КАК НАЙТИ ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ?

Клячко

Напоминаю, что...

Ольга Викторовна доказывала такую теорему:

всякий невырожденный линейный оператор в евклидовом пространстве раскладывается в произведение ортогонального и самосопряжённого.

Упражнение 1. Или ОВ доказывала наоборот: *всякий невырожденный линейный оператор раскладывается в произведение самосопряжённого и ортогонального*?

а) Выведите из одного утверждения другое, затратив меньше, чем полстрочки рассуждений.

б) Но с другой стороны, приведите пример невырожденного оператора, который нельзя разложить в произведение самосопряжённого и ортогонального операторов, коммутирующих между собой.

Упражнение 2*. Покажите, что слово «невырожденный» в теореме выше можно вычеркнуть, и она всё равно останется верной.

Если же оператор невырожденный, то самосопряжённый оператор из разложения можно сделать положительно определённым, причём такое разложение будет уже единственным:

всякий невырожденный линейный оператор в евклидовом пространстве раскладывается единственным образом в произведение ортогонального оператора и положительно определённого самосопряжённого оператора.

Алгоритм

С вычислительной точки зрения задача выглядит так: дана невырожденная матрица A, а мы хотим найти ортогональную матрицу U и симметрическую положительно определённую матрицу S так, чтобы $A = US$.

1. Сперва найдём S. Для этого извлечём квадратный корень из (положительно определённой самосопряжённой) матрицы $A^\top A$, то есть найдём матрицу S такую, что $S^2 = A^\top A$, причём этот корень S тоже выберем тоже самосопряжённым положительно определённым. Как это сделать? Просто найдём ортогональный базис из собственных векторов для S (это мы умеем); другими словами, найдём ортогональную матрицу T такую, что матрица $D = TST^{-1}$ диагональна (и диагональные элементы положительны, поскольку D, как и S положительно определена). Из диагональной матрицы с положительными элементами на диагонали корень извлечь легко — мы найдём диагональную матрицу K с положительными элементами на диагонали такую, что $K^2 = D$; Ну значит, $(T^{-1}KT)^2 = (T^{-1}KT)(T^{-1}KT) = T^{-1}K^2T = T^{-1}DT = S$.

2. Зная уже S, матрицу U найти легко: $U = AS^{-1}$. Эта матрица автоматически ортогональна:

$$U^\top U = (AS^{-1})^\top AS^{-1} = (S^{-1})^\top A^\top AS^{-1} = S^{-1}A^\top AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = E.$$

Пример

Например, возьмём матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдём полярное разложение $A = US$ (где U ортогональная, а S — положительно определённая симметрическая).

1. $S = \sqrt{A^\top A} = \sqrt{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}}$. Чтобы извлечь корень, надо найти ортогональный базис из собственных векторов для $A^\top A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Считаем характеристический многочлен $\begin{vmatrix} 10-x & 8 \\ 8 & 10-x \end{vmatrix} = x^2 - 20x + 36 = (x-2)(x-18)$. Собственные подпространства тоже легко считаются:

$$V_{18} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{и} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Это означает, что ортогональный базис из собственных векторов такой:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

И значит,

$$A^\top A = \begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 10\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{18} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}^2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{18} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\right)^2.$$

(Всегда надо помнить, что для ортогональной матрицы *обратная = транспонированная.*) Таким образом, $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. Осталось найти U:

$$U = AS^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Но не радуйтесь...

Всё это теоретически просто, но практически утомительно. Вообще, это неприятная задача — даже, когда окончательный ответ простой, в процессе вычислений приходится искать собственные значения и собственные векторы, которые могут оказаться некрасивыми. Так что, если вы сумеете как-то проще посчитать (угадать корень из матрицы, например), то хорошо. Разобранный пример специально подобран так, чтобы все вычисления показались нестрашными.

Но представьте себе, что вам надо найти полярное разложение для матрицы $A = \begin{pmatrix}3 & 3 & 30\\ 2 & 20 & 3\\ 10 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Если не бросаться сразу считать, то можно догадаться, что матрица станет симметрической, если поменять местами первую и последнюю строки, то есть

$$A = \begin{pmatrix}3 & 3 & 30\\ 2 & 20 & 3\\ 10 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 2 & 3\\ 2 & 20 & 3\\ 3 & 3 & 30\end{pmatrix}.$$

А это равенство и есть полярное разложение для A: первый сомножитель очевидно ортогональный, а второй симметрический и положительно определённый (по критерию Сильвестра, из-за сильного доминирования диагональных элементов).

Если же считать честно, то вам придётся найти собственные значения и собственные векторы для этой симметрической матрицы $\begin{pmatrix}10 & 2 & 3\\ 2 & 20 & 3\\ 3 & 3 & 30\end{pmatrix}$ (вернее, для её квадрата); ясно, что эти собственные значения ужасны, а собственные векторы ещё страшнее.

Упражнение 3. Покажите ~~(в одну строчку)~~, что всякая ~~невырожденная~~ матрица раскладывается в произведение UDU', где матрицы U и U' ортогональны, а D диагональна.

Упражнение 4*. Опишите все симметрические вещественные матрицы из которых

а) квадратный корень извлекается конечным числом способов.

б) симметрический квадратный корень извлекается конечным числом способов.

Под *квадратным корнем* из вещественной матрицы A мы понимаем любую вещественную матрицу B такую, что $A = B^2$.

Решите ещё 46.16 а,в.