

Дана матрица  $A$  над  $\mathbb{Z}_7$  (и все задачи про эту матрицу над  $\mathbb{Z}_7$ , стало быть)

$$\text{I: } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{II: } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Решить систему уравнений (над  $\mathbb{Z}_7$ )  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Сколько решений

у этой системы? Найдите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

2. Найти ранг матрицы  $A^T A$  (над  $\mathbb{Z}_7$ ) и (какой-нибудь) базис системы её столбцов. (Здесь и далее  $A^T$  — это транспонированная матрица.)
3. Найти  $(AA^T)^{-1}$ .
4. Найти определитель и ранг матрицы  $A^T A + \lambda E$  при всех  $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ .
5. С какой неединичной перестановкой из  $S_{109}$  коммутирует
- а) меньше всего перестановок?
  - б) больше всего перестановок?
- (Достаточно привести один пример такой перестановки и доказать, что она такая.)

---

РАЗРЕШАЕТСЯ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ЛЮБЫМИ ШПАРГАЛКАМИ (УЧЕБНИКАМИ, ТЕТРАДКАМИ И ТОМУ ПОДОБНЫМ), НО ЗАПРЕЩЕНО СОВЕЩАТЬСЯ С ТОВАРИЩАМИ. КАМЕРЫ ВКЛЮЧИТЕ, БУДУ СЛЕДИТЬ.