КАК НАЙТИ КАНОНИЧЕСКИЙ БАЗИС ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА?

Клячко

1. Напоминаю, что...

Оператор A в евклидовом пространстве V называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение: $(Au, Av) = (u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Чуть более экономное определение выглядит так: $(Au, Au) = (u, u)$ для всех $u \in V$. Покажите, что эти два определения эквивалентны.

Матрица A ортогонального оператора в любом ортогональном базисе *ортогональна*, то есть $A^{-1} = A^\top$. Верно и обратное: если матрица линейного оператора в евклидовом пространстве хоть в каком-то ортогональном базисе ортогональна, то этот оператор ортогональный.

Как обычно, мы хотим найти базис, в котором матрица выглядит как можно проще. Ольга Викторовна доказывала, что

для любого ортогонального оператора в евклидовом пространстве найдётся ортогональный базис, в котором матрица этого оператора блочно диагональна, и на диагонали стоят клетки 1×1 вот такие: ± 1, и 2×2 вот такие: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $0 < \varphi < \pi$. При этом такой вид единственный с точностью до перестановки клеток.

Я ничего не перепутал? Может надо писать $0 < \varphi < 2\pi$? Другими словами,

верно ли, что поворот на угол φ и поворот на угол $-\varphi$ — это подобные операторы в двумерном евклидовом пространстве?

2. Алгоритм

С вычислительной точки зрения задача выглядит так: дана ортогональная матрица A, а мы хотим найти ортогональную матрицу T такую, что матрица TAT^{-1} имеет канонический вид (то есть блочно диагональный вид, о котором идёт речь в теореме).

Сам этот канонический вид можно найти легко, он однозначно определяется характеристическим многочленом. Более того, часто даже характеристический многочлен не обязательно считать. Например, пусть дана ортогональная матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$. Каким может быть канонический вид? Каким-то таким: $A' = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$ или $A' = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Диагональные варианты сразу отпадают, поскольку диагональные матрицы являются симметрическими, а симметрическая матрица в любом ортогональном базисе симметрическая (а матрица A несимметрическая). Осталось понять плюс или минус стоит в левом верхнем углу, и найти угол φ. В левом верхнем углу стоит плюс один, поскольку определитель матрицы A равен единице. А угол φ теперь находится из сравнения следов (след не зависит от выбора базиса): $\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = 1 + 2\cos\varphi$. Отсюда однозначно находим φ (поскольку $0 < \varphi < \pi$).

Найти канонический базис, как всегда, труднее. Сейчас мы этим займёмся.

1. Находим характеристический многочлен матрицы A, и тем самым находим канонический вид. Пусть
$$\chi_A(x) = \pm(x-1)^k(x+1)^l\big(x^2 - 2(\cos\varphi)x + 1\big)^m\big(x^2 - 2(\cos\psi)x + 1\big)^n \ldots$$
Это означает, что в каноническом виде на диагонали стоит k единиц, l минус единиц, m клеток вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, n клеток вида $\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$, и так далее.
2. Находим ортогональный базис в собственном подпространстве с собственным значением один. (Это, как вы понимаете, можно сделать, не решая систем уравнений.)
3. Аналогично находим ортогональный базис в собственном подпространстве с собственным значением минус один.
4. Теперь находим какой-нибудь ненулевой вектор v из ядра оператора $A^2 - 2(\cos\varphi)A + E$ (для этого тоже не обязательно решать системы уравнений). Нормируем этот вектор, то есть считаем теперь, что $|v| = 1$.

5. Берём вектор Av и ортогонализуем систему векторов v, Av, то есть находим вектор w длины один, ортогональный вектору v и такой, что $\langle v, w\rangle = \langle v, Av\rangle$. Можно сразу в общем виде решить эту задачку:

$$Av = (\cos\varphi)v + (\sin\varphi)w, \quad \text{то есть} \quad w = \frac{1}{\sin\varphi}\Big(Av - (\cos\varphi)v\Big)$$

(но если вы скажете, что такие сложные формулы проще вывести каждый раз, чем запомнить один раз, то я не буду спорить). Векторы v и w составляют кусок искомого базиса, отвечающий одной клетке $\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$.

