$ — символом $F(x_1, \ldots, x_n)$ или F_n.

2. Примеры

Посмотрим, нельзя ли отбросить какие-нибудь условия основной теоремы.

Подгруппа H бесконечная. Это условие не может быть отброшено. Рассмотрим в качестве G прямое произведение двух экземпляров группы кватернионов (порядка восемь) с объединёнными центрами. Ясно, что сомножители этого произведения не являются ретрактами (и, следовательно, не являются алгебраически замкнутыми, поскольку для конечно порождённых подгрупп конечно определённых групп это одно и то же). Действительно, ядро такой гипотетической ретракции обязано быть нетривиальной нормальной подгруппой. Поскольку группа G нильпотентна, эта нетривиальная нормальная подгруппа обязана нетривиально пересекать центр группы G (см., например, [2]). Это немедленно приводит к противоречию, поскольку центр в данном случае содержится в каждом из сомножителей.

Покажем, что второй (например) сомножитель H такого произведения $G = Q_8 \underset{C}{\times} Q_8$ (где $C = \{\pm 1\}$) вербально замкнут в G. Пусть уравнение

$$w(x_1, \ldots, x_n) = (1, h'),$$

где $(1, h') \in H$ имеет решение $x_i = (h_i, h_i')$ в G. Покажем, что это уравнение имеет решение и в H. Пусть некоторая переменная x_i входит в $w(x_1, \ldots, x_n)$ в нечётной суммарной степени k. В этом случае уравнение $x^k = h'$ имеет решение q в Q_8 и подстановка $x_i = (1, q)$ и $x_j = (1, 1)$ при $j \neq i$ является решением исходного уравнения в H.

Пусть теперь все переменные входят в $w(x_1, \ldots, x_n)$ в четных суммарных степенях. В таком случае $h' = 1$ или $h' = -1$ (иначе уравнение не имеет решений в G). Если $h' = 1$, то подстановка $x_i = (1, 1)$ для всех i есть решение уравнения в H. Если же $h' = -1$, то ровно одна из подстановок: $x_i = (1, h_i)$ или $x_i' = (1, h_i')$ является решением рассматриваемого уравнения в H.

Подгруппа H недиэдральная. Мы не знаем, нужно ли это условие. Оставляем это в качестве открытого вопроса.

Любая бесконечная абелева подгруппа группы H является циклической. То, что это условие отбросить нельзя, показывает небольшая модификация рассмотренного выше примера центрального произведения $Q_8 \underset{C}{\times} Q_8$ (где $C = \{\pm 1\}$), в котором сомножители вербально замкнуты, но не являются ретрактами. Положим теперь $G = Q_8 \underset{C}{\times} Q_8 \times F$, где F — какая-нибудь нетривиальная свободная группа, а в качестве подгруппы H возьмём произведение второго и третьего сомножителя в этом произведении. Из доказанного выше вытекает, что H является вербально замкнутой подгруппой и не является ретрактом (поскольку ретракт ретракта — это ретракт, а второй сомножитель не является ретрактом в G и даже в $Q_8 \underset{C}{\times} Q_8$ по доказанному выше).

Подгруппа H почти свободная. Это условие не может быть отброшено. Известно (см., например, теоремы 1.5 и 3.3 в [1]), что свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ ранга $m \geqslant 2$ и нечётного периода $n \geqslant 665$ бесконечна, а любая ее абелева подгруппа конечна. Рассмотрим группу $G = Q_8 \underset{C}{\times} Q_8 \times B(2, 2017)$, а в качестве подгруппы H возьмём произведение второго и третьего сомножителя в этом произведении. Аналогично тому, как это было сделано выше, мы можем заключить, что H является вербально замкнутой подгруппой и не является ретрактом.

Группа G конечно порождена над H в пункте 2). Следующий пример показывает, что это условие нельзя отбросить. Возьмём подгруппу $H = \langle 1 \rangle$ целых чисел в аддитивной группе G целых p-адических чисел. Ясно, что она вербально замкнута (в абелевых группах вербально замкнутые подгруппы это то же самое, что алгебраически замкнутые подгруппы, и то же самое, что сервантные (чистые) подгруппы). С другой стороны, группа G не допускает вообще никаких нетривиальных разложений в прямую сумму (см., например, [3]), то есть H не ретракт.

