

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Д. А. ТИМАШЁВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2
1. Представления конечных групп	4
2. Представления симметрической группы	5
2.1. Диаграммы Юнга	5
2.2. Неприводимые представления	6
2.3. Модули Шпехта	9
2.4. Формула крюков	13
2.5. Представления знакопеременной группы	18
3. Представления полной линейной группы	20
3.1. Функторы Шура	20
3.2. Неприводимые представления	22
3.3. Стандартные базисы	24
3.4. Многообразия флагов	26
4. Многочлены Шура	29
4.1. Характеры представлений GL_n	29
4.2. Формулы Пиери	31
4.3. Формула Якоби–Труди	35
4.4. Размерность модулей Вейля	36
5. Правило Литтлвуда–Ричардсона	37
5.1. Косые диаграммы и многочлены Шура	38
5.2. Доказательство комбинаторной леммы	40
5.3. Вывод правила	43
5.4. Другие формулировки	44
6. Представления других классических групп	46
6.1. Специальная линейная группа	46
6.2. Симплектическая группа	47
6.3. Ортогональная группа	49
Приложения	52
1. Группы Ли	52
2. Редуктивные группы	53
3. Представления редуктивных групп	56
4. Инварианты классических групп	59
Литература	62
Ответы и указания к упражнениям	63
Предметный указатель	65
Указатель обозначений	67

ВВЕДЕНИЕ

К классическим группам относятся симметрическая группа (группа подстановок) S_m и её знакопеременная подгруппа (группа чётных подстановок) A_m , полная линейная группа GL_n и её подгруппы: специальная линейная (унимодулярная) группа SL_n , ортогональные группы (полная и специальная) O_n и SO_n , и симплектическая группа Sp_n . Теория представлений классических групп является классическим (это не каламбур!) и чрезвычайно важным разделом алгебры, восходящим к работам А. Клебша, Г. Фробениуса, И. Шура, А. Юнга, Г. Вейля и др., и имеющим многочисленные связи и приложения в комбинаторике, теории групп Ли, теории инвариантов и т.д. Цель настоящих заметок — изложить основные результаты теории представлений классических групп, подчеркнув при этом их связь с общей теорией представлений редутивных алгебраических групп. Основными источниками для нас являются книги Фултона–Харриса [FH] и Фултона [Фу]. Кроме того, весьма полезными будут компактная книга Джеймса [Дж] о представлениях симметрических групп и фундаментальная монография Вейля [Ве], посвящённая классическим матричным группам.

Мы будем развивать теорию представлений классических групп над полем комплексных чисел \mathbb{C} , хотя все результаты справедливы над любым алгебраически замкнутым основным полем характеристики 0, а многие переносятся на незамкнутые поля и в положительную характеристику. (Это связано с тем, что неприводимые представления классических групп часто определены над простым подполем основного поля.)

Опишем вкратце содержание настоящих заметок.

В §1 кратко напоминаются основные факты теории представлений конечных групп в форме, удобной для дальнейшего изложения: описание неприводимых представлений в терминах структуры групповой алгебры. Подчеркнём, что этот параграф носит вспомогательный характер и рассчитан на читателя, уже знакомого с основными понятиями теории представлений из стандартного университетского курса алгебры. Параграф 2 посвящён представлениям симметрической группы. Подход к описанию неприводимых представлений в терминах групповой алгебры применяется в п. 2.2 к построению всех неприводимых представлений S_m . Здесь впервые естественно возникают комбинаторные объекты, играющие важнейшую роль в теории представлений классических групп, — диаграммы и таблицы Юнга. Свойства неприводимых представлений S_m удобнее изучать, реализуя представления не в групповой алгебре, а в алгебре многочленов от m переменных (где S_m действует перестановками переменных). Соответствующие подмодули в алгебре многочленов — модули Шпехта — изучаются в п. 2.3. В частности, строятся стандартные базисы модулей Шпехта, а в п. 2.4 вычисляются их размерности. Переход от симметрической группы к описанию неприводимых представлений знакопеременной группы сравнительно несложен, см. п. 2.5.

В последующих параграфах изучаются представления классических матричных групп. Эти группы являются наиболее естественными и часто встречающимися представителями класса редутивных алгебраических групп (см. приложение 2). Всякая редутивная группа G может быть вложена в полную матричную группу; для классических групп такое вложение заложено в определении. При изучении представлений G разумно ограничиться рассмотрением полиномиальных или рациональных представлений, матричные элементы которых являются

многочленами или рациональными функциями от элементов матриц из G . На самом деле категория рациональных представлений совпадает с категорией всех дифференцируемых представлений G как комплексной группы Ли. Можно доказать (см. приложение 3), что все рациональные представления редуктивных групп вполне приводимы, поэтому основное внимание в настоящих заметках уделяется неприводимым представлениям.

Представления GL_n изучаются в §3. В п. 3.1 описаны функторы Шура — определённые композиции операций симметризации и альтернирования, при помощи которых строятся неприводимые подмодули в пространствах тензоров — модули Вейля. Они тесно связаны с неприводимыми представлениями симметрической группы. Модули Вейля исчерпывают все полиномиальные неприводимые представления GL_n , а рациональные неприводимые представления легко к ним сводятся. В п. 3.3 строится реализация модулей Вейля в алгебре многочленов на пространстве $(n \times n)$ -матриц, аналогичная модулям Шпехта. Она используется для построения стандартных базисов модулей Вейля, с приложениями к алгебраической геометрии многообразий флагов (теория стандартных мономов).

Как и в теории представлений конечных групп, рациональные представления GL_n полностью определяются своими характеристиками, которые можно интерпретировать как симметрические многочлены Лорана от n переменных. Характеристики модулей Вейля называются многочленами Шура. Они давно и широко используются в алгебраической комбинаторике [Ma]. Их изучению посвящён §4. Различные вопросы теории представлений сводятся к чисто комбинаторным задачам про многочлены Шура. Одной из фундаментальных задач теории представлений является разложение на неприводимые слагаемые тензорного произведения двух неприводимых представлений. Правило Литтлвуда–Ричардсона для разложения тензорного произведения двух модулей Вейля является одной из вершин теории представлений GL_n . Оно выведено в §5, а в п. 4.2 разобран его более простой частный случай — формулы Пиери. Эти формулы используются при индуктивном выводе компактной формулы для многочленов Шура (п. 4.3), с помощью которой в п. 4.4 вычисляется размерность модулей Вейля.

Представления других классических матричных групп рассматриваются в §6. Их изучение основано на погружении в представления полной матричной группы. Для каждой из групп построены все неприводимые рациональные представления в виде некоторых подмодулей в модулях Вейля.

В приложениях рассматривается общая теория редуктивных групп и их представлений. Цель здесь состоит не в том, чтобы дать полное и подробное изложение теории, а в том, чтобы предоставить читателю возможность взглянуть на классические группы с более общей точки зрения и естественно “встроить” теорию их представлений в более общий контекст, мотивировав тем самым изучение редуктивных групп и снабдив большим запасом наглядных иллюстраций. Поэтому доказательства часто заменяются примерами, поясняющими ту или иную конструкцию, определение или теорему для случая классических групп. Подчеркнём, что изложение теории представлений классических групп в §§2–6 сделано (по возможности) замкнутым в себе и формально не требует обращения к теории представлений общих редуктивных групп.

Приложение 4, стоящее особняком, содержит фрагмент классической теории инвариантов, необходимый для обоснования построения неприводимых представлений ортогональной и симплектической групп.

Настоящие заметки основаны на материалах семинара “Алгебраические группы и теория инвариантов” на механико-математическом факультете МГУ в весеннем семестре 2006 г. Автор благодарен всем участникам семинара за активную работу и в особенности Х. Нурлигарееву, К. Куюмжиян и Нгуен Бик Ван, чьи доклады послужили основой для отдельных разделов настоящих заметок, а также И. В. Аржанцеву за критическое прочтение первоначального варианта текста и массу полезных замечаний.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Начнём с напоминания основных результатов теории представлений конечных групп, как правило, включаемых в программу университетского курса алгебры, см., например, [Ви, гл. 11].

Пусть G — произвольная конечная группа. Будем рассматривать её конечномерные линейные представления над полем \mathbb{C} . Всякое представление G продолжается до представления *групповой алгебры* $A = \mathbb{C}G$ (состоящей из формальных линейных комбинаций элементов G с операцией умножения, продолженной по линейности с умножения в G). Таким образом, категории представлений G и A эквивалентны.

Из теоремы Машке следует, что групповая алгебра A *полупроста*, т.е. любое представление A вполне приводимо. (Это одно из эквивалентных определений полупростой алгебры; другое состоит в тривиальности нильрадикала [Ви, гл. 11, §3].)

Упражнение 1. Докажите, что в определении полупростой алгебры достаточно потребовать, чтобы левое регулярное представление A на себе самой умножениями слева было вполне приводимым.

Структура полупростых алгебр хорошо известна.

Теорема 1. *Всякая полупростая алгебра изоморфна прямой сумме матричных алгебр: $A = \text{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \text{Mat}_{n_s}(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Рассмотрим полупростую алгебру A как левый A -модуль относительно регулярного представления. (Неприводимые) подмодули A — не что иное, как (минимальные) левые идеалы. Имеет место *изотипное разложение* $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$, где *изотипные компоненты* I_i суть суммы всех неприводимых подмодулей данного типа. Изотипные компоненты уже являются двусторонними идеалами, поскольку операция умножения на элемент A справа перестановочна с операциями левого умножения, т.е. является гомоморфизмом левых A -модулей, а значит, переводит неприводимые подмодули в неприводимые подмодули того же типа (или в 0).

Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением одной изотипной компоненты и считать, что все неприводимые подмодули в A изоморфны фиксированному A -модулю U . Имеем изоморфизм A -модулей $A \simeq U \oplus \cdots \oplus U \simeq U \otimes \mathbb{C}^n$ (где A действует только на левый сомножитель тензорного произведения).

Сопоставив каждому элементу $a \in A$ операцию $x \mapsto xa$, получаем антиизоморфизм $A \xrightarrow{\sim} \text{End}_A A$ (здесь и ниже $\text{End}_A M$ обозначает алгебру эндоморфизмов A -модуля M). В самом деле, каждый эндоморфизм $\varphi \in \text{End}_A A$ однозначно задаётся элементом $a = \varphi(1)$: $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x\varphi(1) = xa$. При этом композиции эндоморфизмов отвечает произведение соответствующих элементов в обратном порядке.