6. Если клеток такого вида (с данным φ) в каноническом виде больше одной (то есть $m > 1$), то берём какой-то ещё вектор $v' \in \ker(A^2 - 2(\cos\varphi)A + E)$, линейно независимый с v и w. Делаем так, чтобы v' оказался ортогонален плоскости $\langle v, w\rangle$ (для этого вычитаем из v' его ортогональную проекцию на эту плоскость) и имел длину один (то есть нормируем получившийся вектор). Далее аналогично находим вектор w' (по формуле, которую неохота запоминать): $w' = \frac{1}{\sin\varphi}\Big(Av' - (\cos\varphi)v'\Big)$. Векторы v' и w' составляют кусок базиса, отвечающей второй клетке вида «поворот на φ». И так далее. Когда покончим с φ, приступим к ψ...

3. Пример

Пусть мы хотим найти канонический вид и базис для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вы скажете: «Что же тут искать? Она же и так в каноническом виде (одна клетка размера один с минус единицей и две клетки размера два с поворотами на $\pi/2$) и стало быть исходный базис $e_1, \ldots, e_5$ и есть канонический!» Да, вы правы. Но давайте представим себе, что мы не заметили, что ответ тут очевиден, а просто тупо действуем в соответствии с предложенным выше алгоритмом и смотрим, что получится. Или, если хотите, можете можете воображать, что мы, зная ответ, следим за действиями какого-то студента Васи, который ответ не знает — ему дана матрица того же оператора, но в каком-то другом базисе.

1. Сперва Вася пытается найти канонический вид. Для этого он считает характеристический многочлен. Поскольку характеристический многочлен не зависит от базиса, у Васи получается то же самое, что у нас: $\chi_A(x) = -(x+1)(x^2+1)^2$. Отсюда Вася правильно находит канонический вид — линейные множители отвечают клеткам размера один, а квадратные неприводимые (над $\mathbb{R}$) множители отвечают клеткам размера два.
2. Этот шаг Вася пропускает, поскольку видит, что единица не является собственным значением.
3. Теперь Вася ищет ортогональный базис в собственном подпространстве V_{-1} (с собственным значением минус один). Зная уже канонический вид, Вася понимает, что это подпространство одномерно, и значит, ему просто нужно любое ненулевое решение системы уравнений $(A+E)X = 0$ (это решение надо потом нормировать, разумеется). Однако решать системы уравнений Вася не любит, поэтому он пытается применить обычную для нас хитрость. Он берёт в качестве аннулирующего многочлена для A минимальный многочлен $f(x) = (x+1)(x^2+1)$, убирает из него $(x+1)$, получает многочлен $g(x) = x^2+1$, подставляет в него A и применяет к случайному вектору $v \in \mathbb{R}^5$. Полученный вектор $u = g(A)v$ заведомо будет собственным с собственным значением минус один. (Все это понимают?) Допустим, что в нашем базисе Васин случайный вектор v имеет вид $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, тогда у Васи получится

$$u = g(A)v = (A^2+E)v = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Правильно? Разумеется, Васе приходится действовать с более сложной матрицей, но мы-то сейчас переписываем его рассуждения в *нашем* базисе, а там всё так. Теперь этот вектор u Вася нормирует и получает первый базисный вектор искомого базиса: $e_1' = \frac{1}{2}u$. В нашем базисе получается $e_1' = e_1$, что неудивительно.

(На самом деле, за счёт этих случайностей могло получиться и немножко другое: e_1' мог оказаться... Все понимают, чем именно?)

