

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ
ПЕРВЫЙ КУРС, ВТОРОЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2022**

Клячко

1. Системы линейных уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определённости такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Векторное пространство. линейная зависимость системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
4. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Существование базиса у любой системы векторов в $\mathbb{R}^n$. Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
5. Ранг системы векторов и его свойства. Размерность векторного пространства. Основная лемма о линейной зависимости в терминах рангов.
6. Алгоритм нахождения ранга конечной системы векторов.
7. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в её ступенчатом виде.
8. Критерии совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронекера–Капелли).
9. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
10. Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений.
11. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы. Произведение транспонированных матриц.
12. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.
13. Невырожденность (в смысле ранга) равносильна обратимости. Единственность обратной матрицы. Как найти обратную матрицу?
14. Ранг произведения матриц (оценка сверху и случай невырожденного сомножителя).
15. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной.
16. Понятие группы. Симметрическая группа. Разложения перестановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.
17. Чётность (знак) перестановки, её поведение при умножении перестановок. Чётность цикла.
18. Определитель квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядка. Определитель треугольной матрицы. Определитель транспонированной матрицы.
19. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
20. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
21. Определитель произведения матриц.
22. Критерий равенства определителя нулю.
23. Определитель с углом нулей.
24. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
25. Критерий определённости квадратной системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
26. Явная формула для обратной матрицы.
27. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).
28. Определитель Вандермонда. Приложение к задаче об интерполяционном многочлене. Интерполяционная формула Лагранжа.

29. Понятие кольца и поля. Делители нуля и обратимые элементы. Примеры колец и полей. Когда кольцо вычетов является полем? Число решений системы линейных уравнений над конечным полем. Характеристика поля.
30. Поле комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Деление.
31. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
32. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни. Среди корней степени сто из единицы сколько первообразных?
33. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и старший член. Степень произведения многочленов. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над полем.
34. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной.
35. Наибольший общий делитель в кольце многочленов от одной переменной над полем и его представление в виде $\text{НОД}(f, g) = uf + vg$. Делимость наибольшего общего делителя на любой общий делитель. Как найти НОД?
36. Неприводимые многочлены. Теорема об однозначном разложении на неприводимые множители в кольце многочленов от одной переменной над полем.
37. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратности. Число корней с учетом кратностей многочлена над полем не превосходит его степени.
38. Основная теорема алгебры (без доказательства в этом билете). Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.
39. Операция дифференцирования в кольце многочленов. Поведение при дифференцировании кратности корней многочлена над полем характеристики ноль.
40. Число комплексных корней многочлена с учётом кратности. Как найти число различных комплексных корней данного многочлена?
41. Поле рациональных дробей. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей (без единственности). Случай полей комплексных и действительных чисел.
42. Единственность разложения правильной дроби в сумму простейших дробей.
43. Кольцо многочленов от многих переменных. Лексикографический порядок на мономах. Старший член произведения.
44. Симметрические многочлены, свойства их старших членов. Существование и единственность представления произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Теорема Виета.
45. Лемма о возрастании модуля и лемма Даламбера.
46. Доказательство основной теоремы алгебры.
47. Группы, подгруппы, смежные классы. Теорема Лагранжа.
48. Изоморфизм групп. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп. Сколько подгрупп в циклической группе порядка сто?