УДК 512.543.72+512.543.73+512.544.33+512.543.56 MSC: 20F70, 20F16, 20E22, 20E10, 20F50

ВЫДЕЛЯЕМОСТЬ КЛАССОВ ГРУПП УРАВНЕНИЯМИ И ВЛОЖЕНИЯ АМАЛЬГАМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

Александр А. Бутурлакин[♮] Антон А. Клячко[♭♯] Денис В. Осин[×]

[♮] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090, проспект ак. Коптюга, 4.*
[♭] *Механико-математический факультет Московского государственного университета*
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
[♯] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики.*
[×] *Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37240, U.S.A.*

buturlakin@gmail.com *klyachko@mech.math.msu.su* *denis.osin@gmail.com*

Над любой нетривиальной конечной группой G найдётся уравнение, не имеющее решений ни в какой большей конечной группе, но имеющее решение в некоторой бесконечной группе, содержащей G. Мы доказываем несколько подобных утверждений о классах конечных, периодических, аменабельных, упорядочиваемых, локально индикабельных, разрешимых, нильпотентных и других групп. Кроме того, мы показываем, что амальгама двух счётных периодических групп с конечным пересечением вкладывается в некоторую периодическую группу, отвечая тем самым (в счётном случае) на вопрос Б. Неймана 1960 года.

1. Введение

Систему уравнений $\{w_i = 1 \mid i \in I\}$ с коэффициентами из группы G, где w_i — слова в алфавите $G \sqcup X^{\pm 1}$, а X — некоторое множество (неизвестных), называют *разрешимой над* группой G, если существуют группа $\widetilde{G}$, содержащая G в качестве подгруппы, и решение данной системы уравнений (то есть существует ретракция свободного произведения $\widetilde{G} * F(X)$ на $\widetilde{G}$, содержащая все элементы w_i в своём ядре; здесь и далее $F(X)$ — это свободная группа с базисом X). Если группу $\widetilde{G}$ можно выбрать из какого-то класса $\mathcal{K}$, то говорят, что система уравнений *разрешима в классе* $\mathcal{K}$.

О разрешимости уравнений над группами имеется очень много результатов (начиная, вероятно, с теоремы Магнуса о свободе 1930 года [Mag30]), смотрите, например, [ABA21], [EH21], [NT22], [KM23], [Ch23], [KMR24], [Ми24], [Mi24a] и литературу, там цитируемую; смотрите также обзор [Ro12].

Мы говорим, что класс $\mathcal{K}$ *выделяется в классе* $\mathcal{L} \supset \mathcal{K}$ *конечной системой уравнений* и пишем $\mathcal{K} \underset{e}{\subset} \mathcal{L}$, если над всякой нетривиальной группой из $\mathcal{K}$ найдётся конечная система уравнений, разрешимая в $\mathcal{L}$, но не разрешимая в $\mathcal{K}$. Если такую выделяющую систему можно сделать состоящей из единственного уравнения, то мы говорим, что класс $\mathcal{K}$ *выделяется в классе* $\mathcal{L} \supset \mathcal{K}$ *одним уравнением* и пишем $\mathcal{K} \underset{e1}{\subset} \mathcal{L}$. Эти отношения транзитивны и даже более того: если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \underset{e}{\subset} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, то $\mathcal{A} \underset{e}{\subset} \mathcal{D}$ (и аналогично для отношения $\underset{e1}{\subset}$).

Теорема 1. *Имеют место следующие отношения между классами групп:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \{\text{группы с разрешимой проблемой равенства}\} & & & & \\
 & & {\scriptstyle (1)}\bigcap{\scriptstyle e} & & & & \\
\{\text{группы без кручения}\} & \underset{e\not1}{\overset{(3)}{\subset}} & \{\text{все группы}\} & \underset{e1}{\overset{(4)}{\supset}} & \{\text{периодические группы}\} & & {\scriptstyle (2)}\bigcup{\scriptstyle e} \\
{\scriptstyle (5)}\bigcup{\scriptstyle e\not1} & & {\scriptstyle (6)}\bigcup{\scriptstyle e} & & {\scriptstyle (7)}\bigcup{\scriptstyle e} & & \\
\left\{\begin{matrix}\text{левоупорядочиваемые}\\ \text{группы}\end{matrix}\right\} & & \left\{\begin{matrix}\text{аменабельные}\\ \text{группы}\end{matrix}\right\} & \underset{e}{\overset{(8)}{\supset}} & \{\text{конечные группы}\} & \underset{e1}{\overset{(9)}{\subset}} & \left\{\begin{matrix}\text{группы}\\ \text{с разрешимой}\\ \text{проблемой}\\ \text{сопряжённости}\end{matrix}\right\} \\
{\scriptstyle (10)}\bigcup{\scriptstyle e\not1} & & {\scriptstyle (11)}\bigcup{\scriptstyle e} & & & & \\
\left\{\begin{matrix}\text{локально индикабельные}\\ \text{группы}\end{matrix}\right\} & & \left\{\begin{matrix}\text{разрешимые}\\ \text{группы}\end{matrix}\right\} & & & & \\
{\scriptstyle (12)}\bigcup{\scriptstyle e1} & & {\scriptstyle (13)}\bigcup{\scriptstyle e} & & & & \\
\{\text{упорядочиваемые группы}\} & & \left\{\begin{matrix}\text{нильпотентные}\\ \text{группы}\end{matrix}\right\} & \underset{e1}{\overset{(14)}{\supset}} & \{\text{абелевы группы}\}, & &
\end{array}
$$

Этот текст довольно сильно отличается от английской версии в арХиве (содержащей больше результатов).

Работа первого автора выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований РАН, проект FWNF-2022-0002.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Работа третьего автора выполнена при поддержке NSF, грант DMS-2405032, и *Simons Fellowship in Mathematics* MP-SFM-00005907.