3. Доказательство основной теоремы

Заметим, что всякая почти свободная группа H является линейной (даже над $\mathbb{Z}$, если H счётна), поскольку свободная группа (любой мощности), как хорошо известно, линейна (над некоторым полем) (см., например, [2]), а почти линейная группа всегда линейна. Следовательно, *H нётерова по уравнениям*, (как и всякая линейная (над полем) группа [5]), то есть всякая система уравнений с коэффициентами из H и конечным числом неизвестных эквивалентна своей конечной подсистеме.[1] Это в свою очередь означает, что H является ретрактом любой конечно порождённой над H группы, содержащей H в качестве алгебраически замкнутой подгруппы [10]. Поэтому достаточно доказать пункт 1) теоремы.

Рассмотрим сперва случай циклической подгруппы H. Напомним, что всякую целочисленную матрицу целочисленными элементарными преобразованиями можно привести к диагональному виду. Это означает, что всякую конечную систему уравнений над H

$$\{w_1(x_1, x_2, \ldots) = 1, \ \ldots, \ w_m(x_1, x_2, \ldots) = 1\}, \quad \text{где } w_i \in H * F(x_1, x_2, \ldots),$$

заменами вида $w_i \to w_i w_j^{\pm 1}$ и $x_i \to x_i x_j^{\pm 1}$ можно преобразовать к виду

$$\{x_1^{n_1} u_1(x_1, x_2, \ldots) = h_1, \ \ldots, \ x_m^{n_m} u_m(x_1, x_2, \ldots) = h_m\}, \quad \text{где } u_i \in (H * F(x_1, x_2, \ldots))', \ n_i \in \mathbb{Z} \text{ и } h_i \in H.$$

При этом полученная система будет иметь столько же решений, сколько исходная (и в G, и в H). Предположим, что эта система имеет решение в G. Пусть каждое слово u_i представляется в виде произведения s коммутаторов в $H * F(x_1, x_2, \ldots)$. Тогда каждое отдельное уравнение $x_i^{n_i}[y_1, z_1] \ldots [y_s, z_s] = h_i$ (где y_j и z_j — новые переменные) имеет решение в G и, следовательно, имеет решение $\left(\widehat{x}_i, \widehat{y}_1^{(i)}, \widehat{z}_1^{(i)}, \ldots\right)$ в H (поскольку подгруппа H вербально замкнута). Но тогда, очевидно, $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots)$ есть решение всей системы (так как коммутант подгруппы H тривиален).

Случай почти циклической подгруппы H легко сводится к случаю циклической группы в силу следующего простого наблюдения:

> *бесконечная почти циклическая группа, не содержащая бесконечных нециклических абелевых подгрупп, является либо циклической, либо диэдральной.*

Действительно, почти циклическая группа всегда содержит конечную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой либо циклическая, либо диэдральная (см., например, [13]). Эта конечная нормальная подгруппа обязана быть тривиальной, поскольку иначе мы найдём в её централизаторе (который имеет конечный индекс) элемент бесконечного порядка и получим бесконечную нециклическую абелеву подгруппу.

Рассмотрим теперь более трудный случай не почти циклической группы H.

Лемма 1. *В почти свободной группе, не являющаяся почти циклической, любой элемент раскладывается в произведение двух элементов бесконечного порядка.*

[1] Отметим ещё, что группа, содержащая нётерову по уравнениям подгруппу конечного индекса, сама нётерова по уравнениям [6].

Доказательство. Понятно, что это утверждение достаточно доказать для конечно порождённых групп. Напомним, что конечно порождённая почти свободная группа допускает такое действие на (ориентированном) дереве, что стабилизаторы вершин конечны [7]. Напомним также, что любой автоморфизм дерева, не имеющий неподвижных точек, имеет единственную инвариантную прямую [12].

Рассмотрим такое действие группы H на дереве T. Пусть $h \in H$ — элемент, который мы хотим разложить, и $T_h \subseteq T$ — множество неподвижных точек для h. Если порядок элемента h бесконечен, то $h = h^2 h^{-1}$ — искомое разложение, поэтому мы будем считать, что порядок элемента h конечен и, следовательно, T_h непусто (и, стало быть, связно).

Возьмём какой-нибудь элемент $g \in H$ бесконечного порядка с инвариантной прямой l_g. Если элемент $g^{-1}h$ не имеет неподвижных точек, то его порядок бесконечен и $h = g \cdot (g^{-1}h)$ — искомое разложение. Пусть $a \in T$ — неподвижная точка для $g^{-1}h$. Тогда $h(a) = g(a) = b$.

