ЧЕМ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЙ МИР ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ БИЛИНЕЙНОГО?

Клячко

Напоминаю, что...

Функция $f: V \times V \to \mathbb{C}$, где V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ называется *полуторалинейной*, если она

- линейна по первому аргументу, то есть $f(\lambda u + \mu v, w) = \lambda f(u, w) + \mu f(v, w)$ для всех $u, v, w \in V$ и всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и
- *полулинейна* по второму аргументу, то есть $f(w, \lambda u + \mu v) = \overline{\lambda} f(w, u) + \overline{\mu} f(w, v)$ для всех $u, v, w \in V$ и всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(Черта здесь и далее обозначает комплексное сопряжение.) Почти всё, что мы знаем про билинейные функции (над $\mathbb{R}$) переносится без изменений на полуторалинейные функции над $\mathbb{C}$. Это касается и формулировок, и доказательств. Отличается только терминология, и ещё имеются некоторые нюансы.

Терминология

Полуторалинейная функция $f: V \times V \to \mathbb{C}$ называется *эрмитовой*, если $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$ для всех $u, v \in V$. (Эрмитовость — это аналог симметричности.)

Комплексная квадратная матрица называется *эрмитовой*, то есть $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ для всех i и j (И в этом контексте эрмитовость есть аналог симметричности.)

Конечномерное комплексное векторное пространство с фиксированной положительно определённой эрмитовой функцией $(\cdot, \cdot)$ называется *унитарным* (или *эрмитовым*) пространством. (Это аналог евклидова пространства.)

Оператор в A в унитарном пространстве называется *эрмитовым* (или *самосопряжённым*), если $(Au, v) = (u, Av)$ для всех векторов u и v. (И здесь эрмитовость есть аналог симметричности.)

Оператор в A в унитарном пространстве называется *унитарным*, если $(Au, Av) = (u, v)$ для всех векторов u и v. (Унитарные операторы представляют собой аналог ортогональных операторов.)

Матрица A называется *унитарной*, если $\overline{A}^{\top} = A^{-1}$. (Тут опять унитарность есть аналог ортогональности.)

Нюансы

Грубо говоря, почти все утверждения об этих полуторалинейных вещах (и доказательства этих утверждений) получаются из соответствующих знакомых нам утверждений (и их доказательств) простым переводом с помощью словарика из предыдущего параграфа.

По большому счёту нюанс только один — теорема о каноническом виде для унитарных операторов формулируется (и доказывается) проще:

всякий унитарный оператор в унитарном пространстве имеет ортонормированный базис из собственных векторов.

На матричном языке (то есть на детском языке, если угодно) эта теорема звучит так:

для любой унитарной матрицы A найдётся унитарная матрица T такая, что матрица TAT^{-1} диагональна.

(На всякий случай, я обращаю внимание, что на диагонали этой диагональной матрицы стоят комплексные числа с единичным модулем. Понимаете, почему?)[*)]

Это, конечно же, выглядит проще, чем аналогичная теорема о каноническом виде ортогональных операторов — никаких тут косинусов и синусов. И доказывается эта теорема проще. И практически найти этот канонический базис проще — просто находим собственные подпространства, и в каждом из собственных подпространств берём ортогональный базис (например, берём какой-то базис в собственном подпространстве и ортогонализуем его методом Грама–Шмидта). Всё, это ответ, поскольку разные собственные подпространства автоматически ортогональны друг другу (понимаете, почему?).

Этой простоте можно не только радоваться, но можно также использовать эти комплексные штучки для решения чисто вещественной задачи поиска канонического базиса для ортогонального оператора. Например, мы хотим ортогональный базис из собственных векторов для некоторого ортогонального оператора в пятимерном ортогональном пространстве. Пусть этот оператор задан ортогональной матрицей A. Действовать можно так.

[*)] К слову сказать, у вещественного симметрического оператора канонический вид диагональный, и на диагонали, конечно же, стоят вещественные числа. А у аналога симметрического вещественного оператора, то есть у комплексного эрмитова оператора, канонический вид диагональный, и на диагонали стоят... тоже вещественные числа! (Можно ли это считать нюансом?)

1. Посчитаем характеристический многочлен (да, с этого шага почти все наши алгоритмы начинаются), из которого однозначно найдём канонический вид. Допустим, этот вид оказался таким:

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же рассматривать наш ортогональный оператор A, как унитарный оператор в пятимерном унитарном пространстве, то канонический вид будет такой:

$$A'' = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

2. Найдём теперь (двумерное комплексное) собственное подпространство $V(\varepsilon)$ и выберем в нём ортонормированный базис e''_1, e''_2.

3. Возьмём теперь комплексно сопряжённые векторы $\overline{e''_1}, \overline{e''_2}$. Эти два вектора будут образовывать ортонормированный базис собственного подпространства $V(\overline{\varepsilon})$. Понимаете, почему?

4. Теперь возьмём четыре вектора

$$e'_1 = \frac{1}{2}(e''_1 + \overline{e''_1}), \quad e'_2 = \frac{1}{2i}(e''_1 - \overline{e''_1}), \quad e'_3 = \frac{1}{2}(e''_2 + \overline{e''_2}), \quad e'_4 = \frac{1}{2i}(e''_2 - \overline{e''_2}).$$

Эти векторы автоматически будут
- вещественными (Понятно, почему?),
- ортогональными между собой (Понятно, почему?),
- иметь длину один (Понятно, почему?),
- двумерные плоскости $\langle e'_1, e'_2\rangle$ и $\langle e'_3, e'_4\rangle$ будут инвариантны (Понятно, почему?), а
- оператор A в этих вещественных инвариантных плоскостях будет действовать, как поворот на $\pi/3$.

5. В качестве вектора e'_4 надо взять любой вещественный вектор длины один в (одномерном) собственном подпространстве $V(1)$.

Упражнение 1. Подумайте, быстрее ли этот («комплексный») алгоритм, чем обычный («вещественный») алгоритм, который мы раньше обсуждали. Решите этим «комплексным» способом какую-нибудь конкретную задачу.

Упражнение 2. Ещё нюансом можно назвать то, что некоторые «полуторалинейные аналоги» билинейных вещей Ольга Викторовна просто не обсуждала (наверное). Например, что вы можете сказать про алгоритм Лагранжа? Какой тут аналог?

Упражнение 3. Оператор A в унитарном пространстве называется *косоэрмитовым*, если $(Au, v) = -(u, Av)$ для всех векторов u и v. Сформулируйте и докажите теорему о каноническом виде для косоэрмитовых операторов. (Подсказка: собственные значения косоэрмитова оператора обязаны быть чисто мнимыми, докажите.)

Решите ещё 46.7 в, д, 45.7 а, 45.21 а (если вы понимаете, что там написано), 46.8, 46.9, 46.10.