С другой стороны, $\text{End}_A A \simeq \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, где действие $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ на $U \otimes \mathbb{C}^n$ определяется действием на правый сомножитель. В самом деле, действие оператора $\varphi \in \text{End}_A(U \oplus \dots \oplus U)$ на i -е слагаемое U_i задаётся отображениями $U \simeq U_i \rightarrow \varphi(U_i) \rightarrow U_j \simeq U$, где 1-я стрелка — это φ , а 2-я — проекция. По лемме Шура, каждое из таких отображений — гомотетия с коэффициентом λ_{ij} , и φ задаётся матрицей (λ_{ij}) .

Чтобы получить изоморфизм $A \simeq \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, остаётся подвергнуть $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ какому-нибудь антиавтоморфизму (например, транспонированию). \square

Теорема 1 позволяет описать неприводимые подмодули регулярного представления полупростой алгебры A . Если $A = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, то A разлагается в прямую сумму неприводимых подмодулей вида:

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{0} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array} = \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \cdot E_{ii} \simeq \mathbb{C}^n$$

(здесь E_{ij} обозначает матричную единицу с 1 на месте (i, j) и 0 на остальных местах). Всякий неприводимый подмодуль в A получается из указанных автоморфизмами A как левого A -модуля, а значит, имеет вид $A \cdot E_{ii} \cdot g^{-1}$ (при некотором $g \in \text{GL}_n$) $= A(gE_{ii}g^{-1}) = Ae$, где e — проектор ранга 1. С точки зрения алгебраической структуры проекторы ранга 1 в алгебре матриц могут быть охарактеризованы как *неразложимые идемпотенты*, т.е. такие элементы $e \in A$, что $e^2 = e \neq 0$ и e не представим в виде суммы ортогональных идемпотентов: $e = e_1 + e_2$, $e_i^2 = e_i \neq 0$, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Характеризация неприводимых подмодулей регулярного представления как циклических подмодулей, порождённых неразложимыми идемпотентами, уже переносится на любую полупростую алгебру.

В обозначениях теоремы 1 неприводимые подмодули регулярного представления A имеют вид $U_i = \mathbb{C}^{n_i}$ ($i = 1, \dots, s$), где на U_i действует ненулевым образом только i -я матричная подалгебра алгебры A . Поскольку любой неприводимый A -модуль является циклическим, а значит, фактормодулем A , получаем:

Следствие 1. *Все неприводимые представления полупростой алгебры A исчерпываются естественными представлениями в пространствах $U_i = \mathbb{C}^{n_i}$, $i = 1, \dots, s$.*

Заметим, что $n_1^2 + \dots + n_s^2 = \dim A$ и $s = \dim Z(A)$, где $Z(A)$ — центр алгебры A . Если $A = \mathbb{C}G$, то $\dim A = |G|$, а $Z(A)$ состоит из линейных комбинаций элементов G с коэффициентами, постоянными на классах сопряжённости.

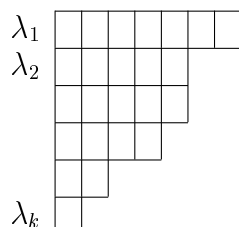
Следствие 2. *Число различных неприводимых представлений группы G равно числу классов сопряженности, а сумма квадратов их размерностей — порядку группы.*

Отметим ещё, что инверсия $g \mapsto g^{-1}$ на группе G продолжается по линейности до инволютивного антиавтоморфизма $a \mapsto a^*$ групповой алгебры A .

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

2.1. Диаграммы Юнга. Применим результаты §1 к описанию неприводимых представлений $G = S_m$. Количество неприводимых представлений равно числу классов сопряжённости, а последние, как известно, задаются цикловой структурой подстановок, т.е. длинами независимых циклов в разложении подстановки.

Упорядочив длины независимых циклов в порядке невозрастания, получаем *разбиение* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = m$. Число k называется *длиной* разбиения, а число $m = |\lambda|$ — его *порядком*. Разбиение принято задавать графически при помощи *диаграммы Юнга* — таблицы, составленной из m квадратных ячеек, сгруппированных в k строчек длин $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, расположенных сверху вниз в порядке невозрастания длин и выровненных по левому краю:



Диаграмму Юнга, отвечающую разбиению λ , будем обозначать тем же символом λ . Её *высота* $ht \lambda$ — это количество строчек, т.е. длина разбиения. Часто для сокращения обозначений в разбиении цепочку повторяющихся чисел заменяют на одно число с указанием степени, равной числу повторений. Например, вышенаписанная диаграмма Юнга кодируется так: $\lambda = (7, 5^2, 4, 2, 1)$.

Зачем понадобилось заменить более простой объект — разбиение числа m — более сложным — диаграммой Юнга? Разумеется, смысл состоит в том, чтобы что-то помещать в клетки диаграммы Юнга. Дадим необходимые определения, которые нам пригодятся в дальнейшем.

Определение 1. *Таблица Юнга формы λ* — это произвольное заполнение диаграммы Юнга λ числами $1, \dots, m$ без повторений.

Таблица Юнга называется *стандартной*, если эти числа возрастают слева направо и сверху вниз.

Пример 1. Таблицы Юнга S и T имеют форму $\lambda = (5, 4^2, 2)$, причём S стандартна, а T — нет:

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 8 & 10 \\ \hline 4 & 5 & 7 & 13 & \\ \hline 6 & 9 & 11 & 15 & \\ \hline 12 & 14 & & & \\ \hline \end{array}, \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 10 & 11 & \\ \hline 8 & 7 & 9 & 14 & \\ \hline 13 & 15 & & & \\ \hline \end{array}.$$

2.2. Неприводимые представления. Мы выяснили, что неприводимые представления S_m параметризуются диаграммами Юнга порядка m . Сделаем это описание более явным. Наша цель — для каждой диаграммы Юнга λ построить соответствующее неприводимое представление S_m и получить таким образом все неприводимые представления симметрической группы с точностью до изоморфизма. Зафиксируем некоторую таблицу Юнга T формы λ и дадим следующие определения:

Определение 2. *Строчным стабилизатором* таблицы T называется подгруппа $P_T \subseteq S_m$, состоящая из подстановок, переставляющих числа внутри строчек таблицы T . Очевидно, $P_T \simeq S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$.

Аналогично определяется *столбцовый стабилизатор* Q_T . Можно также сказать, что $Q_T = P_{T^T}$, где T^T — транспонированная таблица.

Определим теперь следующие элементы групповой алгебры:

$$a_T = \sum_{\pi \in P_T} \pi,$$

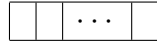
$$b_T = \sum_{\psi \in Q_T} (\text{sgn } \psi)\psi,$$

$$c_T = b_T a_T \text{ — симметризатор Юнга.}$$

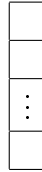
Группа S_m естественным образом действует на таблицах Юнга: подстановка $\sigma \in S_m$ переводит таблицу T в таблицу σT той же формы, заменяя каждое из чисел $t \in T$ ($t = 1, \dots, m$) на $\sigma(t)$. Легко видеть, что при замене T на σT подгруппы P_T, Q_T и элементы a_T, b_T, c_T сопрягаются при помощи σ , поэтому свойства этих объектов не меняются. Допуская вольность обозначений, мы будем иногда использовать индекс λ вместо T .

Теорема 2. Симметризаторы Юнга c_λ пропорциональны неразложимым идемпотентам групповой алгебры A . Циклические модули $U(\lambda) = A c_\lambda$ составляют полный набор различных неприводимых представлений S_m .

Пример 2. Разбиению $\lambda = (m)$ отвечают $P_\lambda = S_m$, $Q_\lambda = \{e\}$, $b_\lambda = e$, $a_\lambda = c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_m} \sigma$, и $U(\lambda) = \mathbb{C}c_\lambda$ — тривиальное одномерное представление S_m .



Пример 3. Разбиению $\lambda = (1^m)$ отвечают $P_\lambda = \{e\}$, $Q_\lambda = S_m$, $a_\lambda = e$, $b_\lambda = c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_m} (\text{sgn } \sigma)\sigma$, и $U(\lambda) = \mathbb{C}c_\lambda$ — знаковое одномерное представление S_m .



Доказательство теоремы 2 основано на серии лемм.

Лемма 1. Подстановка $\sigma \in S_m$ допускает разложение $\sigma = \psi\pi$, $\psi \in Q_\lambda$, $\pi \in P_\lambda$, тогда и только тогда, когда не существует пары чисел i, j , лежащих в одном столбце таблицы T (по которой определяются P_λ, Q_λ) и в одной строке таблицы $T' = \sigma T$. Это разложение единственно.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: если $\sigma = \psi\pi$, то действуя на T сперва π , а затем ψ , не загнать числа из одного столбца в одну строку.

Напротив, если T, T' удовлетворяют условию леммы, то действуя на T столбцовым стабилизатором Q_T , можно постепенно загнать все числа в те же строчки, в которых они находятся в T' : сперва, переставляя числа в столбцах T , загоняем в 1-ю строку все числа, которые находятся в 1-й строке T' (это возможно, поскольку все они находятся в разных столбцах T), затем то же делаем со 2-й строкой и т.д. Значит, найдутся $\psi \in Q_T$, $\pi' \in P_{T'}$ такие, что $\psi T = \pi' T' = \sigma \pi T$, где $\pi = \sigma^{-1} \pi' \sigma \in P_T$. Отсюда $\sigma = \psi \pi^{-1} \in Q_\lambda P_\lambda$.

Единственность разложения следует из того, что $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{e\}$. □

Лемма 2. $c = c_\lambda$ — единственный с точностью до пропорциональности элемент $c \in A$, для которого $\psi c \pi = (\text{sgn } \psi)c$, $\forall \pi \in P_\lambda, \psi \in Q_\lambda$.

Доказательство. То, что c_λ обладает этим свойством, следует из того, что a_λ не меняется при умножении на $\pi \in P_\lambda$, а b_λ при умножении на $\psi \in Q_\lambda$ умножается на $\text{sgn } \psi$.

