

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ  
ВТОРОЙ КУРС, ВТОРОЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2021 ГОДА**

Клячко

1. Группы. Примеры: диэдральная группа, группа кватернионов, симметрическая и знако-переменная группа. Алгебраическое описание диэдральной группы. Изоморфизм.
2. Подгруппы. Системы порождающих. Какую подгруппу порождает множество всех транспозиций в симметрической группе?
3. Какую подгруппу порождает множество всех тройных циклов в симметрической группе?
4. Порядок элемента. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
5. Подгруппы циклических групп.
6. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Индекс. Нормальные подгруппы. Сопряжённые подгруппы.
7. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ. Нормальность ядра. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах. Примеры.
8. Теорема Кэли.
9. Теорема о том, что каждая подгруппа  $H$  конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса (делящего  $|G:H|$ ).
10. Прямые произведения (внешнее и внутреннее определение и связь между ними). Когда прямое произведение циклических групп является циклической группой?
11. Факторгруппа  $A \times B$  по подгруппе  $H \times K$ , где  $H \triangleleft A$ , а  $K \triangleleft B$ .
12. Конечно порождённые свободные абелевы группы, базисы. Инвариантность ранга. Какие группы изоморфны факторгруппам конечно порождённых свободных абелевых групп?
13. Критерий того, что данный элемент свободной абелевой группы можно включить в базис.
14. Теорема о подгруппах свободных абелевых групп (о согласованных базисах).
15. Теорема о строении конечно порождённых абелевых групп (без единственности).
16. Периодическая часть и  $p$ -компонента абелевой группы.
17. Единственность разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп.
18. Конечные подгруппы мультипликативной группы поля.
19. Действия группы на множестве. Примеры. Действия группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами и сопряжением. Различные орбиты не пересекаются.
20. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Нормализаторы и централизаторы.
21. Связь между стабилизаторами разных точек одной орбиты.
22. Первая теорема Силова (о существовании).
23. Вторая теорема Силова (о сопряжённости). Следствие о нормальных силовских подгруппах.
24. Третья теорема Силова (о количестве).
25. Коммутаторы и коммутант. Коммутант группы  $S_n$  и  $A_n$  при  $n > 4$ .
26. Коммутант полной и специальной линейной группы над достаточно большим полем.

27. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы. Число гомоморфизмов из симметрической группы порядка  $2019!$  в циклическую группу порядка сто.
28. Разрешимые группы. Разрешимость подгрупп и факторгрупп разрешимых групп. «Обратное» утверждение.
29. Разрешимость группы невырожденных треугольных матриц над полем.
30. Центр конечной  $p$ -группы. Разрешимость конечных  $p$ -групп.
31. Простые группы. Простота знакопеременных групп.
32. Композиционный ряд. Теорема Жордана–Гёльдера.
33. Лемма Бернсайда о числе орбит и её следствие о покрытии группы сопряжёнными подгруппами.
34. Кольца и алгебры. Подкольца и подалгебры. Гомоморфизмы, ядро, идеалы (в кольцах и алгебрах). Ядро является идеалом.
35. Теорема о гомоморфизмах для колец и для алгебр.
36. Простые кольца и алгебры. Простота кольца матриц над полем.
37. Кольца главных идеалов. Кольцо многочленов от одной переменной над полем — кольцо главных идеалов.
38. Для каких идеалов в кольце многочленов от одной переменной над полем факторкольцо является полем? Явный вид поля из четырёх элементов.
39. Простые подполя. Существует ли поле из ста элементов?
40. Строение простых расширений полей.
41. Теорема о башне расширений полей (об умножении размерностей).
42. Алгебраические и трансцендентные элементы. Алгебраические расширения полей.
43. Поле алгебраических чисел. Почему оно поле? Почему оно алгебраически замкнуто?
44. Поле разложения: существование и единственность.
45. Классификация конечных полей.
46. Конечные подгруппы мультипликативной группы поля. Простота конечных расширений конечных полей.
47. Подполя конечных полей (критерий вложимости одного конечного поля в другое).
48. Линейные и матричные представления групп. Примеры. Регулярное представление. Изоморфизм представлений.
49. Неприводимые представления. Примеры. Гомоморфизмы представлений. Лемма Шура.
50. Прямая сумма представлений. Гомоморфизмы в прямую сумму представлений.
51. Теорема Машке.
52. Комплексные представления абелевых групп. Одномерные комплексные представления произвольных групп.
53. Как посчитать сумму квадратов размерностей неприводимых комплексных представлений конечной группы?
54. Алгебра эндоморфизмов комплексного представления конечной группы и центр этой алгебры.
55. Алгебра эндоморфизмов регулярного представления и групповая алгебра.
56. Число неприводимых комплексных представлений конечной группы.
57. Неприводимые комплексные представления групп  $S_3$  и  $S_4$ .
58. Теорема Бернсайда о неприводимых матричных алгебрах.