где $\mathcal{K} \underset{e\not{1}}{\subseteq} \mathcal{L}$ *означает, что* $\mathcal{K} \underset{e}{\subseteq} \mathcal{L}$, *но не* $\mathcal{K} \underset{e1}{\subseteq} \mathcal{L}$ (а цифры в скобочках ничего не означают и служат для дальнейших ссылок).
Кроме того, имеет место следующее уточнение отношения (7): если π *— собственное подмножество некоторого множества* $\widehat{\pi}$ *простых чисел, то* $\{\pi\text{-группы}\} \overset{(15)}{\underset{e1}{\subseteq}} \{\widehat{\pi}\text{-группы}\} \overset{(16)}{\underset{e}{\supseteq}} \{\text{конечные } \widehat{\pi}\text{-группы}\} \overset{(17)}{\underset{e1}{\supseteq}} \{\text{конечные } \pi\text{-группы}\}$.

(Напомним, что π-*группа*, где π — это какое-то множество простых чисел, это периодическая группа, не содержащая элементов простых порядков, не лежащих в π.)

Здесь и далее группы с разрешимой проблемой равенства или сопряжённости предполагаются конечно порождёнными (для простоты, главным образом). Бóльшую часть утверждений теоремы 1 мы выводим (в параграфе 3) из очень общей основной теоремы, которая формулируется (в параграфе 2) на языке квазитождеств. Квазитождества появляются естественным образом в контексте уравнений над группами, смотрите [K99], [I05] и [KMR24]. Стандартные факты о квазитоджествах и квазимногообразиях читатель может найти в книгах [Бу02] и [Го99].

В параграфе 4 мы уточняем утверждение (7) теоремы 1, а именно, показываем, что класс конечных групп выделяется в классе периодических групп конечной системой уравнений с одним неизвестным. Для доказательства этого факта (а также некоторых других утверждений теоремы 1) мы используем теорию относительно гиперболических групп, с которой можно познакомиться по работе [Os06a].

Другим применением техники из параграфа 4 является частичный ответ на старый вопрос Б. Неймана. Напомним, что *амальгама* $(A, B; C)$ *групп* A *и* B *с пересечением* C — это пара групп A и B таких, что $C = A \cap B$ — это подгруппа в A и в B и умножения на C (наследуемые из A и B) совпадают.

В 1960 году Б. Нейман [Neu60] заметил, что не всякая амальгама периодических групп может быть вложена в периодическую группу, и задал вопрос:

верно ли, что всякая амальгама периодических групп с конечным пересечением вкладывается в периодическую группу?

В последнем параграфе мы доказываем, что в счётном случае ответ положительный.

Теорема 2. *Для любой амальгамы* $(A, B; C)$ *счётных периодических групп с конечным пересечением* C *существует периодическая группа, содержащая* A *и* B *в качестве подгрупп таких, что* $A \cap B = C$.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно; Символы $\langle S \rangle$ и $\langle\langle S \rangle\rangle$ обозначают подгруппу, порождённую множеством S, и нормальное замыкание множества S, соответственно; $\mathbb{Z}_n \overset{\text{опр}}{=} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; циклическая группа порядка n с порождающим g обозначается $\langle g \rangle_n$.

Авторы благодарят А. Ю. Ольшанского за ценные замечания. Второй автор благодарит Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Основная теорема

Назовём класс групп $\mathcal{L}$ *простым*, если из включений $g \in G \in \mathcal{L} \ni H \ni h \neq 1$ вытекает существование такой группы $K \in \mathcal{L}$, содержащей G и H в качестве подгрупп, что $g \in \langle\langle h \rangle\rangle \triangleleft K$.

Примеры простых классов. *Следующие классы групп являются простыми:*

а) *группы с разрешимой проблемой равенства,*
б) *группы без кручения,*
в) *все группы,*
г) *периодические группы и, более общо,* π*-группы, где* π *— произвольное множество простых чисел,*
д) *левоупорядочиваемые группы,*
е) *аменабельные группы,*
ё) *разрешимые группы.*

Доказательство. Ниже мы пользуемся обозначениями из определения простого класса в начале параграфа.

а) Это немедленно вытекает из того, что прямое произведение $G \times H$, как и всякая группа с разрешимой проблемой равенства, вкладывается в простую подгруппу конечно представленной группы (теорема Буна–Хигмана [BH74], смотрите также [ЛШ80], теорема 7.4 главы IV), а в простой подгруппе конечно представленной группы разрешима проблема равенства по той же теореме Буна–Хигмана (вернее, в эту сторону это фактически теорема Кузнецова [Ку58], смотрите также [ЛШ80], теорема 3.6 главы IV).

б) Если $g = 1$, то доказывать нечего; в противном случае в качестве группы K можно взять свободное произведение с объединёнными циклическими подгруппами: $K = G \underset{g=h}{*} H$.

в) Это немедленно вытекает из хорошо известного факта: всякая группа (например, $G \times H$) вкладывается в простую группу (смотрите, например, [КаМ80], параграф 13).

г) В случае класса всех периодических групп можно объяснять аналогично, воспользовавшись теоремой Ольшанского: всякая периодическая группа (в частности, $G \times H$) вкладывается в простую периодическую группу [Оль92].

Верна ли аналогичная теорема для произвольного множества π, неизвестно. Поэтому приходится рассуждать более хитро. Во-первых заметим, что диагональная подгруппа базы сплетения $\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}_n$ содержится в коммутанте этого сплетения. Следовательно, элемент $g \in G$ можно считать содержащимся в коммутанте группы G (достаточно заменить G на бо́льшую π-группу $G \wr \mathbb{Z}_{|\langle g\rangle|}$, в которую G вложена диагональным образом в базу сплетения). Теперь в качестве K можно взять прямое сплетение $G \wr H$ (в которую G вложена в качестве одного из сомножителей базы), поскольку *нормальное замыкание в $G \wr H$ любой нетривиальной подгруппы группы H пересекает каждый сомножитель базы по его коммутанту* ([Ней69], утверждение 26.21).