Предположим теперь, что элемент

$$c = \sum_{\sigma \in S_m} z_\sigma \sigma \in A \quad (z_\sigma \in \mathbb{C})$$

обладает указанным свойством. Тогда $z_{\psi\sigma\pi} = z_\sigma \cdot \text{sgn } \psi$ ($\forall \pi \in P_\lambda, \psi \in Q_\lambda$) и

$$c = \sum_{\sigma = \psi\pi \in Q_\lambda P_\lambda} z_e(\text{sgn } \psi)\sigma + \sum_{\sigma \notin Q_\lambda P_\lambda} z_\sigma \sigma.$$

Первая сумма в правой части равна $z_e c_\lambda$. Пусть $\sigma \notin Q_\lambda P_\lambda$. Пользуясь леммой 1, найдём числа i, j в одном столбце T и одной строке $T' = \sigma T$. Тогда $\tau = (i, j) \in Q_T \cap P_{T'}$, $\tau' = \sigma^{-1}\tau\sigma \in P_T$, $\tau\sigma\tau' = \sigma \implies z_\sigma = z_{\tau\sigma\tau'} = -z_\sigma = 0$. \square

Лемма 3. $c_\lambda A c_\lambda = \mathbb{C} c_\lambda$ и $c_\lambda^2 = q_\lambda c_\lambda$, $q_\lambda \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Включение $c_\lambda A c_\lambda \subseteq \mathbb{C} c_\lambda$ сразу следует из леммы 2. Теперь понятно, что $c_\lambda^2 = q_\lambda c_\lambda$, $q_\lambda \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим оператор $x \mapsto x c_\lambda$ на A . Поскольку $\sigma c_\lambda = \dots + \sigma + \dots$, $\forall \sigma \in S_m$, имеем $\text{tr}(x \mapsto x c_\lambda) = m!$. С другой стороны, в базисе, согласованном с $U(\lambda)$, этот оператор имеет матрицу

q_λ	\dots	0	$*$
0	\dots	q_λ	
0	0		

Поэтому $\text{tr}(x \mapsto x c_\lambda) = q_\lambda \cdot \dim U(\lambda)$, откуда $q_\lambda = m! / \dim U(\lambda)$. \square

Замечание. Коэффициент q_λ имеет интересную комбинаторную интерпретацию: он равен произведению длин всех крюков диаграммы λ , см. п. 2.4.

Теперь посмотрим, как взаимодействуют симметризаторы Юнга, отвечающие разным диаграммам. На диаграммах Юнга, если их отождествлять с разбиениями, имеется естественный лексикографический порядок “ \succ ”: сравниваем длины строк в диаграммах λ, μ , начиная с первой, до 1-го различия на некотором номере p , и считаем $\lambda \succ \mu$, если $\lambda_p > \mu_p$.

Лемма 4. Если $\lambda \succ \mu$, то $a_\lambda b_\mu = b_\mu a_\lambda = 0$.

Доказательство. Пусть a_λ, b_μ задаются таблицами T, T' , соответственно. Тогда можно найти пару чисел i, j в одной строке T и в одном столбце T' . В самом деле, в противном случае действием $Q_{T'}$ на T' можно было бы загнать все числа из 1-й строки T в 1-ю строку T' , затем из 2-й строки T во 2-ю строку T' , и т.д. Но тогда строки T' были бы не короче строк T — противоречие.

Теперь рассмотрим транспозицию $\tau = (i, j) \in P_\lambda \cap Q_\mu$ и заметим, что $a_\lambda b_\mu = (a_\lambda \tau) b_\mu = a_\lambda (\tau b_\mu) = -a_\lambda b_\mu = 0$, аналогично с $b_\mu a_\lambda$. \square

Лемма 5. Если $\lambda \neq \mu$, то $c_\lambda A c_\mu = 0$.

Доказательство. Если $\lambda \succ \mu$, то имеют место импликации:

$$c_\lambda A c_\mu = b_\lambda a_\lambda A b_\mu a_\mu = 0 \iff a_\lambda A b_\mu = 0 \iff a_\lambda \sigma b_\mu = 0 \ (\forall \sigma \in S_m) \iff a_\lambda b'_\mu = 0,$$

где $b'_\mu = \sigma b_\mu \sigma^{-1}$. Последнее произведение обращается в 0 по лемме 4. Если же $\lambda \prec \mu$, то

$$c_\lambda A c_\mu = 0 \iff b_\lambda A a_\mu = 0,$$

что также верно по лемме 4. \square

Доказательство теоремы 2. Убедимся, что $e_\lambda = c_\lambda/q_\lambda$ — неразложимый идемпотент. В самом деле, если бы он был разложен в сумму ортогональных идемпотентов $e_\lambda = e_1 + e_2$, то мы бы имели $e_\lambda e_i e_\lambda = e_i \in c_\lambda A c_\lambda$, в то время как $c_\lambda A c_\lambda = \mathbb{C}e_\lambda$ по лемме 3. Поэтому модули $U(\lambda)$ неприводимы.

С другой стороны, A по-разному действует на $U(\lambda)$ и $U(\mu)$ при $\lambda \neq \mu$. В самом деле, $c_\lambda U(\lambda) = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0 = c_\lambda U(\mu)$ по леммам 3, 5. Поэтому модули $U(\lambda)$ попарно не изоморфны при разных λ и исчерпывают все неприводимые S_m -модули, так как их количество равно числу классов сопряжённости в S_m . \square

Замечание. Всю предшествующую теорию можно развить, используя вместо c_λ элементы $c_\lambda^* = a_\lambda b_\lambda$ (нужно только в некоторых рассуждениях поменять порядок сомножителей). Получаем другой полный набор неприводимых модулей $A c_\lambda^*$. Однако можно показать, что $A c_\lambda^* \simeq A c_\lambda$. Для этого рассмотрим циклические модули $A a_\lambda$ и $A b_\lambda$. Имеем следующую диаграмму гомоморфизмов A -модулей:

$$\begin{array}{ccc} A a_\lambda & \xrightarrow{\cdot b_\lambda} & A c_\lambda^* \\ \cup & & \cap \\ A c_\lambda & \xleftarrow{\cdot a_\lambda} & A b_\lambda \end{array}$$

Сквозное отображение $A c_\lambda \rightarrow A c_\lambda^* \rightarrow A c_\lambda$ есть просто гомотетия с коэффициентом q_λ , откуда и следует изоморфизм.

S_m -модуль $A a_\lambda$ устроен довольно просто — он является *транзитивно пермутационным*, т.е. S_m транзитивно переставляет элементы его базиса. Транзитивно пермутационный модуль конечной группы G определяется стабилизатором H базисного вектора и изоморфен $\mathbb{C}[G/H]$ — пространству формальных линейных комбинаций левых смежных классов G по H с действием G левыми сдвигами. В частности, $A a_\lambda \simeq \mathbb{C}[S_m/P_\lambda]$. В другой терминологии [ФН, §3.3], $A a_\lambda$ индуцирован с тривиального представления группы P_λ .

Аналогично, $A b_\lambda \simeq \mathbb{C}[S_m/Q_\lambda] \otimes \text{sgn}$ индуцирован со знакового представления группы Q_λ .

Каждый из модулей $A a_\lambda, A b_\lambda$ содержит единственную неприводимую компоненту, изоморфную $U(\lambda)$. Остальные компоненты определяются *правилом Юнга* [ФН, §4.3], [Фу, §§7.3–7.4].

Упражнение 2. Какой диаграмме Юнга соответствует неприводимое представление S_m в пространстве $U = \{x \in \mathbb{C}^m \mid x_1 + \dots + x_m = 0\}$ перестановками координат?

Упражнение 3. Обобщая примеры 2–3, докажите, что транспонированной диаграмме Юнга соответствует неприводимое представление $U(\lambda^\top) \simeq U(\lambda) \otimes \text{sgn}$.

2.3. Модули Шпехта. Хотя мы и построили все неприводимые представления S_m , хотелось бы иметь их более наглядную реализацию в пространствах, более привычных, чем групповая алгебра. Мы построим реализацию всех неприводимых представлений S_m в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$.

Фиксируем таблицу Юнга T порядка m и обозначим через t_{ij} число, стоящее в (i, j) -й клетке, считая вниз/вправо от верхнего левого угла. Введём следующие

обозначения:

$$x_T = \prod_{i,j} x_{t_{ij}}^{i-1},$$

$$\Delta_T = b_T x_T = \sum_{\psi \in Q_T} (\text{sgn } \psi) \prod_{i,j} x_{\psi(t_{ij})}^{i-1}.$$

Легко видеть, что

$$\Delta_T = \Delta_{T^{(1)}} \cdots \Delta_{T^{(l)}},$$

где $\Delta_{T^{(j)}}$ — определитель Вандермонда, построенный по переменным в j -м столбце $T^{(j)}$ таблицы T , а l — длина 1-й строки.

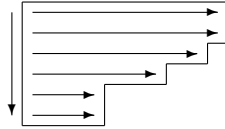
Ясно, что $\langle x_T \mid T \text{ формы } \lambda \rangle_{\mathbb{C}}$ — транзитивно пермутационный подмодуль в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$, изоморфный Aa_λ . Следовательно,

$$S(\lambda) := \langle \Delta_T \mid T \text{ формы } \lambda \rangle_{\mathbb{C}} \simeq U(\lambda)$$

— неприводимый модуль, называемый *модулем Шпехта*. Чисто комбинаторное определение модулей Шпехта (впрочем, эквивалентное данному) можно найти в [Фу, §7.2], [Дж, §4].

Модули Шпехта являются удобной моделью неприводимых представлений симметрической группы. Например, в них можно построить стандартный базис, в котором элементы группы представляются целочисленными матрицами. Докажем вначале несколько лемм.

Введём на таблицах одной формы λ обратный лексикографический порядок “ \succ ” следующим образом: сравниваем числа в таблицах T, T' по строкам слева направо и сверху вниз (как на следующем рисунке) до 1-го различия в некоторой позиции (p, q) , и считаем $T \succ T'$, если $t_{pq} < t'_{pq}$.



Лемма 6. Если $T \succ T'$ — две стандартные таблицы формы λ , то $a_T b_{T'} = b_{T'} a_T = 0$.

Доказательство. Аналогично лемме 4, достаточно найти пару чисел i, j в одной строке T и в одном столбце T' . Пусть первое различие между T и T' происходит в позиции (p, q) , т.е. таблицы совпадают в строках выше p -й и в p -й левее q -го элемента, а $j = t_{pq} < t'_{pq}$. Тогда в T' число j стоит левее q -го столбца и ниже p -й строки, а значит, в одном столбце с неким числом i из p -й строки таблицы T . \square

Следствие 1. $c_T c_{T'} = c_{T'}^* c_T^* = 0$.

Следствие 2. $c_T \Delta_{T'} = 0, c_T \Delta_T = q_\lambda \Delta_T$.

Чтобы описать линейные зависимости между порождающими элементами Δ_T модуля Шпехта, воспользуемся одной леммой из линейной алгебры. Обозначим через $\det(v_1, \dots, v_k)$ определитель, составленный из векторов $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^k$, записанных по столбцам.

Лемма Сильвестра. *Фиксируем $p \leq k$. Имеет место тождество:*

$$\det(v_1, \dots, v_k) \cdot \det(w_1, \dots, w_k) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det(v_1, \dots, w_1, \dots, w_p, \dots, v_k) \cdot \det(v_{i_1}, \dots, v_{i_p}, w_{p+1}, \dots, w_k)$$

(определители в правой части получаются из определителей в левой части обменом первых p столбцов 2-го определителя с какими-нибудь p столбцами 1-го определителя, с сохранением порядка столбцов).