Равенство $h(a) = b$ показывает, что отрезок, соединяющий точки a и b, обязан пересекать поддерево T_h по единственной точке, а именно, по по своей середине c. А равенство $g(a) = b$ показывает, что прямая l_g обязана проходить через точку c и пересекать отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ по отрезкам одинаковой ненулевой длины δ (в противном случае расстояния от l_g до a и до b не равны и, значит, $g(a) \neq b$). Элемент g обязан действовать сдвигом на 2δ на своей инвариантной прямой l_g, но нам пока важно только равенство $T_h \cap l_g = \{c\}$.

Возьмём теперь другой элемент $g' \in H$ бесконечного порядка с другой инвариантной прямой $l_{g'} \neq l_g$ (такой элемент существует, поскольку группа H не почти циклическая). Аналогичные рассуждения показывают, что либо $h = g' \cdot ((g')^{-1}h)$ — искомое разложение, либо $T_h \cap l_{g'} = \{c'\}$ для некоторой точки c'. В последнем случае рассмотрим элемент $g'' = g^k g' g^{-k}$. Его инвариантной прямой будет служить, очевидно, $g^k(l_{g'})$ и мы видим, что эта прямая не будет пересекать поддерево T_h, если число k выбрано достаточно большим положительным или отрицательным. Поэтому, в этом последнем случае $h = g'' \cdot ((g'')^{-1}h)$ — искомое разложение. (Более точно, если $c' \neq c$, то в качестве k можно взять единицу или любое другое ненулевое число; если же $c' = c$, то k нужно выбрать так, чтобы $|2k\delta|$ было больше чем расстояние от c до конца отрезка или луча $l_g \cap l_{g'}$.) □

Лемма 2. *Если h_1 и h_2 — элементы бесконечного порядка почти свободной группы, любая бесконечная абелева подгруппа которой является циклической, и $h_1^k = h_2^k$ для некоторого ненулевого целого k, то $h_1 = h_2$.*

Доказательство. Корни из элемента лежат в его централизаторе, поэтому достаточно показать, что централизатор элемента бесконечного порядка h циклический. Этот централизатор $C(h)$ является почти свободной группой (как и любая подгруппа почти свободной группы) с бесконечным центром. Отсюда немедленно вытекает, что группа $C(h)$ почти циклическая. Осталось сослаться на упомянутый в начале параграфа факт: бесконечная почти циклическая группа без бесконечных абелевых нециклических подгрупп является либо циклической, либо диэдральной. При этом в рассматриваемом случае группа не может быть диэдральной, поскольку центр централизатора нетривиален. □

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 3. *Если подгруппа H группы G такова, что любая конечная система уравнений вида*

$$\{w_1(x_1, \ldots, x_n) = h_1, \ \ldots, \ w_m(x_1, \ldots, x_n) = h_m\}, \quad \text{где } w_i \in F(x_1, \ldots, x_n) \text{ и } h_i \in H \tag{1}$$

имеющая решение в G, имеет решение в H, то H алгебраически замкнута.

Доказательство. Просто обозначим коэффициенты новыми буквами, которые будем считать неизвестными. Например, разрешимость уравнения $xyh_1[x^{2018}, h_2]y^{-1} = 1$ эквивалентна разрешимости системы $\{xyz[x^{2018}, t]y^{-1} = 1, \ z = h_1, \ t = h_2\}$. □

Нам теперь понадобится один полезный инструмент. Напомним, что *словом Ли* для свободной группе ранга r от m переменных называют элемент $L(z_1, \ldots, z_m)$ свободной группы ранга m такой, что

1) если $L(v_1, \ldots, v_m) = L(v'_1, \ldots, v'_m) \neq 1$ в F_r, то элементы $v'_i \in F_r$ получаются из элементов $v_i \in F_r$ одновременным сопряжением, то есть для некоторого $w \in F_r$ имеют место равенства $v'_i = v_i^w$ для всех $i = 1, \ldots, m$;

2) $L(v_1, \ldots, v_m) = 1$ тогда и только тогда, когда элементы $v_1, \ldots, v_m$ группы F_r лежат в одной циклической подгруппе.

В работе [8] такие слова были построены для всех целых $r, m \geqslant 2$. На самом деле, нетрудно сообразить, что это означает наличие *универсального слова Ли* от m переменных, то есть такого элемента $L(z_1, \ldots, z_m) \in F_m$, что свойства 1) и 2) выполняются во всех свободных группах F_r и даже в F_∞.

