

Дана матрица A над \mathbb{Z}_7 (и все задачи про эту матрицу над \mathbb{Z}_7 , стало быть)

$$\text{I: } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{II: } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Решить систему уравнений (над \mathbb{Z}_7) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Сколько решений

у этой системы? Найдите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

2. Найти ранг матрицы $A^T A$ (над \mathbb{Z}_7) и (какой-нибудь) базис системы её столбцов. (Здесь и далее A^T — это транспонированная матрица.)
3. Найти $(AA^T)^{-1}$.
4. Найти определитель и ранг матрицы $A^T A + \lambda E$ при всех $\lambda \in \mathbb{Z}_7$.
5. Среди всевозможных систем из ста линейных уравнений со ста неизвестными над \mathbb{Z}_2 (их всего 2^{10100} штук) совместных систем больше восьмидесяти процентов или меньше?

Те, чьи фамилии начинаются на буквы А—К, пишут вариант I.

Те, чьи фамилии начинаются на буквы Л—Я, пишут вариант II.

Разрешается пользоваться любыми шпаргалками (учебниками, тетрадками и тому подобным), но запрещено совещаться с товарищами. Камеры включите, буду следить.