Доказательство. По соображениям непрерывности, достаточно проверить равенство при линейно независимых v_1, \dots, v_k . Заменяя координаты, можно считать, что v_1, \dots, v_k совпадают со стандартным базисом e_1, \dots, e_k пространства \mathbb{C}^k . Тогда равенство приобретает вид:

$$\det(w_1, \dots, w_k) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_q}} \det_{i_1 \dots i_p}(w_1, \dots, w_p) \cdot \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ i_1 & \dots & i_p & j_1 & \dots & j_q \end{pmatrix} \det_{j_1 \dots j_q}(w_{p+1}, \dots, w_k),$$

где $\{i_1, \dots, i_p \mid j_1, \dots, j_q\}$ — разбиение $\{1, \dots, k\}$ на 2 непересекающихся подмножества, а $\det_{k_1, \dots, k_r}(u_1, \dots, u_r)$ — минор матрицы со столбцами $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}^k$, натянутый на строки k_1, \dots, k_r .

Последнее равенство, известное как *теорема Лапласа*, вытекает из

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = (w_1 \wedge \dots \wedge w_p) \wedge (w_{p+1} \wedge \dots \wedge w_k),$$

если в правой части разложить оба сомножителя по стандартному базису $\bigwedge^{\bullet} \mathbb{C}^k$ и раскрыть скобки. □

Лемма 7. *Имеют место так называемые соотношения выпрямления: $\Delta_T = \sum_{T'} \Delta_{T'}$, где суммирование ведётся по всем таблицам T' , получаемым из T обменом каких-нибудь p чисел из q -го столбца с первыми p числами из $(q+1)$ -го столбца, сохраняя порядок следования чисел по вертикали (в каждом соотношении выпрямления p, q фиксированы).*

Доказательство. Поскольку множители $\Delta_{T(j)}$, отвечающие столбцам с $j \neq q, q+1$, просто выносятся из левой и правой части, можно считать, что λ имеет всего два столбца:

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline y_1 & z_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & z_l \\ \hline \vdots & \\ \hline y_k & \\ \hline \end{array}$$

Здесь в таблице T вместо чисел $i = 1, \dots, m$ записаны переменные x_i , переобозначенные для удобства как $y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l$. Теперь запишем

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ y_1 & \dots & y_k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{k-1} & \dots & y_k^{k-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & & \\ z_1 & \dots & z_l & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{l-1} & \dots & z_l^{l-1} & & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \\ z_1^{k-1} & \dots & z_l^{k-1} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

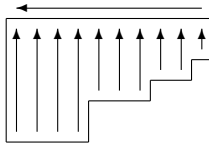
и применим лемму Сильвестра. \square

Замечание. В лемме Сильвестра вместо первых p столбцов во 2-м определителе из левой части можно брать любые фиксированные p столбцов (пользуясь кососимметричностью определителей, их всё равно можно переставить на первые p мест). То же относится и к соотношениям выпрямления.

Теорема 3. *Элементы Δ_T , где T стандартна формы λ , образуют базис $S(\lambda)$.*

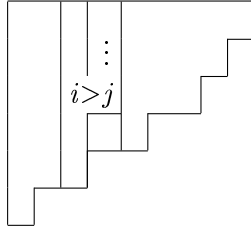
Доказательство. Опишем алгоритм выпрямления, выражающий любой Δ_T через стандартные.

Изменим обратный лексикографический порядок “ \succ ” на таблицах формы λ , сравнивая теперь числа по колонкам снизу вверх и справа налево:



Например, $T \succ T_{\downarrow}$, где T_{\downarrow} получается из T упорядочиванием столбцов в порядке возрастания сверху вниз.

Поскольку $\Delta_T = \pm \Delta_{T_{\downarrow}}$, можно считать, что числа в столбцах T возрастают. Пусть T не стандартна. Тогда в ней найдётся пара чисел $i = t_{p,q} > t_{p,q+1} = j$:



Легко видеть, что $T' \prec T$ для любой таблицы T' , получаемой из T обменом каких-нибудь p чисел из q -го столбца с первыми p числами из $(q+1)$ -го столбца. По лемме 7 Δ_T выражается через $\Delta_{T'}$ с $T' \prec T$. Так, постепенно уменьшая таблицы, можно выразить Δ_T через стандартные.

Теперь докажем, что стандартные Δ_T линейно независимы. Для этого вернёмся к прежнему обратному лексикографическому порядку на таблицах. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\sum_{T \text{ станд.}} z_T \Delta_T = z_0 \Delta_{T_0} + \sum_{T_i \prec T_0} z_i \Delta_{T_i} = 0.$$

Действуя c_{T_0} , по следствию 2 леммы 6 получаем $z_0 q_{\lambda} \Delta_{T_0} = 0 \implies z_0 = 0$, и так постепенно проверяем, что все $z_i = 0$. \square

Замечание. Из доказательства теоремы 3 следуют целочисленность матриц представления S_m в стандартном базисе и способ их вычисления.

Пример 4. Выпрямим элемент $\sigma \Delta_T \in S(2^3)$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

Для сокращения обозначений будем писать вместо Δ_T саму таблицу T . Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma T &= \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} = - \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} \right) = \\ &= - \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 6 \\ \hline \end{array} \right) + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 6 \\ \hline \end{array} \right) - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} = \\ &= - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

Упражнение 4. Выразите через стандартный базис элемент Δ_T , отвечающий таблице

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l & \dots & 2 & 1 \\ \hline l+1 & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline m & & & \\ \hline \end{array}$$

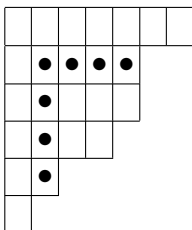
Упражнение 5 (Правило ветвления). Докажите, что ограничение представления S_m в $S(\lambda)$ на подгруппу S_{m-1} (стабилизатор m) изоморфно $\bigoplus_{\lambda'} S(\lambda')$, где диаграмма Юнга λ' получается из λ удалением одной клетки.

Упражнение 6. Докажите, что неприводимое представление S_m однозначно определяется своим ограничением на S_{m-1} при $m > 2$. Приведите контрпример для приводимого представления.

Упражнение 7. Докажите, что $\bigwedge^k U(m-1, 1) \simeq U(m-k, 1^k)$.

2.4. Формула крюков. Хотя теорема 3 и даёт нам в принципе размерность каждого неприводимого представления S_m , практически пользоваться ей для вычисления размерности неудобно, так как приходится подсчитывать количество стандартных таблиц данной формы. Чтобы получить явную формулу для размерности, проведём следующий мысленный эксперимент. Возьмём наугад произвольную таблицу формы λ . Какова вероятность того, что она окажется стандартной?

Определение 3. *Крюком* диаграммы λ с вершиной в клетке (i, j) называется множество клеток диаграммы, идущих в i -й строке вправо или в j -м столбце вниз, начиная с (i, j) до края диаграммы. *Длина крюка* h_{ij} — это число клеток крюка.



Чтобы таблица была стандартной, необходимо и достаточно, чтобы число, стоящее в вершине каждого крюка, было наименьшим из чисел в этом крюке. Вероятность того, что наименьшее из чисел в данном крюке попадёт в его

вершину, равна $1/h_{ij}$. Если бы все эти вероятности были независимы, то вероятность выбора стандартной таблицы была бы равна $1/\prod_{i,j} h_{ij}$. Таким образом, мы приходим к следующей формуле крюков:

Теорема 4. $\dim U(\lambda) = m!/\prod_{i,j} h_{ij}$.

Следствие. $q_\lambda = \prod_{i,j} h_{ij}$.

Пример 5. Для диаграммы порядка $m = 24$, иллюстрирующей определение 3, укажем длины крюков на следующем рисунке:

12	10	8	7	5	2	1
9	7	5	4	2		
8	6	4	3	1		
6	4	2	1			
3	1					
1						

Получаем $\dim U(\lambda) = 44\,172\,388\,260$.

Замечание. Иногда бывает удобно переписать произведение длин крюков в следующем виде. Для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ обозначим $\ell_i = \lambda_i + k - i$; тогда $\ell_1 > \dots > \ell_k$. Имеет место формула:

$$\prod_{i,j} h_{ij} = \frac{\ell_1! \cdots \ell_k!}{\prod_{p < q} (\ell_p - \ell_q)}$$

Для доказательства заметим прежде всего, что правая часть не изменится, если мы продолжим λ , добавив несколько нулевых членов. В самом деле, если $\lambda_k = 0$, то правая часть равна

$$\frac{\ell_1! \cdots \ell_{k-1}!}{\prod_{p < q < k} (\ell_p - \ell_q) \cdot \prod_{p < k} \ell_p} = \frac{(\ell_1 - 1)! \cdots (\ell_{k-1} - 1)!}{\prod_{p < q < k} ((\ell_p - 1) - (\ell_q - 1))}$$

Теперь заметим, что длины крюков с вершинами в 1-м столбце λ равны ℓ_1, \dots, ℓ_k , и если на них поделить, то в правой части останется аналогичное выражение, но уже для диаграммы без 1-го столбца.

К сожалению, эвристическое рассуждение, приведённое перед теоремой 4, не является доказательством, поскольку вероятности того, что в вершинах крюков стоят наименьшие числа, зависимы. Строгое доказательство основано на индукции по m .

Обозначим правую часть формулы крюков через $F(\lambda)$. Достаточно показать, что $F(\lambda)$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и число стандартных таблиц формы λ :

$$F(\lambda) = \sum_{\lambda'} F(\lambda')$$

по всем λ' , получаемым из λ удалением одной клетки.

Приведём два доказательства этой формулы — чисто алгебраическое [Фу, §4.3] и вероятностное [GNW].

