

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ
ПЕРВЫЙ КУРС, ВТОРОЙ ПОТОК, МЕХМАТ, ОСЕНЬ 2020**

Клячко

1. Системы линейных уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определённости такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Векторное пространство. линейная зависимость системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
4. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Существование базиса у любой системы векторов в $\mathbb{R}^n$. Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
5. Ранг системы векторов и его свойства. Размерность векторного пространства. Основная лемма о линейной зависимости в терминах рангов.
6. Алгоритм нахождения ранга конечной системы векторов.
7. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в её ступенчатом виде.
8. Критерии совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронекера–Капелли).
9. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
10. Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений.
11. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы. Произведение транспонированных матриц.
12. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.
13. Невырожденность (в смысле ранга) равносильна обратимости. Единственность обратной матрицы. Как найти обратную матрицу?
14. Ранг произведения матриц (оценка сверху и случай невырожденного сомножителя).
15. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной.
16. Понятие группы. Симметрическая группа. Разложения перестановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.
17. Чётность (знак) перестановки, её поведение при умножении перестановок. Чётность цикла.
18. Определитель квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядка. Определитель треугольной матрицы. Неизменяемость определителя при транспонировании.
19. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
20. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
21. Определитель произведения матриц.
22. Критерий равенства определителя нулю.
23. Определитель с углом нулей.
24. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
25. Критерий определённости квадратной системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
26. Явная формула для обратной матрицы.
27. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).
28. Определитель Вандермонда. Приложение к задаче об интерполяционном многочлене. Интерполяционная формула Лагранжа.
29. Понятие кольца и поля. Делители нуля и обратимые элементы. Примеры колец и полей. Когда кольцо вычетов является полем? Число решений системы линейных уравнений над полем? Характеристика поля.

30. Поле комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Деление.
31. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
32. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни.
33. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и старший член. Степень произведения многочленов. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над полем.
34. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной.
35. Наибольший общий делитель в кольце многочленов от одной переменной над полем и его представление в виде $\text{НОД}(f, g) = uf + vg$. Делимость наибольшего общего делителя на любой общий делитель. Как найти НОД?
36. Неприводимые многочлены. Теорема об однозначном разложении на неприводимые множители в кольце многочленов от одной переменной над полем.
37. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратности. Число корней с учетом кратностей многочлена над полем не превосходит его степени.
38. Основная теорема алгебры (без доказательства в этом билете). Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.
39. Операция дифференцирования в кольце многочленов. Поведение при дифференцировании кратности корней многочлена над полем характеристики ноль.
40. Число комплексных корней многочлена с учётом кратности. Как найти число различных комплексных корней данного многочлена?
41. Поле рациональных дробей. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей (без единственности). Случай полей комплексных и действительных чисел.
42. Единственность разложения правильной дроби в сумму простейших дробей.
43. Кольцо многочленов от многих переменных. Лексикографический порядок на мономах. Старший член произведения.
44. Симметрические многочлены, свойства их старших членов. Существование представления произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Теорема Виета.
45. Дискриминант многочлена (только для комплексных многочленов со старшим коэффициентом один). Выражение дискриминанта кубического многочлена $x^3 + ax + b$ через a и b .
46. Лемма о возрастании модуля и лемма Даламбера.
47. Доказательство основной теоремы алгебры.
48. Группы, подгруппы, смежные классы. Теорема Лагранжа.
49. Изоморфизм групп. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.