д) Это доказывается в точности, как пункт б), поскольку класс левоупорядочиваемых групп замкнут относительно свободных произведений с объединёнными циклическими подгруппами ([BG08], теорема B).

е) и ё) Заметим, что

> *всякая аменабельная группа вкладывается в коммутант некоторой аменабельной группы (которая является разрешимой, если исходная группа разрешима).*

Действительно, аменабельная группа G вкладывается, как координатная группа, в группу стабилизирующихся функций (последовательностей) $\widehat{G} = \bigl\{f\colon \mathbb{Z} \to G \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ \exists g' \in G\ \forall m > n\ f(m) = g', f(-m) = 1\bigr\}$, которая аменабельна (и разрешима, если G разрешима), поскольку имеется гомоморфизм $\lim\limits_{n\to+\infty}\colon \widehat{G} \to G$, ядром которого является прямая степень группы G; осталось заметить, что в полупрямом произведении $\widetilde{G} = \langle a\rangle_\infty \leftthreetimes \widehat{G}$ (где $\langle a\rangle_\infty \simeq \mathbb{Z}$ действует сдвигом аргумента) коммутатор $\bigl[a, (\dots, 1, 1, g, g, \dots)\bigr]$ равен $(\dots, 1, 1, g, 1, 1, \dots)$. Таким образом, мы можем считать, что элемент g (из определения простого класса) содержится в коммутанте группы G. Теперь в качестве K можно взять прямое сплетение $G \wr H$ и воспользоваться простым фактом из [Ней69], упомянутым в пункте г).

Основная теорема. *Если в простом классе $\mathcal{L}$ не выполняется некоторое квазитождество* $\mathbf{q}$*, то над каждой нетривиальной группой $G \in \mathcal{L}$ найдётся конечная система уравнений, разрешимая в некоторой группе $\widetilde{G} \supseteq G$ из $\mathcal{L}$, но не разрешимая ни в какой группе $\widehat{G} \supseteq G$, удовлетворяющей квазитождеству* $\mathbf{q}$.

Доказательство. Пусть квазитождество $\mathbf{q}$ имеет вид

$$\bigl(w_1(x, y, \dots) = 1 \ \&\ \dots\ \&\ w_n(x, y, \dots) = 1\bigr) \Longrightarrow v(x, y, \dots) = 1 \qquad (\mathbf{q})$$

и нарушается на элементах $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots \in H \in \mathcal{L}$. Выберем $g \in G \setminus \{1\}$. По определению простоты (где в роли h выступает $v(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \dots) \neq 1$) группы G и H вкладываются в некоторую группу $K = \widetilde{G} \in \mathcal{L}$, и имеет место равенство $g = \prod\limits_i \bigl(v(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \dots)\bigr)^{\pm \widetilde{z}_i}$ для некоторых $\widetilde{z}_i \in \widetilde{G}$. Таким образом, система уравнений

$$\left\{ w_1(x, y, \dots) = 1,\ \dots,\ w_n(x, y, \dots) = 1,\ g = \prod_i \bigl(v(x, y, \dots)\bigr)^{\pm z_i} \right\}$$

над группой G (с неизвестными $x, y, \dots, z_1, z_2, \dots$) имеет очевидное решение в группе $\widetilde{G} \supseteq G$, но, конечно же, не может иметь решений в группе с квазитождеством $\mathbf{q}$. Это завершает доказательство.

Нетрудно заметить, что ни условие простоты класса $\mathcal{L}$, ни условие про квазитождество нельзя убрать из основной теоремы. Действительно,

- если взять непростой класс $\mathcal{L} = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\} \ni G = \mathbb{Z}_2$, то, разумеется, всякая система уравнений над G, разрешимая в классе $\mathcal{L}$ разрешима уже в G, хотя разделяющее квазитождество, очевидно, есть: $x^3 = 1 \Longrightarrow x = 1$;
- если взять простую группу G, то класс $\mathcal{L} = \{G\}$ прост, но, конечно же, всякая система уравнений над G, разрешимая в классе $\mathcal{L}$ разрешима уже в G; несколько менее тривиальный пример на эту тему состоит в том, что можно взять в качестве G нетривиальную *алгебраически замкнутую* группу (то есть такую группу G, в которой разрешима любая конечная система уравнений, разрешимая над G [Sc51], смотрите также [ЛШ80]), то класс $\{G\}$ не выделяется конечными системами уравнений даже в классе всех групп, это означает, что *ни в какой нетривиальной алгебраически замкнутой группе не выполнено никакое нетривиальное квазитождество.*

3. Доказательство теоремы 1

Выделяемость одним уравнением

(4) Нам понадобятся следующие два факта.

Пример Баумслага [Ba69]. *Элемент $a \neq 1$ группы $\left\langle a, b \,\middle|\, a^{a^b} = a^2 \right\rangle$ содержится в ядре любого гомоморфизма, переводящего a в элемент конечного порядка.*

Теорема Линдона. *Над каждой группой с кручением существует неэкзотическое уравнение, не разрешимое над ней (то есть ни в какой большей группе).* Здесь и далее уравнение $w(x, y, \dots) = 1$ над группой G называется *неэкзотическим*, если элемент $w(x, y, \dots) \in G * F(x, y, \dots)$ не сопряжён элементам группы G.

Доказательство. Возьмём элемент $a \neq 1$ конечного порядка. Если $a^2 \neq 1$, то годится уравнение Баумслага $a^{a^x} = a^2$. Если же $a^2 = 1$, то годится уравнение $a^{x^2} = [a, a^x]$, неразрешимость которого над $\langle a\rangle_2 \simeq \mathbb{Z}_2$

доказана в [Ly80].