4. Теперь Вася пытается, не решая систем уравнений, аналогичным образом расправиться с клетками размера два. Теперь в качестве «почти аннулирующего» многочлена g Вася берёт $g(x) = f(x)/(x^2+1) = x+1$, подставляет в него свой оператор A и применяет к случайному вектору v (к тому же самому), долго считает... А в нашем базисе все его вычисления выглядят просто:

$$g(A)v = (A+E)v = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь Вася нормирует то, что получилось, и объявляет вторым базисным вектором: $e_2' = \frac{1}{\sqrt{108}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(Векторы e_1' и e_2' ортогональны автоматически — об этом не надо заботиться, понимаете, почему?)

5. Вектор e_3' находится по «формуле, которую проще вывести, чем запомнить»:

$$e_3' = \frac{1}{\sin(\pi/2)}\Big(Ae_2' - (\cos(\pi/2))e_2'\Big) = Ae_2' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{108}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{108}}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор автоматически имеет длину один и ортогонален всем предыдущим векторам искомого базиса.

6. Осталась ещё одна клетка 2×2 с поворотом на тот же угол (то, что угол такой же, несколько осложняет дело). Вася берёт другой случайный вектор v. Пусть в наших координатах $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Далее повторяется шаг 4, но теперь с этим новым вектором v:

$$g(A)v = (A+E)v = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор обязан быть ортогонален вектору e_1', но не обязан быть ортогонален векторам e_2' и e_3'. Вася ортогонализует этот кусочек базиса, то есть вычитает из u его проекцию на $\langle e_2', e_3'\rangle$. В нашем базисе Васины вычисления выглядят так:

$$\widetilde{u} = u - (u,e_2')e_2' - (u,e_3')e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5\cdot 2 + 9\cdot 2}{\sqrt{108}}\cdot\frac{1}{\sqrt{108}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{-1\cdot 2 - 1\cdot 2}{\sqrt{108}}\cdot\frac{1}{\sqrt{108}}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \ldots \quad \text{(досчитайте)}$$

Теперь Вася нормирует то, что получилось, и объявляет четвёртым базисным вектором: $e_4' = \frac{1}{|u|}\widetilde{u}$. Вектор e_5' получается из e_4' так же, как e_3' из e_2': $e_5' = Ae_4'$. Этот вектор e_5' автоматически ортогонален остальным.

Упражнение 1. Как видим, Вася получил канонический базис, сильно отличающийся от того, который мы знали заранее. Да, канонический базис для ортогонального оператора никогда не бывает единственным (если размерность пространства ненулевая). Докажите это и опишите все ортогональные операторы, для которых канонических базисов конечное число.

Упражнение 2. Покажите, что если ортогональные матрицы A и B подобны (то есть существует матрица T такая, что $A = TBT^{-1}$), то они *ортогонально подобны*, то есть матрицу T можно выбрать ортогональной. Верно ли аналогичное утверждение для симметрических матриц? То есть верно ли, что из подобности симметрических матриц вытекает их ортогональная подобность?

Упражнение 3*. Как по вещественной матрице определить, является ли эта матрица

а) матрицей хоть какого-нибудь ортогонального оператора (хоть в каком-нибудь базисе, возможно, неортогональном)?

б) матрицей хоть какого-нибудь симметрического оператора (хоть в каком-нибудь базисе, возможно, неортогональном)?

Приведите пример вещественной матрицы, которая не является ни матрицей никакого ортогонального оператора, ни матрицей никакого симметрического оператора (ни в каком базисе, даже в неортогональном).

Вы могли заметить, что теория ортогональных операторов (то есть операторов, обратных своим сопряжённым) во многом похожа на теорию самосопряжённых операторов (то есть операторов равных своим сопряжённым).

Существует «объединяющее» понятие: оператор называется *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряжённым.

Упражнение 3. Покажите, что если подпространство U евклидова пространства инвариантно относительно нормального оператора, то его ортогональное дополнение $U^{\perp}$ тоже инвариантно относительно этого оператора.

Ясно, что и ортогональные операторы, и самосопряжённые операторы нормальны. Ещё один интересный класс нормальных операторов — это *кососимметрические* операторы, то есть операторы, равные минус своим сопряжённым.

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите теорему о каноническом виде для кососимметрических операторов.

Решите ещё 46.6 а,ж.