Лемма 4. *Для любого положительного целого m существует такой элемент $L(z_1, \ldots, z_m) \in F_m$, что свойства 1) и 2) выполняются во всех свободных группах F_r и даже в F_∞.*

Доказательство. Это утверждение немедленно вытекает из результата Ли и следующего простого факта:

свободная группа F_∞ вкладывается в F_2 в качестве мальнормальной *подгруппы,*

то есть такой подгруппы $S \subset F_2$, что $S^f \cap S = \{1\}$ для всех $f \in F_2 \setminus S$. Этот факт следует, например, из результата Вайза [14]:

в свободной группе всякое множество, удовлетворяющее условию малого сокращения $C(5)$, свободно порождает мальнормальную подгруппу.

Таким образом, слово Ли для свободной группе ранга два является универсальным, то есть годится и для группы F_∞. □

Приступим к доказательству теоремы. Итак, мы считаем, что вербально замкнутая подгруппа H группы G почти свободна, не содержит бесконечных нециклических абелевых подгрупп и содержит нормальную (в H) неабелеву свободную подгруппу F индекса N (в H). Воспользовавшись леммой 3, мы можем считать, что система (1) имеет решение в G. Мы хотим показать, что эта система имеет решение в H.

Пусть $L(z_1, \ldots, z_{2m+2})$ — это универсальное слово Ли от $2m + 2$ переменных. Воспользовавшись леммой 1, для каждого элемента h_i выберем в H такой элемент f_i, что порядки элементов $h_i f_i$ и f_i бесконечны. Выберем ещё в F два некоммутирующих элемента u_1, u_2.

Уравнение

$$L\Big((w_1(x_1, \ldots, x_n)y_1)^N, \ldots, (w_m(x_1, \ldots, x_n)y_m)^N, y_1^N, \ldots, y_m^N, z_1^N, z_2^N\Big) = f,$$

где $f = L\Big((h_1 f_1)^N, \ldots, (h_m f_m)^N, f_1^N, \ldots, f_m^N, u_1^N, u_2^N\Big) \in F$, имеет решение в G по построению (его решением служит следующий набор: решение системы (1) в качестве x_i, элементы f_i в качестве y_i и u_i в качестве z_i).

Подгруппа H вербально замкнута в G и $f \in H$, значит последнее уравнение имеет некоторое решение $\widehat{x}_i, \widehat{y}_j, \widehat{z}_k$ в H.

В правой части уравнения стоит значение слова Ли на некоторых элементах свободной группы F (поскольку $h^N \in F$ для всех $h \in H$), причём элементы u_1^N и u_2^N не коммутируют (поскольку элементы свободной группы u_1 и u_2 выбраны не коммутирующими), значит, они не лежат в одной циклической подгруппе и поэтому из свойства 2) слов Ли следует, что $f \neq 1$. Согласно свойству 1) это влечёт равенства

$$(w_i(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)\widehat{y}_i)^{Nw} = (h_i f_i)^N, \quad \widehat{y}_i^{Nw} = f_i^N \quad \text{и} \quad \widehat{z}_i^{Nw} = u_i^N \quad \text{для некоторого } w \in F.$$

Поскольку извлечение корня из элементов бесконечного порядка в H однозначно (по лемме 2), мы имеем равенства

$$(w_i(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)\widehat{y}_i)^w = h_i f_i, \quad \widehat{y}_i^w = f_i, \quad \text{и} \quad \widehat{z}_i^w = u_i,$$

то есть $\widehat{x}_i^w$ — это решение системы (1) в H, что и требовалось.

Литература

[1] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, М.: Наука, 1975.

[2] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[3] А.Г. Курош, Теория групп. М.: Наука, 1967.

[4] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, *Алгебра и логика*, **52:4** (2013), 502-525.

[5] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. *J. Algebra.* **219** (1999), 16-79.

[6] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov. Two theorems about equationally noetherian groups. *J. Algebra.* **194** (1997), 654-664.

[7] A. Karrass, A. Pietrowski, D. Solitar, Finitely generated groups with a free subgroup of finite index, *J. Austral. Math. Soc.* 16 (1973), 458-466.

[8] D. Lee, On certain C-test words for free groups. *J. Algebra.* **247** (2002), 509-540.

[9] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, *Journal of Group Theory* (в печати). См. также arXiv:1605.01766

[10] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, *Journal of Group Theory* **17** (2014), 29-40. Смотрите также arXiv:1201.0497.

[11] V. A. Roman'kov, Equations over groups, *Groups Complexity Cryptology* **4:2** (2012), 191-239.

[12] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Astérisque, No. 46. Sociéte Mathématique de France, Paris, 1977. (English translation: Trees. Springer-Verlag, 1980).

[13] J. Stallings, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Math. Monographs (1971).

[14] D. T. Wise, The residual finiteness of positive one-relator groups, *Comment. Math. Helv* **76** (2001), 314-338.