Продолжим доказательство отношения (4). Рассмотрим уравнение

$$\big(w(x)\big)^{\left(w(x)\right)^y} = \big(w(x)\big)^2, \tag{$*$}$$

где $w(x) = 1$ — неразрешимое над G неэкзотическое уравнение (которое существует по теореме Линдона). Если уравнение $(*)$ имеет решение $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ в какой-то периодической группе, то в силу примера Баумслага $w(\widetilde{x}) = 1$, что противоречит неразрешимости такого уравнения.
С другой стороны, уравнение $(*)$ имеет очевидное решение $(x = c,\ y = b)$ в свободном произведении с объединёнными бесконечными циклическими подгруппами

$$(G * \langle c\rangle_\infty) \mathop{\ast}_{w(c)=a} \left\langle a, b \,\middle|\, a^{a^b} = a^2 \right\rangle$$

(элемент $w(c) \in G * \langle c\rangle$ имеет бесконечный порядок, поскольку он не сопряжён элементам из G в силу неэкзотичности уравнения $w(x) = 1$; а элемент $a \in \left\langle a, b \,\middle|\, a^{a^b} = a^2 \right\rangle$ имеет бесконечный порядок, поскольку эта группа с одним соотношением вообще не имеет кручения). Это завершает доказательство.

(9) Группа G конечна, а элемент $w(c) \in G * \langle c\rangle_\infty$ из доказательства сщщтношения (4) не сопряжён элементам группы G и (мы можем считать, что) не является истинной степенью. Поэтому группа $G * \langle c\rangle_\infty$ относительно гиперболическая относительно $\langle w(c)\rangle$ ([Os06], следствие 1.7). Проблема сопряжённости в группе Баумслага $\left\langle a, b \,\middle|\, a^{a^b} = a^2 \right\rangle$ разрешима [Be12] (смотрите также [DMW16]), поэтому утверждение немедленно вытекает из доказательства пункта (4) и следующего факта.

Теорема о ПС в свободных произведениях с объединением. *Проблема сопряжённости в свободном произведении $A \mathop{\ast}_C B$ с объединённой подгруппой разрешима, если она разрешима в A и в B, и группа A относительно гиперболична относительно C.*
Доказательство. Это вытекает из следующих двух утверждений.

> *Если группа A относительно гиперболична относительно своей конечно порождённой подгруппы C, то группа $A \mathop{\ast}_C B$, где $B \supseteq C$ — конечно порождённая группа, относительно гиперболична относительно B* [D03].

> *В группе разрешима проблема сопряжённости, если эта группа относительно гиперболична относительно своей подгруппы с разрешимой проблемой сопряжённости* [Bu04].

(Здесь имеется досадная несогласованность терминологии: мы пользуемся определениями из [Os06a] — то, что мы называем относительной гиперболичностью относительно семейства подгрупп $\mathcal{H}$, в [D03] называется относительной гиперболичностью относительно семейства подгрупп, сопряжённых к подгруппам из $\mathcal{H}$. Напомним ещё, что группы с разрешимой проблемой сопряжённости мы всегда считаем конечно порождёнными; при этом *группа, относительно гиперболическая относительно семейства подгрупп $\mathcal{H}$, конечно порождена тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{H}$ конечно и каждая подгруппа $H \in \mathcal{H}$ конечно порождена*, смотрите [Os06a], предложение 2.29 + следствие 2.48).

(12) Упорядочиваемые группы локально индикабельны [RR02]. Уравнение $g^x = g^{-1}$, где $g \neq 1$ — элемент упорядочиваемой группы G, не может, очевидно, иметь решений в упорядочиваемой группе (если $g > 1$, то $g^x > 1$, а $g^{-1} < 1$), но имеет решение в локально индикабельной группе в силу следующей теоремы.

Теорема Бродского–Хауи–Шорта [Б80], [Б84], [How81], [Sh81]. *Всякое неэкзотическое уравнение над локально индикабельной группой разрешимо в некоторой большей локально индикабельной группе.*

(14) Пусть g — неединичный элемент абелевой группы G. Тогда уравнение $[x, y] = g$ не может иметь решений в абелевых группах, содержащих G, но имеет очевидное решение $(x = a,\ y = b)$ в центральном произведении $\big(H/\langle c^n\rangle\big) \times G/\langle gc^{-1}\rangle$, где $H = \langle a, b, c \mid [a, b] = c,\ [a, c] = [b, c] = 1\rangle \simeq \mathbf{UT}_3(\mathbb{Z})$ — группа Гейзенберга, а n — это порядок элемента g (или ноль, если $|\langle g\rangle| = \infty$).

(15) Выберем в произвольной нетривиальной π-группе G элемент a простого порядка $p \in \pi$ (если $\pi = \varnothing$, то доказывать нечего), возьмём простое число $q \in \widehat{\pi} \setminus \pi$ и $k \in \mathbb{N}$ так, что $q^k > p$. Уравнение $(ax)^{q^k} = x^{q^k}$ не может иметь решений в π-группе, поскольку в π-группе отображение $g \mapsto g^{q^k}$ биективно, и, следовательно, рассматриваемое уравнение эквивалентно очевидно неразрешимому уравнению $ax = x$. Осталось показать, что уравнение $(ax)^{q^k} = x^{q^k}$ разрешимо в некоторой $\widehat{\pi}$-группе $\widehat{G} \supset G$. В качестве такой группы $\widehat{G}$ можно взять сплетение $G \wr \langle\widetilde{x}\rangle_{q^k}$ группы G и циклической группы порядка q^k, считая что группа G вложена в базу этого сплетения так: $G \ni g \mapsto (\underbrace{g, g, \ldots, g}_{p\ \text{штук}}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{q^k - p\ \text{штук}})$. Элемент $\widetilde{x} \in \widehat{G}$ является решением уравнения

$(ax)^{q^k} = x^{q^k}$ (и левая, и правая часть уравнения обращаются в единицу на этом элементе). Это завершает доказательство.