Алгебраическое доказательство. Сократив на $(m-1)!/\ell_1! \dots \ell_k!$, приведём наше рекуррентное соотношение к виду

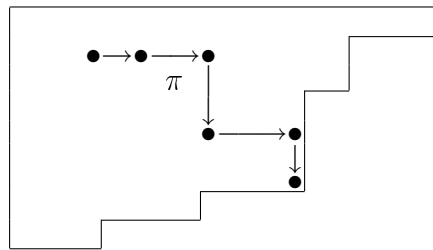
$$m\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) = \sum_{i=1}^k \ell_i \Delta(\ell_1, \dots, \ell_i - 1, \dots, \ell_k), \quad \text{где } \Delta(t_1, \dots, t_k) = \prod_{p < q} (t_p - t_q).$$

Это равенство получается подстановкой $t_i = \ell_i$, $t = -1$ из более общего тождества:

$$\left(t_1 + \dots + t_k + \binom{k}{2} t \right) \Delta(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k t_i \Delta(t_1, \dots, t_i + t, \dots, t_k).$$

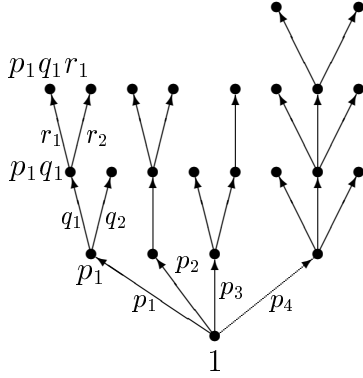
Чтобы доказать тождество, заметим, что его правая часть кососимметрична по t_1, \dots, t_k , а значит, делится на $\Delta(t_1, \dots, t_k)$. В частном будет линейная форма от t_1, \dots, t_k, t . Поэтому достаточно проверить равенство при $t = 0$ (что очевидно) и при каких-нибудь значениях $t \neq 0$ и t_1, \dots, t_k таких, что $\Delta(t_1, \dots, t_k) \neq 0$. Возьмём, например, $t_i = k - i$, $t = -1$; тогда и левая и правая части равны 0. \square

Вероятностное доказательство. Проведём серию следующих испытаний. На первом шаге испытания выберем случайным образом клетку (i_1, j_1) диаграммы λ , предполагая выбор любой клетки равновероятным (с вероятностью $1/m$). На следующем шаге выберем случайным образом любую клетку (i_2, j_2) крюка с вершиной в клетке (i_1, j_1) , кроме самой вершины, считая выбор любой клетки равновероятным (с вероятностью $1/(h_{i_1 j_1} - 1)$). Продолжим испытание в том же духе, пока возможно, т.е. пока не дойдём до угловой вершины. Получаем некий путь $\pi : (i_1, j_1) \rightarrow (i_2, j_2) \rightarrow \dots \rightarrow (i_N, j_N)$. Вероятность выбора пути π равна $P(\pi) = 1/m \cdot \prod_{p < N} 1/(h_{i_p j_p} - 1)$.



С формально-математической точки зрения ситуация описывается вероятностным пространством [Гн, §6], элементарными событиями которого являются всевозможные пути π с вероятностями $P(\pi)$. Следующее рассуждение, в частности, обосновывает корректность этой вероятностной модели (и более общих моделей ветвящихся вероятностных процессов, основанных на последовательном выборе вариантов).

Все варианты выбора путей можно закодировать при помощи некоторого дерева. Из корневой вершины ведёт несколько ребёр в вершины 1-го уровня, отвечающие различным вариантам выбора 1-й клетки в пути. Из каждой вершины 1-го уровня ведут рёбра в вершины 2-го уровня, отвечающие различным вариантам выбора 2-й клетки, и т.д.



$$\sum_i p_i = \sum_j q_j = \sum_k r_k = \dots = 1$$

Аналогичное дерево вариантов описывает любой ветвящийся процесс. Предположим, что каждому ребру дерева приписан некоторый вес так, что сумма весов рёбер, исходящих из данной вершины в вершины следующего уровня, всегда равна 1. Эти веса интерпретируются как вероятности выбора вариантов на очередном шаге процесса. (В нашем случае припишем рёбрам, исходящим из корня, вес $1/m$, а исходящим из вершины, отвечающей выбору точки (i_p, j_p) , — вес $1/(h_{i_p j_p} - 1)$.)

Припишем каждой вершине вес, равный произведению весов рёбер вдоль пути, ведущей в данную вершину из корня дерева (корневая вершина имеет вес 1). Этот вес интерпретируется как вероятность последовательного выбора определённых вариантов на нескольких начальных шагах процесса, ведущих к ситуации, характеризуемой данной вершиной.

Лемма 8. *Вес вершины равен сумме весов концевых вершин, в которые можно попасть из данной вершины, двигаясь вверх по рёбрам. В частности, сумма весов всех концевых вершин (отвечающих элементарным событиям вероятностного пространства) равна 1.*

Лемму легко доказать индукцией по уровню данной вершины.

Для каждого пути $\pi : (i_1, j_1) \rightarrow \dots \rightarrow (i_N, j_N)$ рассмотрим его *вертикальную проекцию* $I = \{i_1, \dots, i_N\}$ и *горизонтальную проекцию* $J = \{j_1, \dots, j_N\}$ (так что $|I| + |J| = N + 1$). Обозначим через $P(I, J)$ (условную) вероятность того, что путь имеет проекции I, J , при условии, что испытание начинается в клетке (i_1, j_1) , т.е.

$$P(I, J) := \sum_{\substack{\pi: (i_1, j_1) \rightarrow \dots \rightarrow (i_N, j_N) \\ \{i_1, \dots, i_N\} = I \\ \{j_1, \dots, j_N\} = J}} P(\pi) \cdot m.$$

Лемма 9.

$$P(I, J) = \prod_{i \in I \setminus \{i_N\}} \frac{1}{h_{i j_N} - 1} \prod_{j \in J \setminus \{j_N\}} \frac{1}{h_{i_N j} - 1}.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности [Гн, §7]

$$P(I, J) = \frac{1}{h_{i_1 j_1} - 1} \left(P(I \setminus \{i_1\}, J) + P(I, J \setminus \{j_1\}) \right).$$

Рассуждая по индукции, получаем, что правая часть равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{i_1 j_1} - 1} \left(\prod_{i \in I \setminus \{i_1, i_N\}} \frac{1}{h_{i j_N} - 1} \prod_{j \in J \setminus \{j_N\}} \frac{1}{h_{i_N j} - 1} + \prod_{i \in I \setminus \{i_N\}} \frac{1}{h_{i j_N} - 1} \prod_{j \in J \setminus \{j_1, j_N\}} \frac{1}{h_{i_N j} - 1} \right) \\ &= \frac{h_{i_1 j_N} - 1 + h_{i_N j_1} - 1}{h_{i_1 j_1} - 1} \prod_{i \in I \setminus \{i_N\}} \frac{1}{h_{i j_N} - 1} \prod_{j \in J \setminus \{j_N\}} \frac{1}{h_{i_N j} - 1} = \\ &= \prod_{i \in I \setminus \{i_N\}} \frac{1}{h_{i j_N} - 1} \prod_{j \in J \setminus \{j_N\}} \frac{1}{h_{i_N j} - 1}. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть диаграмма λ' получается из λ удалением угловой клетки (\hat{i}, \hat{j}) . Обозначим через $P(\lambda')$ вероятность того, что испытание закончится в клетке (\hat{i}, \hat{j}) , т.е.

$$P(\lambda') := \sum_{\pi: \cdots \rightarrow (\hat{i}, \hat{j})} P(\pi).$$

Нужное нам рекуррентное соотношение вытекает из следующей леммы и формулы полной вероятности.

Лемма 10. $P(\lambda') = F(\lambda')/F(\lambda)$.

Доказательство. По формуле полной вероятности и лемме 9

$$\begin{aligned} P(\lambda') &= \frac{1}{m} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, \hat{i}\} \\ J \subseteq \{1, \dots, \hat{j}\}}} P(I, J) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_s < \hat{i} \\ j_1 < \dots < j_t < \hat{j}}} \prod_{p \leq s} \frac{1}{h_{i_p j} - 1} \prod_{q \leq t} \frac{1}{h_{i j_q} - 1} = \\ &= \frac{1}{m} \prod_{i < \hat{i}} \left(1 + \frac{1}{h_{i j} - 1} \right) \prod_{j < \hat{j}} \left(1 + \frac{1}{h_{i j} - 1} \right) = \frac{1}{m} \prod_{i < \hat{i}} \frac{h_{i j}}{h_{i j} - 1} \prod_{j < \hat{j}} \frac{h_{i j}}{h_{i j} - 1} = \\ &= F(\lambda')/F(\lambda). \quad \square \end{aligned}$$

Дополнение. Видоизменим наше испытание, продолжив его следующим образом. После выбора пути $\pi : (i_1, j_1) \rightarrow \dots \rightarrow (i_N, j_N)$ запишем в угловую клетку (i_N, j_N) число m и удалим её из диаграммы λ . В оставшейся диаграмме λ' продолжим случайный выбор клеток так, как это делали для λ . Получим путь π' . В его угловой клетке запишем $m - 1$, удалим её из λ' , и т.д. В результате испытания получим последовательность путей $\pi, \pi', \dots, \pi^{(m-1)}$ в диаграммах $\lambda, \lambda', \dots, \lambda^{(m-1)}$ порядков $m, m - 1, \dots, 1$ с вероятностью $P(\pi)P(\pi') \dots P(\pi^{(m-1)})$, а последовательное заполнение клеток исходной диаграммы λ числами $m, m - 1, \dots, 1$ даст стандартную таблицу T формы λ .

Любая стандартная таблица формы λ может быть получена таким образом с вероятностью $P(T) = P(\lambda') \dots P(\lambda^{(m-1)})$, где диаграммы $\lambda', \dots, \lambda^{(m-1)}$ получаются последовательным удалением из λ клеток с $t_{ij} = m, \dots, 2$. Из леммы 10 индукцией по m получаем $P(T) = P(\lambda')P(T') = P(\lambda')/F(\lambda') = 1/F(\lambda)$ (здесь $T' = T \setminus \{m\}$). Таким образом, мы получили способ равновероятного выбора случайной стандартной таблицы формы λ с вероятностью $1/F(\lambda)$ (что, в частности, ещё раз доказывает формулу крюков). \square

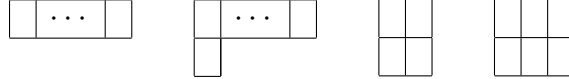
Замечание. Наивный способ выбора случайной стандартной таблицы формы λ , при котором m пишется в одну из угловых клеток λ с равной вероятностью, затем $m - 1$ пишется в одну из угловых клеток оставшейся диаграммы λ' с

равной вероятностью и т.д., не является равновероятным. Например, при $\lambda = (m - 1, 1)$ таблица

1	⋯	m
i	↑	
	без i	

выбирается с вероятностью $1/2^{m+1-i}$ (если $2 < i \leq m$) или $1/2^{m-2}$ (если $i = 2$).

Упражнение 8. Докажите, что $\dim U(\lambda) < |\lambda|$ тогда и только тогда, когда λ или λ^\top имеет вид:



2.5. Представления знакопеременной группы. Имея в распоряжении уже разработанную теорию представлений S_m , мы опишем неприводимые представления группы A_m .

Прежде всего отметим, что A_m — подгруппа индекса 2 в $S_m = A_m \sqcup \tau A_m$, где $\tau \in S_m$ — фиксированная транспозиция.

Всякий неприводимый A_m -модуль U вкладывается в некоторый неприводимый S_m -модуль W : достаточно вложить U в $\mathbb{C}A_m \subset \mathbb{C}S_m$ и спроектировать (ненулевым образом) в одну из неприводимых компонент регулярного представления S_m . Очевидно, что $\tau U \subseteq W$ — тоже неприводимый A_m -подмодуль и $W = U + \tau U$, поскольку в правой части равенства стоит ненулевое S_m -инвариантное подпространство. Обратно, любой неприводимый S_m -модуль разлагается в сумму не более двух неприводимых A_m -подмодулей, переставляемых действием τ .

