

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ
ПЕРВЫЙ КУРС, ПЕРВЫЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2024**

Клячко

1. Системы линейных уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определённости такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Векторное пространство. Линейная зависимость системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
4. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Существование базиса у любой системы векторов в арифметическом векторном пространстве. Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
5. Ранг системы векторов и его свойства. Размерность векторного пространства. Основная лемма о линейной зависимости в терминах рангов.
6. Алгоритм нахождения ранга конечной системы векторов.
7. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в её ступенчатом виде.
8. Критерии совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронекера–Капелли).
9. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
10. Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений.
11. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы.
12. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.
13. Невырожденность (в смысле ранга) равносильна обратимости. Единственность обратной матрицы. Как найти обратную матрицу?
14. Ранг произведения матриц (оценка сверху и случай невырожденного сомножителя).
15. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной.
16. Обратная матрица: определение, единственность, критерий существования (в терминах ранга). Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
17. Понятие группы. Симметрическая группа. Разложения перестановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.
18. Чётность (знак) перестановки, её поведение при умножении перестановок. Чётность цикла.
19. Определитель квадратной матрицы. Определитель треугольной матрицы. Определитель транспонированной матрицы.
20. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
21. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
22. Определитель произведения матриц.
23. Критерий равенства определителя нулю.
24. Определитель с углом нулей.
25. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
26. Явная формула для обратной матрицы.

27. Критерий определённости квадратной системы линейных уравнений (теорема Крамера). Формулы Крамера.
28. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).
29. Определитель Вандермонда. Приложение к задаче интерполяции. Интерполяционная формула Лагранжа.
30. Понятие кольца и поля. Делители нуля и обратимые элементы. Примеры колец и полей. Когда кольцо вычетов является полем? Число решений системы линейных уравнений над конечным полем. Характеристика поля.
31. Поле комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Деление комплексных чисел.
32. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
33. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни. Среди корней степени сто из единицы сколько первообразных?
34. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень произведения многочленов. Делители нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над полем.
35. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной.
36. Наибольший общий делитель в кольце многочленов от одной переменной над полем и его представление в виде $\text{НОД}(f, g) = uf + vg$. Делимость наибольшего общего делителя на любой общий делитель. Как найти НОД?
37. Неприводимые многочлены. Теорема об однозначном разложении на неприводимые множители в кольце многочленов от одной переменной над полем.
38. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратности. Число корней с учетом кратностей многочлена над полем не превосходит его степени. Схема Горнера.
39. Основная теорема алгебры (без доказательства в этом билете). Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и \mathbb{R} .
40. Признак Эйзенштейна неприводимости над \mathbb{Q} . Бесконечность числа неприводимых многочленов над любым полем.
41. Операция дифференцирования в кольце многочленов. Правило Лейбница. Поведение при дифференцировании кратности корней многочлена над полем характеристики ноль.
42. Число комплексных корней многочлена с учётом кратности. Как найти число различных комплексных корней данного многочлена?
43. Поле рациональных дробей. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей (без единственности). Простейшие дроби над полями комплексных и действительных чисел.
44. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Лексикографический порядок на мономах. Старший член произведения.
45. Симметрические многочлены, свойства их старших членов. Существование и единственность представления произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Теорема Виета.
46. Дискриминант многочлена (только для комплексных многочленов со старшим коэффициентом один). Выражение дискриминанта кубического многочлена $x^3 + ax + b$ через a и b .
47. Лемма о возрастании модуля и лемма Даламбера.
48. Доказательство основной теоремы алгебры.
49. Теорема Декарта о положительных корнях вещественных многочленов.
50. Группы, подгруппы, смежные классы. Теорема Лагранжа.
51. Порядок элемента и порядок циклической подгруппы, порождённой этим элементом. Что получится, если элемент группы G возвести в степень $|G|$? Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона.
52. Изоморфизм групп. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп. Сколько подгрупп в циклической группе порядка сто?