(17) Достаточно заметить, что группа $\widehat{G}$ из (15) конечна, если группа G конечна.

Невыделяемость одним уравнением в (3), (5) и (10) немедленно вытекает из теоремы Бродского–Хауи–Шорта (смотрите выше).

Выделяемость конечной системой уравнений класса $\mathcal{K}$ в классе $\mathcal{L} \supset \mathcal{K}$ в (1), (2), (3), (5), (6), (7), (8), (10), (11), (13) и (16) вытекает из основной теоремы, простоты соответствующих классов $\mathcal{L}$ (смотрите предыдущий параграф) и следующих квазитождеств, выполненных в $\mathcal{K}$ и не выполненных в $\mathcal{L}$.

(1) *В любой конечно определённой группе $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1 = 1, \ldots, w_m = 1 \rangle$ с неразрешимой проблемой равенства найдётся элемент $g = w(x_1, \ldots, x_n)$ про который нельзя ни доказать, ни опровергнуть, что $g = 1$* [MO13]. Это очевидным образом означает, что g не равен единице, но содержится в ядре любого гомоморфизма из G в группу с разрешимой проблемой равенства (существует даже конечно определённая группа, вообще не имеющая нетривиальных гомоморфизмов в группы с разрешимой проблемой равенства [Mil81]). Таким образом, квазитождество $w_1 = 1, \ \& \ldots \ \& \ w_m = 1 \Longrightarrow w = 1$ выполнено во всех группах с разрешимой проблемой равенства, но не выполнено в G.

(2) Пусть G — конечно определённая группа с разрешимой проблемой равенства, невложимая в группу с разрешимой проблемой сопряжённости [Dar21]. По теореме Томпсона ([Th80], теорема 4.11) G вкладывается в простую подгруппу S конечно определённой группы $H = \langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1 = 1, \ldots, \ w_m = 1 \rangle$ с разрешимой проблемой равенства. Таким образом, квазитождество $w_1 = 1, \ \& \ldots \ \& \ w_m = 1 \Longrightarrow w = 1$ (где w слово, представляющее какой-то неединичный элемент группы G) выполнено во всех группах с разрешимой проблемой сопряжённости, но не выполнено в H. Это завершает доказательство пункта (2), но отметим ещё следующий аналог теоремы Миллера [Mi81], упомянутый в пункте (1):

> *существует конечно определённая группа с разрешимой проблемой равенства, не имеющая нетривиальных гомоморфизмов в группы с разрешимой проблемой сопряжённости.*

Действительно, выберем неединичный элемент $s \in S$ и рассмотрим факторгруппу

$$G_1 = \left(H * \langle t \rangle_\infty\right) \Big/ \left\langle\!\!\left\langle t \cdot \prod_{i=1}^{100} [s, t^i], \ x_1 \cdot \prod_{i=101}^{200} [s, t^i], \ldots, \ x_n \cdot \prod_{i=100n+1}^{100n+100} [s, t^i] \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Условие малых сокращений $C'(1/6)$ для свободных произведений здесь выполнено, и проблема равенства разрешима в свободных сомножителях (H и $\langle t \rangle_\infty$). Следовательно, в G_1 разрешима проблема равенства [ЛШ80]. Ядро гомоморфизма из G_1 в группу с разрешимой проблемой сопряжённости обязано нетривиально пересекать группу G (поскольку G не вложима в группу с разрешимой проблемой сопряжённости); значит это ядро обязано содержать s (в силу простоты группы S). Следовательно, это ядро обязано содержать все образующие $t, x_1, \ldots, x_n$ группы G_1 (как видно из определения группы G_1).

(3) Квазитождество $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ выполнено в группах без кручения, но не во всех группах. (Вообще, группы без кручения образуют квазимногообразие).

(5) Группа $\langle x, y \,|\, y^{2x} = y^{-2}, \ x^{2y} = x^{-2} \rangle$ не имеет кручения, но не является левоупорядочиваемой (и даже не является группой с однозначным умножением), а её факторгруппы по всем неединичным собственным нормальным подгруппам уже имеют кручение [Pr88]. Таким образом, квазитождество

$$(y^{2x} = y^{-2} \ \& \ x^{2y} = x^{-2}) \Longrightarrow x = 1$$

выполнено во всех левоупорядочиваемых группах, но не во всех группах без кручения.

(6) Квазитождество строится так же, как в (2). Пусть G — свободная группа ранга два (то есть G не вложима ни в какую аменабельную группу). По теореме Буна–Хигмана G вкладывается в простую подгруппу S конечно определённой группы $H = \langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1 = 1, \ldots, w_m = 1 \rangle$. Таким образом, квазитождество $w_1 = 1 \ \& \ldots \ \& \ w_m = 1 \Longrightarrow w = 1$ (где w слово, представляющее какой-то неединичный элемент группы G) выполнено во всех аменабельных группах, но не выполнено в H.

(7) Это частный случай отношения (16).

(8) Существует не финитно аппроксимируемая конечно определённая разрешимая группа

$$\langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1 = 1, \ldots, w_m = 1 \rangle$$

[Ba73], то есть квазитождество $w_1 = 1 \ \& \ldots \ \& \ w_m = 1 \Longrightarrow w = 1$ (где w — слово от $\{x_i^{\pm 1}\}$, представляющее неединичный элемент, лежащий в пересечении ядер всех гомоморфизмов на конечные группы) выполнено во всех конечных группах, но не во всех аменабельных (и даже не во всех разрешимых).

(10) Группа $\langle x, y, z \,|\, x^2 = y^3 = x^7 = xyz \rangle$ (очевидно) совпадает со своим коммутантом, левоупорядочиваема и нетривиальна ($x \neq 1$) [Ber91]. Таким образом, квазитождество $x^2 = y^3 = x^7 = xyz \Longrightarrow x = 1$ выполнено во всех локально индикабельных группах но не во всех левоупорядочиваемых группах.

