

**ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО АЛГЕБРЕ
ВТОРОЙ КУРС, ВТОРОЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2021**

Клячко

1. Группы. Примеры. Алгебраическое описание диэдральной группы. Группа кватернионов. Изоморфизм.
2. Подгруппы. Системы порождающих. Порядок элемента. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
3. Подгруппы циклических групп.
4. Смежные классы. Теорем Лагранжа. Индекс. Нормальные подгруппы. Сопряжённые подгруппы.
5. Гомоморфизмы. Ядро и образ. Нормальность ядра. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах. Примеры.
6. Теорема Кэли. Теорема о том, что каждая подгруппа H конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса (делящего $|G : H|!$).
7. Прямые произведения (внешнее и внутреннее определение). Разложение циклической группы в прямую сумму примарных.
8. Факторгруппа $A \times B$ по подгруппе $H \times K$, где $H \triangleleft A$, а $K \triangleleft B$.
9. Конечно порождённые свободные абелевы группы, базисы. Какие группы изоморфны факторгруппам конечно порождённых свободных абелевых групп?
10. Критерий того, что данный элемент свободной абелевой группы можно включить в базис.
11. Теорема о подгруппах свободных абелевых групп (о согласованных базисах).
12. Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп (без единственности).
13. Периодическая часть и p -компонента абелевой группы.
14. Единственность разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп.
15. Действия группы на множестве. Примеры. Действия группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами и сопряжением. Различные орбиты не пересекаются.
16. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Нормализаторы и централизаторы.
17. Связь между стабилизаторами разных точек одной орбиты.
18. Первая теорема Силова (о существовании).
19. Вторая теорема Силова (о сопряжённости).
20. Третья теорема Силова (о количестве).