Лемма 11. *Возможно одно из двух:*

- $W \not\cong W \otimes \text{sgn} \implies W = U = \tau U$;
- $W \cong W \otimes \text{sgn} \implies W = U \oplus \tau U, U \not\cong \tau U$.

Доказательство. Предположим, что S_m -модули W и $W \otimes \text{sgn}$ изоморфны. Изоморфизм можно рассматривать как линейное преобразование $\psi \in \text{GL}(W)$, подкручивающее действие S_m на sgn , т.е. $\psi(\sigma w) = (\text{sgn } \sigma)\sigma\psi(w), \forall \sigma \in S_m, w \in W$.

Пространство W распадается в прямую сумму собственных подпространств относительно τ с собственными значениями ± 1 (поскольку $\tau^2 = e$). Оператор ψ обязан их переставлять и, следовательно, не является скалярным. По лемме Шура, представление A_m в W приводимо, а значит, $U \neq \tau U$.

Обратно, если $W = U \oplus \tau U$, то оператор $\psi = E \oplus (-E)$ подкручивает действие S_m на sgn , а значит, осуществляет изоморфизм $W \xrightarrow{\sim} W \otimes \text{sgn}$. Остаётся доказать, что в этом случае $U \not\cong \tau U$.

Предположим противное. Изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \tau U$ имеет вид $u \mapsto \tau\varphi(u), \forall u \in U$, где $\varphi \in \text{GL}(U)$ подкручивает действие A_m на τ : $\varphi(\sigma u) = (\tau^{-1}\sigma\tau)\varphi(u), \forall \sigma \in A_m$. При этом φ^2 коммутирует с действием A_m , а значит, скалярен по лемме Шура. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi^2 = E$. Непосредственная проверка показывает, что в этом случае подпространство $\{(u, \tau\varphi(u)) \mid u \in U\} \subset W$ инвариантно относительно A_m и τ , т.е. относительно S_m — противоречие. \square

Ответ на вопрос, какая из двух возможностей в лемме 11 выполняется для данного неприводимого S_m -модуля $W = U(\lambda)$, даёт упражнение 3, согласно которому $U(\lambda) \otimes \text{sgn} \cong U(\lambda^\top)$. Следовательно, при $\lambda \neq \lambda^\top$ представления A_m в $U(\lambda)$ и $U(\lambda^\top)$ изоморфны и неприводимы.

При $\lambda = \lambda^\top$ представление A_m в $U(\lambda)$ распадается на две неизоморфных неприводимых компоненты. Доказательство леммы 11 фактически содержит способ построения неприводимых A_m -подмодулей в $U(\lambda)$. А именно, существует единственный (с точностью до знака) линейный оператор ψ на $U(\lambda)$, подкручивающий действие S_m на sgn , для которого $\psi^2 = E$.

Упражнение 9. Постройте этот оператор.

Его собственные подпространства $U_+(\lambda), U_-(\lambda) \subset U(\lambda)$ (с собственными значениями ± 1) A_m -инвариантны, а значит, они и будут искомыми неприводимыми A_m -подмодулями.

Итоги подводит

Теорема 5. *Неприводимые представления A_m реализуются в пространствах $U(\lambda)$ при $\lambda \neq \lambda^\top$ и $U_\pm(\lambda)$ при $\lambda = \lambda^\top$ (по всем диаграммам Юнга λ порядка m). Перечисленные представления попарно неизоморфны, за исключением случаев $U(\lambda) \simeq U(\lambda^\top)$.*

Доказательство. То, что перечисленные представления исчерпывают все неприводимые представления A_m , вытекает из вышесказанного. Осталось доказать, что они попарно неизоморфны. Достаточно показать, что по любому неприводимому A_m -модулю U содержащий его неприводимый S_m -модуль W восстанавливается однозначно с точностью до подкрутки на $\otimes \text{sgn}$.

Заметим, что τU однозначно восстанавливается по U как A_m -модуль. В самом деле, действие τ задаёт отождествление векторных пространств $U \simeq \tau U$. При этом действию A_m на τU соответствует действие на U , подкрученное на τ : $(\sigma, u) \mapsto (\tau^{-1}\sigma\tau)u, \forall \sigma \in A_m, u \in U$.

Если $U \not\simeq \tau U$ как A_m -модули, то $W = U \oplus \tau U \simeq U \oplus U$ (как векторные пространства), причём действие A_m на втором слагаемом подкручено на τ , а сама τ переставляет слагаемые. Этим однозначно задаётся действие S_m на W .

Если же $U \simeq \tau U$ как A_m -модули, то $W = U$. Пусть W' — другой S_m -модуль, изоморфный U при ограничении на A_m . Рассмотрим изоморфизм A_m -модулей $\varphi : W \xrightarrow{\sim} W'$. Тогда $\tau\varphi\tau^{-1} : W \xrightarrow{\sim} W'$ — тоже изоморфизм неприводимых A_m -модулей. По лемме Шура, $\tau\varphi\tau^{-1} = \varepsilon\varphi$ для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Сопрягая с τ ещё раз, получаем $\varphi = \varepsilon^2\varphi \implies \varepsilon = \pm 1 \implies \varphi\tau = \pm\tau\varphi$. Следовательно, φ либо коммутирует с действием S_m (т.е. $W \simeq W'$), либо подкручивает его на sgn (т.е. $W \simeq W' \otimes \text{sgn}$). \square

Замечание. Аналогичная тесная связь имеется между представлениями произвольной группы G и её подгруппы H индекса 2 [ФН, §5.1]. Вышеизложенное описание неприводимых представлений $H = A_m$ на основе неприводимых представлений $G = S_m$ работает для любых G и H . В п. 6.3 мы ещё раз встретимся с этой ситуацией на примере $G = O_n(\mathbb{C})$ и $H = SO_n(\mathbb{C})$. Мы не стали здесь развивать общую теорию представлений подгрупп индекса 2, ограничившись рассмотрением двух указанных частных случаев, поскольку специфика ситуации позволяет внести ряд упрощений в рассуждения (используя, например, тот факт, что смежный класс $G \setminus H$ представлен элементом порядка 2).

Упражнение 10. Какие неприводимые представления группы A_m имеют размерность $< m$?

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

3.1. Функторы Шура. Основным инструментом построения неприводимых представлений $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ являются тензорные конструкции. Например, представление $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2}$ распадается на два неприводимых: $S^2\mathbb{C}^n$ и $\Lambda^2\mathbb{C}^n$. Более общим образом, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -модули $S^m\mathbb{C}^n$ и $\Lambda^m\mathbb{C}^n$ неприводимы при любом m . Симметрические и внешние степени являются частными случаями общей конструкции, носящей название функтора Шура.

Рассмотрим векторное пространство $V \simeq \mathbb{C}^n$ и какую-нибудь его тензорную степень $V^{\otimes m}$. Помимо естественного действия группы всех невырожденных линейных операторов $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (и даже полугруппы всех линейных операторов $L(V) \simeq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$), в пространстве $V^{\otimes m}$ имеется перестановочное с ним правое действие S_m :

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)}, \quad \forall v_1, \dots, v_m \in V, \sigma \in S_m.$$

Оно превращает $V^{\otimes m}$ в правый A -модуль ($A = \mathbb{C}S_m$).

Определение 4. Подпространство $S^\lambda V = V^{\otimes m} \cdot c_\lambda^*$ называется *модулем Вейля* (отвечающим диаграмме λ порядка m). Операция $V \rightsquigarrow S^\lambda V$ называется *функтором Шура*. Как и в 2.2, более точно было бы писать индекс T вместо λ , где T — некоторая таблица Юнга формы λ .

Пример 6. $S^{(m)}V = S^m V$, $S^{(1^m)}V = \Lambda^m V$.

В общем случае функтор Шура — это симметризация по индексам в каждой строке таблицы T формы λ , а затем альтернирование по столбцам этой таблицы, применяемые к $V^{\otimes m}$.

Пример 7. Рассмотрим таблицу

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Модуль Вейля $S^T V \subset V^{\otimes 3}$ порождается тензорами вида

$$\begin{aligned} (u \otimes v \otimes w)c_T^* &= (u \otimes v + v \otimes u) \otimes w \cdot b_T = \\ &= u \otimes v \otimes w - w \otimes v \otimes u + v \otimes u \otimes w - w \otimes u \otimes v \end{aligned}$$

(где $u, v, w \in V$).

Операция S^λ действительно является функтором на категории векторных пространств. Это означает, что каждое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ однозначно задаёт линейное отображение $S^\lambda \varphi : S^\lambda V \rightarrow S^\lambda W$ (ограничение $\varphi^{\otimes m}$), причём тождественное отображение переходит в тождественное, а композиция — в композицию. В частности, каждое $S^\lambda V$ является $\mathrm{GL}(V)$ - и даже $L(V)$ -модулем.

Теорема 6. Модули Вейля неприводимы, причём $S^\lambda \mathbb{C}^n \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ht} \lambda \leq n$. Имеет место разложение $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times S_m)$ -модулей:

$$(\mathbb{C}^n)^{\otimes m} = \bigoplus_{\substack{|\lambda|=m \\ \mathrm{ht} \lambda \leq n}} S^\lambda \mathbb{C}^n \otimes U(\lambda).$$

Доказательство. Обозначим $V = \mathbb{C}^n$. Если $\text{ht } \lambda > n$, то в операции \mathbb{S}^λ присутствует альтернирование по $> n$ индексам, откуда $\mathbb{S}^\lambda V = 0$. Напротив, если $\text{ht } \lambda = k \leq n$, то $\mathbb{S}^\lambda V$ содержит ненулевой тензор

$$\begin{aligned} (e_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{\otimes \lambda_k}) c_\lambda^* &= \lambda_1! \cdots \lambda_k! (e_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes e_k^{\otimes \lambda_k}) b_\lambda = \\ &= \lambda_1! \cdots \lambda_k! (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) \otimes \cdots \otimes (e_1 \wedge \cdots \wedge e_l), \end{aligned}$$

где e_1, \dots, e_n — стандартный базис V и $\lambda^\top = (k, \dots, l)$ (для удобства тензорные сомножители в формуле переставлены так, чтобы симметризуемые/альтернируемые индексы шли подряд).