(11) Квазитождество $\Big($*таблица умножение знакопеременной группы степени пять*$\Big)(x_1, \ldots, x_{60}) \implies x_5 = 1$ очевидно выполнено во всех разрешимых группах, но не выполнено в (аменабельной) знакопеременной группе степени пять.

(13) Квазитождество $x = [x, y] \implies x = 1$ очевидно выполнено во всех нильпотентных группах, но не выполнено в разрешимой (метабелевой) группе Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,2) = \langle x, y \mid x^y = x^2 \rangle = \langle x, y \mid x = [x, y] \rangle$.

(16) При $\widehat{\pi} \neq \{2\}$ наличие требуемого квазитождества вытекает из следующей теоремы Иванова [I05]:

> *для каждого нечётного $n > 2^{16}$ и каждого класса $\mathcal{K}$ такого, что все конечно порождённые подгруппы периода n групп из $\mathcal{K}$ конечны, выполнено следующее: существует бесконечная конечно порождённая группа периода n^3, не содержащаяся в квазимногообразии, порождённом классом $\mathcal{K}$.*

(Достаточно положить $\mathcal{K} = \{$конечные $\widehat{\pi}$-группы$\}$ и $n = p^{16}$, где $p \neq 2$ — любое фиксированное число из множества $\widehat{\pi}$, которое непусто, так как содержит собственное подмножество по условию теоремы.)
Если же $\widehat{\pi} = \{2\}$, то возьмём в свободной бернсайдовой 2-порождённой группе периода 2^k, где $k \gg 1$, минимальную подгруппу G конечного индекса (которая существует [З91]). Группа G конечно порождена (поскольку является подгруппой конечного индекса в конечно порождённой группе), нетривиальна (поскольку свободная бернсайдова группа бесконечна при достаточно большом k [I94], [Лы96]) и совпадает со своим коммутантом (в силу минимальности), то есть $G = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $x_1 \neq 1$ и $x_i = w_i(x_1, \ldots, x_n)$ (где слова w_i лежат в коммутанте свободной группы). Тогда квазитождество

$$\big(x_1 = w_i(x_1, \ldots, x_n)\ \&\ldots\ \&\ x_n = w_i(x_1, \ldots, x_n)\big) \implies x_1 = 1$$

не выполнено в G, но выполнено во всех конечных 2-группах (поскольку конечная p-группа, совпадающая с коммутантом, тривиальна).

4. Уравнения с одним неизвестным

Утверждение (7) теоремы 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. *Над каждой нетривиальной конечной группой G найдётся конечная система уравнений с одним неизвестным, не разрешимая ни в какой конечной группе, содержащей G, но разрешимая в некоторой периодической группе $\widehat{G} \supset G$.*

Доказательство. Согласно (7) над группой G найдётся конечная система уравнений

$$\{w_1(x_1, \ldots, x_n) = 1, \ldots, w_m(x_1, \ldots, x_n) = 1\},$$

не разрешимая ни в какой конечной группе, содержащей G, но имеющая решение $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ в некоторой периодической группе $\langle \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n \rangle = \widehat{G} \supset G$.

Факторгруппа $H = (\widehat{G} * \langle t \rangle_{1000n}) \,/\, \langle\!\langle \widetilde{x}_1^{-1} u_1(t), \ldots, \widetilde{x}_n^{-1} u_n(t) \rangle\!\rangle$, где $u_i(t) = gt^{20i+1} gt^{20i+2} \cdots gt^{20i+20}$ и $g \in G$ — произвольный неединичный элемент, содержит решение системы уравнений

$$\big\{w_1\big(u_1(t), \ldots, u_n(t)\big) = 1, \ldots, w_m\big(u_1(t), \ldots, u_n(t)\big) = 1\big\}$$

с одним неизвестным (которая неразрешима в конечных группах, так как исходная система по условию неразрешима в конечных группах). Поэтому осталось показать, что некоторая факторгруппа H/N, где $N \cap G = \{1\}$, периодическая. Существование такой факторгруппы вытекает из того, что группа H относительно гиперболична относительно подгрупп $\widehat{G}$ и $\langle t \rangle_{1000m}$ (поскольку наложенные соотношения удовлетворяют условию малого сокращения для свободных произведений), и следующего факта (который является некоторым обобщением основной теоремы из [П01]).

Утверждение 1. *Пусть группа A гиперболична относительно семейства подгрупп $\mathcal{H}$. Тогда*
1) *для любого $a \in A$, не сопряжённого с элементами множества $\bigcup \mathcal{H}$, найдётся эпиморфизм $\varepsilon \colon A \to Q$, инъективный на $\bigcup \mathcal{H}$, и такой, что группа Q относительно гиперболична относительно семейства подгрупп $\varepsilon(\mathcal{H})$, а порядок элемента $\varepsilon(a)$ конечен;*
2) *если группа A счётна и все подгруппы из семейства $\mathcal{H}$ периодические, то найдётся эпиморфизм $\delta \colon A \to B$ в некоторую периодическую группу, инъективный на $\bigcup \mathcal{H}$.*

Доказательство.
1) Можно предполагать, что $|\langle a \rangle| = \infty$ (иначе в качестве ε можно взять тождественное отображение). Согласно следствию 1.7 из [Os06a] элемент a содержится в почти циклической подгруппе $E(a)$ такой, что группа A относительно гиперболична относительно семейства $\mathcal{H} \cup E(a)$. В терминах [DGO17] это означает, что подгруппа $E(a)$ гиперболически вложена в A относительно некоторого порождающего множества $X \supseteq \bigcup \mathcal{H}$ (смотрите замечание 4.26 в [DGO17]).
Теорема 1.1 из [Os07] (применённая к семейству $\mathcal{H} \cup E(a)$) вместе с теоремой 7.15(c) из [DGO17] (применённой к гиперболически вложенной подгруппе $E(a)$) показывает, что существует конечное множество $F \subseteq E(g)$ такое, что для каждой подгруппы $N \triangleleft E(g)$, не пересекающей F, выполнено следующее:

– естественный гомоморфизм $A \to A/\langle\langle N\rangle\rangle$ инъективен на X (и, в частности, на $\bigcup \mathcal{H}$);
– факторгруппа $A/\langle\langle N\rangle\rangle$ относительно гиперболична относительно образа семейства $\mathcal{H} \cup E(a)$.

