

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ
ПЕРВЫЙ КУРС, МЕХМАТ, КАЗАХСТАНСКИЙ ФИЛИАЛ МГУ, 2019**

А. А. Клячко

1. Системы линейных уравнений и связанные с ними матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и сильно ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Всякая система эквивалентна ступенчатой.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определенности такой системы в терминах ступенчатого вида.
3. Однородные системы линейных уравнений и свойства множеств их решений. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы.
4. Векторное пространство. линейная зависимость системы векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Базис системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая подсистема. Существование базиса у любой системы векторов в F^n . Единственность линейного выражения вектора через базис. Все базисы данной системы векторов содержат одно и то же число элементов.
6. Ранг системы векторов и его свойства.
7. Алгоритм нахождения базиса и ранга конечной системы векторов и линейных выражений всех векторов системы через найденный базис.
8. Ранг матрицы как общее значение ранга системы ее строк, ранга системы ее столбцов и числа ненулевых строк в ее ступенчатом виде.
9. Критерии совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теорема Кронекера–Капелли).
10. Подпространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
11. Понятие группы. Симметрическая группа. Разложения перестановки в произведение транспозиций и в произведение независимых циклов.
12. Чётность (знак) перестановки, её поведение при умножении перестановок. Чётность цикла.
13. Определитель квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядка. Определитель треугольной матрицы. Неизменяемость определителя при транспонировании.
14. Свойства полилинейности и кососимметричности определителя.
15. Поведение определителя при элементарных преобразованиях над его строками (столбцами). Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
16. Критерий равенства определителя нулю. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга в терминах миноров).
17. Критерий определенности квадратной системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
18. Определитель с углом нулей.
19. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
20. Определитель Вандермонда. Приложение к задаче об интерполяционном многочлене.
21. Умножение матриц, свойства дистрибутивности и ассоциативности, существование единицы. Произведение транспонированных матриц.
22. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц и ступенчатой матрицы. Представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных.

23. Ранг произведения матриц.
24. Определитель произведения матриц.
25. Обратная матрица, ее единственность, критерий существования, явная формула. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
26. Понятие кольца и поля. Простейшие свойства кольца. Делители нуля и обратимые элементы. Примеры колец и полей.
27. Поле комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Деление.
28. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
29. Комплексные корни из единицы. Первообразные корни.
30. Кольца вычетов по модулю целого числа. Когда кольцо вычетов является полем? Характеристика поля.
31. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и старший член. Степень произведения многочленов. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над полем.
32. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной.
33. Наибольший общий делитель в кольце многочленов от одной переменной над полем и в кольце целых чисел и его представление в виде $\text{НОД}(f, g) = uf + vg$ (алгоритм Евклида). Делимость наибольшего общего делителя на любой общий делитель. Ограничение на степени u и v в случае многочленов.
34. Неприводимые многочлены и простые числа. Теорема об однозначном разложении на неприводимые (простые) множители в кольце многочленов от одной переменной над полем и в кольце целых чисел.
35. Теорема Безу. Корни многочлена и их кратности. Число корней с учетом кратностей многочлена над полем не превосходит его степени.
36. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
37. Операция дифференцирования в кольце многочленов. Поведение при дифференцировании кратности корней многочлена над полем характеристики ноль. Освобождение от кратных корней.
38. Теорема об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел (основная теорема алгебры) без доказательства. Неприводимые многочлены и разложение на неприводимые множители многочленов над полем комплексных чисел. Число корней комплексного многочлена с учетом кратностей.
39. Комплексные корни вещественного многочлена. Неприводимые многочлены и разложение на неприводимые множители многочленов над полем действительных чисел.
40. Поле рациональных дробей. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей. Случай полей комплексных и действительных чисел.
41. Кольцо многочленов от многих переменных. Старший член многочлена и его свойства. Лексикографический порядок на мономах.
42. Формулы Виета. Симметрические многочлены, свойства их старших членов. Существование представления произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.
43. Дискриминант многочлена. Выражение дискриминанта кубического многочлена $x^3 + ax + b$ через a и b .

44. Кольцо классов вычетов кольца многочленов от одной переменной по модулю данного многочлена. Когда оно является полем? Существование поля из p^2 элементов.
45. Существует ли поле из 2^a элементов?