Разложение $V^{\otimes m}$ получается следующим образом:

$$V^{\otimes m} \simeq V^{\otimes m} \otimes_A A = V^{\otimes m} \otimes_A \bigoplus_{|\lambda|=m} Ac_\lambda^* A$$

(поскольку $Ac_\lambda^* A \simeq \text{Mat}_{n_\lambda}(\mathbb{C})$ суть простые идеалы A)

$$= \bigoplus_{|\lambda|=m} V^{\otimes m} \otimes_A (Ac_\lambda^* \otimes_{\mathbb{C}} c_\lambda^* A)$$

(изоморфизм $Ac_\lambda^* \otimes_{\mathbb{C}} c_\lambda^* A \xrightarrow{\sim} Ac_\lambda^* A$ задаётся операцией умножения)

$$\simeq \bigoplus_{|\lambda|=m} (V^{\otimes m} \otimes_A Ac_\lambda^*) \otimes_{\mathbb{C}} c_\lambda^* A \simeq \bigoplus_{|\lambda|=m} \mathbb{S}^\lambda V \otimes U(\lambda)$$

(антиинволюция $*$ изоморфно отображает правый S_m -модуль $c_\lambda^* A$ в левый S_m -модуль $Ac_\lambda = U(\lambda)$).

Из разложения следует, что

$$\text{End}_A(V^{\otimes m}) = \bigoplus_{|\lambda|=m} L(\mathbb{S}^\lambda V).$$

С другой стороны,

$$\text{End}_A(V^{\otimes m}) \subset L(V^{\otimes m}) \simeq V^{\otimes m} \otimes (V^{\otimes m})^* \simeq (V \otimes V^*)^{\otimes m}$$

состоит из операторов, перестановочных с действием S_m , т.е. из симметрических тензоров:

$$\text{End}_A(V^{\otimes m}) \simeq S^m(V \otimes V^*) \simeq S^m L(V).$$

Воспользуемся известным фактом из тензорной алгебры:

Лемма 12. $S^m W = \langle w^{\otimes m} \mid w \in W \rangle_{\mathbb{C}}$.

Получаем, что $\text{End}_A(V^{\otimes m})$ порождается операторами вида $\varphi^{\otimes m}$, $\varphi \in L(V)$, а значит, $\mathbb{S}^\lambda \varphi$ порождают $L(\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n)$ (даже при дополнительном условии $\det \varphi \neq 0$), откуда $\mathbb{S}^\lambda V$ неприводим.

Доказательство леммы 12. Как известно, $S^m W^* \simeq \mathbb{C}[W]_m$ — пространство однородных многочленов степени m от координат на пространстве W . Изоморфизм сопоставляет m -линейной форме F многочлен f по правилу

$$f(w) = F(w, \dots, w) = \langle F, w^{\otimes m} \rangle, \quad \forall w \in W$$

(обратное соответствие называется *поляризацией* многочлена). Если $\langle F, w^{\otimes m} \rangle = 0$, $\forall w \in W$, то $f = 0$, а значит, $F = 0$. Поэтому аннулятор в $S^m W^*$ подпространства $\langle w^{\otimes m} \mid w \in W \rangle_{\mathbb{C}}$ равен 0, а значит, подпространство совпадает с $S^m W$. \square

Упражнение 11. Разложите $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ в прямую сумму неприводимых $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -модулей ($m = 2, 3, 4$) и вычислите размерности слагаемых ($m = 2, 3$).

Упражнение 12. Докажите:

$$V^{\otimes m} = \bigoplus_{\substack{T \text{ станд.} \\ |T|=m \\ \mathrm{ht} T \leq n}} \mathbb{S}^T V.$$

Обозначим $\lambda^\Gamma = (\mu_1, \dots, \mu_l)$. По построению,

$$\mathbb{S}^\lambda V = V^{\otimes m} \cdot c_\lambda^* = (S^{\lambda_1} V \otimes \dots \otimes S^{\lambda_k} V) b_\lambda \subseteq \bigwedge^{\mu_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{\mu_l} V$$

— подпространство, получаемое применением к $S^{\lambda_1} V \otimes \dots \otimes S^{\lambda_k} V \subseteq V^{\otimes m}$ операций альтернирования по индексам в каждом столбце данной таблицы формы λ . Вот другая тензорная реализация модулей Вейля:

$$\mathbb{S}^\lambda V \simeq V^{\otimes m} \cdot c_\lambda = (\bigwedge^{\mu_1} V \otimes \dots \otimes \bigwedge^{\mu_l} V) a_\lambda \subseteq S^{\lambda_1} V \otimes \dots \otimes S^{\lambda_k} V.$$

Изоморфизм между двумя реализациями задаётся операциями симметризации и альтернирования (ср. замечание к теореме 2):

$$V^{\otimes m} \cdot c_\lambda^* \simeq V^{\otimes m} \otimes_A A a_\lambda b_\lambda \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot a_\lambda} \\ \sim \\ \xleftarrow{\cdot b_\lambda} \end{array} V^{\otimes m} \otimes_A A b_\lambda a_\lambda \simeq V^{\otimes m} \cdot c_\lambda.$$

Упражнение 13. Имеет место изоморфизм $\mathrm{GL}(V)$ -модулей $(\mathbb{S}^\lambda V)^* \simeq \mathbb{S}^\lambda(V^*)$.

3.2. Неприводимые представления. Какое место занимают модули Вейля среди всех неприводимых представлений $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$? Прежде всего, они полиномиальны в следующем смысле:

Определение 5. Линейное представление $R : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ *полиномиально*, если матричные элементы $r_{ij}(g)$ операторов $R(g)$ являются многочленами от матричных элементов $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Легко видеть, что свойство полиномиальности не зависит от выбора системы координат и сохраняется при переходе к под- и факторпредставлениям. Полиномиальность эквивалентна тому, что представление продолжается до представления полугруппы всех матриц $R : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{L}(W)$.

Не все представления полиномиальны: скажем, естественное представление $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ в $(\mathbb{C}^n)^*$ не таково, поскольку матрицы операторов представления обратны к транспонированным матрицам элементов группы, а значит, их матричные элементы содержат \det в знаменателе и не являются многочленами.

Теорема 7. Модули Вейля $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n$ исчерпывают все полиномиальные неприводимые представления $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Доказательство. Опишем общую конструкцию, отображающую любой полиномиальный GL_n -модуль в алгебру многочленов от матричных элементов $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]$. Пусть $R : \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ — полиномиальное представление. Его *матричными элементами* называются функции вида $r_{\omega,w}(g) = \langle \omega, gw \rangle$, $w \in W$, $\omega \in W^*$. В частности, матричные элементы r_{ij} получаются, если в качестве w брать базисные векторы, а в качестве ω — координатные функции. Фиксируя ω , получаем отображение $W \rightarrow \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]$, $w \mapsto r_{\omega,w}$ — гомоморфизм GL_n -модулей, где GL_n действует на $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]$ правыми сдвигами аргумента по правилу $gf(x) = f(xg)$ ($g \in \mathrm{GL}_n$, $x \in \mathrm{Mat}_n$). Если W неприводим, то это — вложение. Эта конструкция

двойственна хорошо известному вложению любого неприводимого представления конечной группы в регулярное.

Взяв $W = \mathbb{C}^n$, а в качестве ω — координатные функции, получаем вложения $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \text{Mat}_n^*$ в виде подпространств, порождённых матричными элементами фиксированной строки. Очевидно, эти матричные элементы под действием GL_n будут преобразовываться как векторы стандартного базиса \mathbb{C}^n :

$$\begin{array}{|c|} \hline \cdots \\ \hline \cdots \\ \hline \cdots \\ \hline \cdots x \cdots \\ \hline \cdots \\ \hline \cdots \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} g$$

Таким образом,

$$\mathbb{C}[\text{Mat}_n] \simeq S^\bullet(\text{Mat}_n^*) \simeq S^\bullet(\underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^n}_{n \text{ раз}}) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n \geq 0} S^{m_1} \mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes S^{m_n} \mathbb{C}^n.$$

Поэтому любой неприводимый полиномиальный модуль вкладывается в подходящее $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ ($m = m_1 + \cdots + m_n$) и значит изоморфен некоторому $S^\lambda \mathbb{C}^n$ ($|\lambda| = m$). \square

Более широкий класс образуют рациональные представления:

Определение 6. Линейное представление $R : \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(W)$ рационально, если $r_{ij}(g)$ — рациональные функции от матричных элементов $g \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Поскольку эти рациональные функции должны быть определены на всех невырожденных матрицах, то их знаменателями могут быть только степени $\det g$. Отсюда следует, что представление $R \otimes \det^k$ будет полиномиальным при $k \gg 0$.

Рассматривая $S^\lambda \mathbb{C}^n$, удобно считать, что разбиение λ продолжено нулевыми членами до $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$.

Лемма 13. $S^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \det^k = S^{\lambda+(k^n)} \mathbb{C}^n$.

Доказательство. В левой и правой части стоят неприводимые подмодули в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes (|\lambda|+nk)}$, пересекающиеся по $(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes \cdots \otimes (e_1 \wedge \cdots \wedge e_l)$, где $(\lambda+(k^n))^\top = (n, \dots, l)$. \square

Из леммы 13, теоремы 7 и сделанных выше наблюдений сразу вытекает

Теорема 8. Модули $V(\lambda) := S^{\lambda+(k^n)} \mathbb{C}^n \otimes \det^{-k}$ ($\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \in \mathbb{Z}$) не зависят от выбора $k \gg 0$ и исчерпывают все неприводимые рациональные представления $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Можно показать, что любое дифференцируемое представление $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ как комплексной группы Ли рационально (см. теорему 27 в приложении 3). Чуть позже мы увидим, что модули $V(\lambda)$ попарно неизоморфны (следствие 2 теоремы 12), и тем самым получим полную классификацию неприводимых представлений $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

С другой стороны, развивая конструкцию с матричными элементами, можно построить вложение

$$W \hookrightarrow \underbrace{\mathbb{C}[\text{Mat}_n] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[\text{Mat}_n]}_{N = \dim W}$$

для любого полиномиального представления $R : \text{GL}_n \rightarrow \text{GL}(W)$ по правилу $w \mapsto (r_{\omega_1, w}, \dots, r_{\omega_N, w})$, где $\omega_1, \dots, \omega_N$ — базис W^* . Отсюда любое полиномиальное представление вкладывается в прямую сумму представлений $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ в пространствах тензоров $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$. Последние вполне приводимы по теореме 6.

Сводя рациональные представления к полиномиальным подкруткой на $\otimes \det^k$, получаем следующий результат:

Теорема 9. *Все рациональные представления $GL_n(\mathbb{C})$ вполне приводимы.*

Это завершает описание представлений GL_n .

Теорема 9 обобщается на любые редуктивные группы (см. приложение 3).

Упражнение 14. По теореме 8, $S^\lambda(\mathbb{C}^n)^* \simeq V(\lambda')$ для некоторого λ' (зависящего от λ) — найдите его.