Поскольку подгруппа $E(a)$ почти циклическая, она содержит некоторую нормальную подгруппу N конечного индекса, не пересекающую множество F. Тогда естественный гомоморфизм $\varepsilon\colon A \to A/\langle\langle N\rangle\rangle$ будет искомым, поскольку группа $\varepsilon\big(E(a)\big) \simeq E(a)/(E(a) \cap \langle\langle N\rangle\rangle)$ конечна, а конечную подгруппу всегда можно исключить из семейства периферийных подгрупп по теореме 2.40 из [Os06a] (то есть факторгруппа $Q \overset{\text{опр}}{=} A/\langle\langle N\rangle\rangle$ относительно гиперболична относительно образа семейства $\mathcal{H}$).

2) Пусть $A = \{a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots\}$. Положим $Q_0 = A$ и $\varepsilon_i\colon Q_{i-1} \to Q_i$ (при $i \geqslant 1$) — эпиморфизм, который существует по утверждению 1), применённому к образу элемента a_i в группе Q_{i-1} (если этот образ сопряжён элементу образа множества $\bigcup \mathcal{H}$, то в качестве ε_i берём тождественное отображение). Ясно, что естественное отображение δ из группы A в прямой предел B групп $A = Q_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} Q_1 \xrightarrow{\varepsilon_2} \ldots$ является искомым.

Это завершает доказательство утверждения 1 и теоремы 2.

5. Доказательство теоремы 2

Теорема 2 немедленно вытекает из утверждения 1 и следующего факта:

свободное произведение $A \underset{C}{*} B$ групп A и B с конечной объединённой подгруппой C относительно гиперболично относительно пары подгрупп $\{A, B\}$.

Этот хорошо известный факт нетрудно вывести непосредственно из определения относительной гиперболичности:

– рассмотрим конечное относительное копредставление $A \underset{C}{*} B = (A * B)/\langle\langle\{(\widehat{c})^{-1}\widetilde{c} \mid c \in C\}\rangle\rangle$, где $c \mapsto \widetilde{c}$ и $c \mapsto \widehat{c}$ — вложения группы C в A и B, соответственно;
– и рассмотрим неединичный элемент $w = d_1 d_2 \ldots d_n$ ядра естественного гомоморфизма $A * B \to A \underset{C}{*} B$, где $d_i \in A \sqcup B$ и n минимальное возможное для данного w (то есть $d_i \neq 1$ и d_i, лежащие в A, чередуются с d_i, лежащими в B);
– по теореме о нормальной форме для свободных произведений с объединённой подгруппой (смотрите, например, [ЛШ80]) для некоторого i и для некоторого $c \in C$ либо $d_i = \widetilde{c}$, либо $d_i = \widehat{c}$;
– в первом случае мы получаем (в $A * B$) равенство $w = \underbrace{d_1 \ldots d_{i-2} \overbrace{(d_{i-1}\widehat{c}d_{i+1})}^{d'_i} d_{i+2} \ldots d_n}_{w'} \cdot \big((\widehat{c})^{-1}\widetilde{c}\big)^{d_{i+1}\ldots d_n}$, где длина слова w' в $A * B$ меньше длины слова w (равной n); во втором случае действуем аналогично;
– очевидная индукция показывает, что w представляется в виде произведения не более, чем n, сопряжённых к определяющим соотношениям $\{(\widehat{c})^{-1}\widetilde{c} \mid c \in C\}$, что и означает относительную гиперболичность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Б80] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, УМН, 35:4(214) (1980), 183-183.
[Б84] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, Сибирский мат. журнал, 25:2 (1984), 84-103.
[Бу02] А. И. Будкин, Квазимногообразия групп, Издательство Алтайского университета, Барнаул, 2002.
[Го99] В. А. Горбунов, Алгебраическая теория квазимногообразий, Научная книга, Новосибирск, 1999.
[З91] Е. И. Зельманов, Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп, Мат. сборник, 182:4 (1991), 568-592.
[КаМ82] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, Наука, М., 1982.
[Ку58] А. В. Кузнецов, Алгоритмы как операции в алгебраических системах, Успехи мат. наук, 13:3, 240-241 (1958).
[ЛШ80] Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
[Лы96] И. Г. Лысёнок, Бесконечные бернсайдовы группы четного периода, Изв.РАН. Сер. матем., 60:3 (1996), 3-224.
[Ми24] О p-невырожденных системах уравнений над разрешимыми группами, Мат. сборник, 215:6 (2024), 61-76. См. также arXiv:2309.09096.
[Ней69] Х. Нейман, Многообразия групп, М.: Мир, 1969.
[Оль92] А. Ю. Ольшанский, Вложение периодических групп в простые периодические группы, Укр. мат. журнал, 44:6 (1992), 845-847.
[П01] А. Е. Панкратьев, О фактор-группах гиперболических произведений групп, Фундамент. и прикл. матем., 7:2 (2001), 465-493.
[ABA21] M. F. Anwar, M. Bibi, M. S. Akram, On solvability of certain equations of arbitrary length over torsion-free groups, Glasgow Mathematical Journal, 63:3 (2021), 651-659. См. также arXiv:1903.06503.
[Ba69] G. Baumslag, A non-cyclic one-relator group all of whose finite quotients are cyclic, J. Austral. Math. Soc., 10:3-4 (1969), 497-498.

