Программа спецкурса

Алгебраическая геометрия и теория инвариантов

(Лектор Д. А. Тимашёв)

Основы алгебраической геометрии. Аффинные алгебраические многообразия, определяющие идеалы, регулярные функции, морфизмы.

Теорема Гильберта о нулях. Двойственность между категориями аффинных многообразий и конечнопорождённых алгебр без нильпотентов.

Топология Зарисского, ее нётеровость, разложение многообразия на неприводимые компоненты.

Теорема об образе доминантного морфизма.

Рациональные функции и отображения.

Произведение многообразий.

Размерность. Теорема Крулля, теорема о размерности слоев морфизма.

Касательные пространства и отображения. Гладкие и особые точки.

Конечные морфизмы. Нормальные многообразия.

Общее понятие алгебраического многообразия. Проективные многообразия, их полнота.

Алгебраические группы. Понятие алгебраической группы. Связная компонента единицы. Гомоморфизмы алгебраических групп (ядро и образ — замкнутые подгруппы).

Касательная алгебра Ли.

Действия алгебраических групп, локальная замкнутость орбит, представление в алгебре регулярных функций.

Линеаризуемость аффинных алгебраических групп.

Однородные пространства, теорема Шевалле. Факторгруппы.

Разложение Жордана. Алгебраические торы. Унипотентные группы, теорема Энгеля.

Коммутант алгебраической группы. Разрешимые группы, теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина.

Редуктивные группы, полная приводимость представлений.

Теория инвариантов. Теорема Гильберта об инвариантах. Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы, свойства морфизма факторизации.

Инварианты конечных групп, теорема Шевалле.

Присоединённое представление редуктивной группы, его орбиты и инварианты.

Рациональные инварианты, теорема Розенлихта о разделении орбит инвариантами.

Замкнутые орбиты. Критерии Мацусимы и Кемпфа–Несс, признак Дадок–Каца. Теорема Ричардсона–Биркса. Стабильность действия, критерий Попова.

Нильпотентные орбиты, критерий Гильберта–Мамфорда. Сравнение слоев морфизма факторизации с нуль-конусом, асимптотические конусы.

Классическая теория инвариантов систем тензоров.

Хорошие факторы по действиям редуктивных групп. Полустабильные и стабильные точки проективного действия, фактор Мамфорда.

Объем: 1 год. Осенний семестр будет посвящён в основном алгебраической геометрии и алгебраическим группам.