

Вопросы к коллоквиуму по алгебре. 2013/2014, осенний семестр, гр. 201 – 2 06. Е.С. Голод.

1. Понятие группы, изоморфизма, подгруппы. Примеры групп, подгрупп, изоморфизмов. Группы диэдра и группа кватернионов порядка 8.
2. Подгруппа, порожденная некоторым множеством. Система порождающих группы. Примеры систем порождающих в группе невырожденных матриц, группе перестановок, группе четных перестановок, группе диэдра, группе кватернионов. Циклические группы и их подгруппы. Порядок элемента в группе.
3. Изоморфизм циклических групп одинакового порядка. Понятие группы автоморфизмов. Группа автоморфизмов циклической группы. Группа внутренних автоморфизмов.
4. Сопряженные элементы, сопряженные подгруппы. Классы сопряженных элементов в группе невырожденных матриц (над полем комплексных чисел), группе перестановок, группе диэдра, группе кватернионов.
5. Центр группы. Центр группы невырожденных матриц, группы перестановок, группы диэдра, группы кватернионов. Понятие централизатора.
6. Нормальные подгруппы. Нормализатор подгруппы. Нормальные подгруппы в группах перестановок степени 3 и 4, группе четных перестановок степени 4, группах диэдра и группе кватернионов.
7. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Произведение подгрупп.
8. Факторгруппа. Примеры. Факторгруппа по центру.
9. Гомоморфизм групп и его свойства. Ядро гомоморфизма, полные прообразы элементов при гомоморфизме. Теорема о гомоморфизме и примеры ее применения. Теорема об изоморфизме для факторгруппы произведения нормальной и некоторой подгруппы по нормальной подгруппе.
10. Связь между подгруппами в группе и ее факторгруппе (гомоморфном образе). Изоморфизм соответствующих факторгрупп.
11. Коммутаторы и коммутант, их свойства. Перестановочность элементов двух нормальных подгрупп с единичным пересечением. Коммутант группы перестановок, группы диэдра, группы кватернионов.
12. Понятие простой группы. Нормальные и композиционные ряды в группах. Теорема Жордана – Гёльдера (без доказательства).
13. Простота группы $SO(3)$.
14. Действие группы на множестве, эквивалентные определения и примеры. Ядро действия.
15. Стабилизаторы элементов, их сопряженность при транзитивном действии. Действие группы на множестве левых смежных классов по данной подгруппе. Наибольшая нормальная подгруппа, содержащаяся в данной подгруппе. Нормальность подгруппы наименьшего простого индекса в конечной группе.
16. Простота группы четных перестановок степени n при n большем или равном 5.
17. Инвариантные множества и орбиты действия. Число элементов в орбите. Орбитальная формула.
18. Стабилизаторы и орбиты при действии группы сопряжением на множествах ее элементов и подгрупп. Применение орбитальной формулы к этим случаям.
19. Силовские p -подгруппы, их существование (первая теорема Силова). Теорема Коши.
20. Сопряженность силовских p -подгрупп (вторая теорема Силова). Всякая p -подгруппа содержится в силовской. Эквивалентность нормальности и единственности силовской p -подгруппы.
21. Ограничения на число силовских p -подгрупп. Третья теорема Силова.

22. Группы порядка pq , p, q – разные простые числа.
23. Конечные p -группы и их свойства.
24. Прямое произведение групп (внутреннее и внешнее). Примеры.
25. Порядок элемента в прямом произведении. Прямое произведение циклических групп. Конечные группы, разлагающиеся в прямое произведение p -групп.
26. Разложение конечной абелевой группы в прямое произведение примарных циклических групп (существование и единственность). Классификация конечных абелевых групп.
27. Группа гомоморфизмов в абелеву группу. Группа характеров конечной абелевой группы.
28. Полупрямое произведение групп (внутреннее и внешнее). Примеры.
29. Неабелевы группы порядка p в кубе.
30. Разрешимые группы. Эквивалентные определения и примеры.
31. Разрешимость конечной p -группы и группы невырожденных верхних треугольных матриц.