[Ba73] G. Baumslag, A finitely presented solvable group that is not residually finite, Mathematische Zeitschrift, 133:2 (1973), 125-127.

[Be12] J. Beese, Das Konjugationsproblem in der Baumslag-Gersten-Gruppe. Diploma thesis, Fakultät Mathematik, Universität Stuttgart, 2012.

[Ber91] G. M. Bergman, Right orderable groups that are not locally indicable, Pacific Journal of Mathematics, 147:2 (1991), 243-248.

[BG08] V. V. Bludov, A. M. W. Glass, Conjugacy in lattice-ordered groups and right ordered groups, Journal of Group Theory, 11:5 (2008), 623-633.

[BH74] W. W. Boone, G. Higman, An algebraic characterization of groups with soluble word problem, Journal of the Australian Mathematical Society, 18:1 (1974), 41-53.

[Bu04] I. Bumagin, The conjugacy problem for relatively hyperbolic groups, Algebraic & Geometric Topology, 4:2 (2004), 1013-1040. См. также arXiv:math/0308171.

[Ch23] L. Chen, The Kervaire conjecture and the minimal complexity of surfaces, arXiv:2302.09811.

[D03] F. Dahmani, Combination of convergence groups, Geometry & Topology, 7:2 (2003), 933-963. См. также arXiv:math/0203258.

[DGO17] F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin, Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces, Mem. Amer. Math. Soc., 245:1156 (2017). См. также arXiv:1111.7048.

[Dar21] A. Darbinyan, Groups with decidable word problem that do not embed in groups with decidable conjugacy problem, Inventiones mathematicae, 224:3 (2021), 987-997. См. также arXiv:1708.09047.

[DMW16] V. Diekert, A. G. Myasnikov, A. Weiß, Conjugacy in Baumslag's group, generic case complexity, and division in power circuits, Algorithmica, 76:4 (2016), 961-988. См. также arXiv:1309.5314.

[EH21] M. Edjvet, J. Howie, On singular equations over torsion-free groups, International Journal of Algebra and Computation, 31:3 (2021), 551-580. См. также arXiv:2001.07634.

[How81] J. Howie, On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups, J. Reine Angew Math., 1981:324 (1981), 165-174.

[I94] S.V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponents, Internat. J. Algebra Comput., 4:1-2 (1994), 1-308.

[I05] S. V. Ivanov, On quasivarieties of groups and equations over groups, Bull. London Math. Soc., 37:1 (2005), 67-74. См. также arXiv:math/0210192.

[K99] A. A. Klyachko, Equations over groups, quasivarieties, and a residual property of a free group, Journal of Group Theory, 2:3 (1999), 319-327.

[KM23] A. A. Klyachko, M. A. Mikheenko, Yet another Freiheitssatz: Mating finite groups with locally indicable ones, Glasgow Mathematical Journal, 65:2 (2023), 337-344. См. также arXiv:2204.01122.

[KMR24] A. A. Klyachko, M. A. Mikheenko, V. A. Roman'kov, Equations over solvable groups, Journal of Algebra, 638 (2024), 739-750. См. также arXiv:2303.13240.

[Ly80] R. C. Lyndon, Equations in groups, Bol. Soc. Bras. Mat., 11:1 (1980), 79-102.

[Mag30] W. Magnus, Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. Reine Angew Math., 163 (1930) 141-165.

[Mi24a] M. A. Mikheenko, Infinite systems of equations in abelian and nilpotent groups, arXiv:2410.20729.

[Mil81] C. F. Miller III, The word problem in quotients of a group, in *Aspects of Effective Algebra*, ed. J.N. Crossley, Proceedings of a conference at Monash University Aug. 1979, Upside Down A Book Company, Steel's Creek, (1981), 246-250.

[MO13] https://mathoverflow.net/q/122065/24165 .

[Neu60] B. H. Neumann, On Amalgams of Periodic Groups, Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A, 255:1283 (1960), 477-489.

[NT22] M. Nitsche, A. Thom, Universal solvability of group equations, Journal of Group Theory, 25:1 (2022), 1-10. См. также arXiv:1811.07737.

[Os06] D. V. Osin, Elementary subgroups of relatively hyperbolic groups and bounded generation, Internat. J. Algebra Comput., 16:2 (2006), 99-118. См. также arXiv:math/0404118.

[Os06a] D. V. Osin, Relatively hyperbolic groups: intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems, Mem. Amer. Math. Soc., 179:843 (2006). См. также arXiv:math/0404040.

[Os06b] D. V. Osin, Relative Dehn functions of amalgamated products and HNN-extensions, Contemporary Mathematics, 394 (2006), 209-220. См. также arXiv:math/0411027.

[Os07] D. V. Osin, Peripheral fillings of relatively hyperbolic groups, Inventiones mathematicae, 167:2 (2007), 295-326. См. также arXiv:math/0510195.

[Pr88] S. D. Promislow, A simple example of a torsion-free, non unique product group, Bull. London Math. Soc. 20:4 (1988), 302-304.

[RR02] A. Rhemtulla, D. Rolfsen, Local indicability in ordered groups: braids and elementary amenable groups, Proc. Amer. Math. Soc., 130:9 (2002), 2569-2577.

[Ro12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, Groups-Complexity-Cryptology, 4:2 (2012), 191-239.

[Sc51] W. R. Scott, Algebraically closed groups, Proc. Amer. Math. Soc., 2:1 (1951), 118-121.

[Sh81] H. Short, Topological methods in group theory: the adjunction problem. Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1981.

[Th80] R. J. Thompson, Embeddings into finitely generated simple groups which preserve the word problem. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 95. Elsevier, 1980, 401-441.