Дана матрица A над $\mathbb{Z}_5$ (и все задачи про эту матрицу над $\mathbb{Z}_5$, стало быть)

$$\mathbf{I}:\ A=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda&\lambda&\lambda&1\\ \lambda&\lambda&\lambda&1&\lambda\\ \lambda&\lambda&1&\lambda&\lambda\\ \lambda&1&\lambda&\lambda&\lambda\end{pmatrix};\qquad\qquad \mathbf{II}:\ A=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda&\lambda&\lambda&2\\ \lambda&\lambda&\lambda&2&\lambda\\ \lambda&\lambda&2&\lambda&\lambda\\ \lambda&2&\lambda&\lambda&\lambda\end{pmatrix}.$$

1. Сколько решений у системы однородных уравнений (над $\mathbb{Z}_5$) $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ при $\lambda=3$? Найдите (какую-нибудь) фундаментальную систему решений.

2. При $\lambda=3$ найти ранг матрицы $A^{\top}A$ (над $\mathbb{Z}_5$) и (какой-нибудь) базис системы её столбцов. (Здесь и далее $A^{\top}$ — это транспонированная матрица.)

3. Найти $(AA^{\top})^{-1}$ при $\lambda=3$.

4. Найти определитель и ранг матрицы $A^{\top}A$ (при всех $\lambda\in\mathbb{Z}_5$).

5. Существует ли матрица над $\mathbb{Z}_5$ хоть какого-нибудь размера $n\times n$, где $n\geqslant 2$, с которой коммутируют

а) меньше, чем 25 матриц (над $\mathbb{Z}_5$ того же размера)?

б) ровно 25 матриц (над $\mathbb{Z}_5$ того же размера)?

в) ровно 2020 матриц (над $\mathbb{Z}_5$ того же размера)?

Те, чьи фамилии начинаются на буквы А—К, пишут вариант I.

Те, чьи фамилии начинаются на буквы Л—Я, пишут вариант II. Разрешается пользоваться любыми шпаргалками (учебниками, тетрадками и тому подобным), но запрещено совещаться с товарищами. Камеры включите, буду следить.