

**ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО АЛГЕБРЕ  
ПЕРВЫЙ КУРС, ПЕРВЫЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2024**

Клячко

1. Системы линейных уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определенности такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Векторное пространство (над  $\mathbb{R}$ ). Линейная зависимость системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
4. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Существование базиса у любой системы векторов в  $\mathbb{R}^n$ . Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
5. Ранг системы векторов и его свойства. Размерность векторного пространства. Основная лемма о линейной зависимости в терминах рангов.
6. Алгоритм нахождения ранга конечной системы векторов.
7. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в её ступенчатом виде.
8. Критерии совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронекера–Капелли).
9. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
10. Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений. Векторные пространства одинаковой размерности изоморфны.
11. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы.
12. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.
13. Невырожденность (в смысле ранга) равносильна обратимости. Как найти обратную матрицу?
14. Ранг произведения матриц (оценка сверху и случай невырожденного сомножителя).
15. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной.
16. Обратная матрица, ее единственность, критерий существования. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
17. Понятие группы. Симметрическая группа. Разложения перестановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.
18. Чётность (знак) перестановки, её поведение при умножении перестановок. Чётность цикла.
19. Определитель квадратной матрицы. Определитель треугольной матрицы. Определителя транспонированной матрицы.
20. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
21. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
22. Определитель произведения матриц.
23. Критерий равенства определителя нулю.
24. Определитель с углом нулей.
25. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
26. Явная формула для обратной матрицы.
27. Критерий определенности квадратной системы линейных алгебраических уравнений (теорема Крамера). Формулы Крамера.
28. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).