3.3. Стандартные базисы. Как и для неприводимых представлений S_m , можно построить удобную реализацию модулей Вейля в пространстве многочленов. Нам будет удобнее работать с дуальными модулями Вейля $S^\lambda(\mathbb{C}^n)^*$.

Обозначим $V = \mathbb{C}^n$, со стандартным базисом e_1, \dots, e_n и координатными функциями x_1, \dots, x_n . Будем нумеровать сомножители в $(V^*)^{\otimes m}$ клетками (j, q) диаграммы λ порядка m . Имеется естественное вложение

$$(V^*)^{\otimes m} \hookrightarrow \mathbb{C}[x_{ijq} \mid i = 1, \dots, n, (j, q) \in \lambda]$$

в качестве подпространства многочленов, полилинейных по векторам $x_{jq} = (x_{1jq}, \dots, x_{njq})$ (здесь x_{ijq} обозначает i -ю координату (j, q) -го тензорного сомножителя).

Обозначим $\lambda^\top = (\mu_1, \dots, \mu_l)$. Альтернирование по столбцам диаграммы λ отображает $(V^*)^{\otimes m}$ на пространство многочленов, полилинейных и кососимметрических по каждой группе векторов x_{jq} , $j = 1, \dots, \mu_q$. Симметризация по строкам диаграммы λ означает замену полилинейной формы на полиоднородный многочлен мультистепени $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ путём отождествления векторов $x_{jq} := x_j$, $q = 1, \dots, \lambda_j$, т.е. подстановки переменных $x_{ijq} = x_{ij}$. Получаем вложение

$$S^\lambda V^* \simeq (V^*)^{\otimes m} \cdot b_{\lambda a_\lambda} \hookrightarrow \mathbb{C}[\text{Mat}_n] = \mathbb{C}[x_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n].$$

Группа GL_n здесь действует на функции от матриц *левыми* сдвигами аргумента по правилу $gf(x) = f(g^{-1}x)$ ($g \in GL_n$, $x \in \text{Mat}_n$).

Опишем образ дуального модуля Вейля в $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]$. Для этого дадим следующие определения:

Определение 7. *Обобщённая таблица Юнга формы λ и веса ω — это произвольное заполнение T диаграммы Юнга λ числами*

$$t_{jq} = \underbrace{1, \dots, 1}_{\omega_1 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\omega_n \text{ раз}}, \quad (j, q) \in \lambda,$$

где $\omega = \omega(T) = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — некоторый набор неотрицательных целых чисел.

Полустандартная таблица Юнга — это обобщённая таблица, в которой числа неубывают слева направо и (строго) возрастают сверху вниз.

Пример 8. Обобщённые таблицы S и T имеют одну и ту же форму $\lambda = (5, 4^2, 2)$ и веса $\omega(S) = (2, 3, 3, 4, 3)$, $\omega(T) = (3, 3, 5, 4, 0)$ (считая $n = 5$):

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & 5 & \\ \hline 5 & 5 & & & \\ \hline \end{array}, \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & 4 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Таблица S полустандартна, а T — нет.

Базисные p -формы $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \in \bigwedge^p V^*$ задают полилинейные функции

$$D_{i_1 \dots i_p} = \begin{vmatrix} x_{i_1,1} & \cdots & x_{i_1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{i_p,1} & \cdots & x_{i_p,p} \end{vmatrix}$$

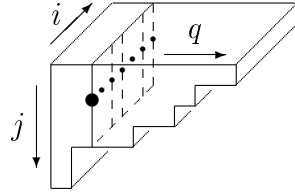
на векторах $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$. Поэтому

$$\bigwedge^{\mu_1} V^* \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\mu_l} V^* \simeq \langle D_{T^{(1)}}(x_{..1}) \cdots D_{T^{(l)}}(x_{..l}) \mid t_{jq} \in \{1, \dots, n\} \rangle_{\mathbb{C}}$$

(по всем обобщённым таблицам T формы λ , заполненным числами $1, \dots, n$), где

$$x_{..q} = \begin{pmatrix} x_{11q} & \cdots & x_{1,\mu_q,q} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1q} & \cdots & x_{n,\mu_q,q} \end{pmatrix}.$$

Эту картину можно представить графически следующим образом. Придадим диаграмме λ объём, расположив её копии на n уровнях глубины. В каждой (кубической) ячейке (i, j, q) объёмной диаграммы запишем переменную x_{ijq} .



Тогда векторы $x_{.jq}$ отвечают “колодцам” этой объёмной диаграммы, а $D_{T^{(q)}}$ — миноры её q -го вертикального среза, отвечающие строкам с номерами из q -го столбца $T^{(q)}$ обобщённой таблицы T .

Симметризуя по строкам диаграммы λ , т.е. отождествляя $x_{ijq} = x_{ij}$, получаем следующую реализацию дуального модуля Вейля:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^\lambda V^* &\simeq (\bigwedge^{\mu_1} V^* \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\mu_l} V^*) a_\lambda \simeq \\ &\simeq \langle D_T := D_{T^{(1)}} \cdots D_{T^{(l)}} \mid T \text{ формы } \lambda, t_{jq} \in \{1, \dots, n\} \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{C}^n)^* \subset \mathbb{C}[\text{Mat}_n]$ порождён произведениями миноров матрицы $x \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, натянутых на несколько первых столбцов (и произвольные строки), так что размеры этих миноров образуют разбиение λ^\top .

Теорема 10. *Многочлены D_T , где T полустандартна формы λ , образуют базис $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{C}^n)^*$.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 3 и состоит из двух частей.

Алгоритм выпрямления. Для того, чтобы выразить любой D_T через полустандартные, используются соотношения выпрямления:

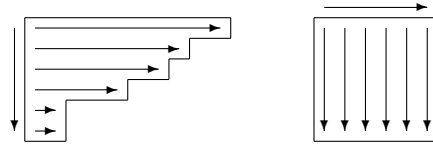
Лемма 14. *$D_T = \sum_{T'} D_{T'}$ по всем таблицам T' , получаемым из T обменом каких-нибудь r чисел из q -го столбца с первыми r числами из $(q+1)$ -го столбца, сохраняя порядок их расположения (r, q фиксированы).*

Доказательство. Как и в лемме 7, применяем лемму Сильвестра к

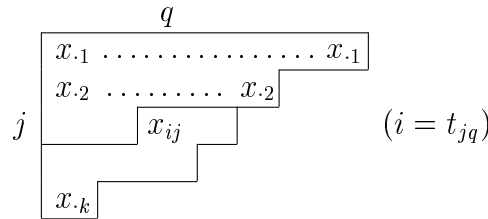
$$D_{i_1, \dots, i_k} D_{j_1, \dots, j_l} = \begin{vmatrix} x_{i_1,1} & \dots & x_{i_k,1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{i_1,k} & \dots & x_{i_k,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{j_1,1} & \dots & x_{j_l,1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_{j_1,l} & \dots & x_{j_l,l} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{j_1,k} & \dots & x_{j_l,k} & 0 \dots 1 \end{vmatrix},$$

где $T^{(q)} = (i_1, \dots, i_k)$, $T^{(q+1)} = (j_1, \dots, j_l)$. □

Линейная независимость. Рассмотрим обратный лексикографический порядок на полустандартных таблицах, сравнивая числа по строкам слева направо и сверху вниз, а ячейки матрицы x упорядочим по столбцам сверху вниз и слева направо:



Упорядочение ячеек (i, j) задаёт лексикографический порядок на одночленах от x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Обозначим через \hat{f} старший член многочлена $f \in \mathbb{C}[\text{Mat}_n]$. Легко видеть, что $\widehat{D_{i_1, \dots, i_p}} = x_{i_1,1} \dots x_{i_p,p}$ (при $i_1 < \dots < i_p$), а $\widehat{D_T}$ есть произведение переменных в следующей таблице:



Теперь заметим, что $T \succ T' \implies \widehat{D_T} \succ \widehat{D_{T'}}$. В самом деле, пусть первое различие между T и T' происходит в клетке (j, q) . Тогда $i = t_{jq} < t'_{jq}$ и x_{ij} входит в $\widehat{D_T}$ в большей степени, чем в $\widehat{D_{T'}}$, а предыдущие переменные — в одинаковых степенях (здесь существенна полустандартность).

Следовательно, в любой нетривиальной линейной комбинации полустандартных D_T старший член не сокращается. □

Следствие. Базис $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n$ составляют элементы $e_T := (e_{T^{(1)}} \otimes \dots \otimes e_{T^{(l)}}) a_\lambda$, где T полустандартна, а $e_{i_1 \dots i_p} := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$.

Упражнение 15. Докажите правило ветвления для модулей Вейля: ограничение представления $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ в $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n$ на подгруппу $\text{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$, вложенную “углом”, изоморфно $\bigoplus_{\lambda'} \mathbb{S}^{\lambda'} \mathbb{C}^{n-1}$, где диаграмма Юнга λ' высоты $< n$ получается из λ удалением не более одной клетки из каждого столбца.

3.4. Многообразия флагов. Дуальные модули Вейля тесно связаны с многообразиями флагов. Напомним, что (полным) *флагом* в пространстве V называется набор вложенных друг в друга подпространств $0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_n = V$, $\dim W_p = p$. Каждое подпространство W_p задаётся разложимым p -вектором $w_p = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ (где v_1, \dots, v_p — базис W_p), определённым однозначно с точностью до пропорциональности. Поэтому его можно рассматривать как точку

проективного пространства $\mathbb{P}(\bigwedge^p V)$, где $\mathbb{P}(M)$ обозначает пространство прямых в векторном пространстве M . Таким образом, *многообразие флагов*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\ell_n = \mathcal{F}\ell(V) &:= \{W_\bullet = (W_1, \dots, W_n) \mid W_p \subset W_q \text{ при } p < q\} \subset \\ &\subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \dots \times \mathbb{P}(\bigwedge^n V) \end{aligned}$$

естественно вложено в прямое произведение проективных пространств. Полный прообраз $\mathcal{F}\ell(V)$ в $(V \setminus 0) \times (\bigwedge^2 V \setminus 0) \times \dots \times (\bigwedge^n V \setminus 0)$ состоит из наборов $w_\bullet = (w_1, \dots, w_n)$ таких, что $w_p \neq 0$, w_p разложим при любом p и делит w_q при $p < q$. Отказываясь от условий $w_p \neq 0$, получаем *мультиконус* над многообразием флагов:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}\ell_n = \widehat{\mathcal{F}}\ell(V) &:= \{w_\bullet = (w_1, \dots, w_n) \mid w_p \text{ разложимы, } w_p \mid w_q \text{ при } w_p \neq 0, p < q\} \subset \\ &\subset V \oplus \bigwedge^2 V \oplus \dots \oplus \bigwedge^n V. \end{aligned}$$

Любой поливектор можно разложить по стандартному базису внешней алгебры:

$$w_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} y_{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p}, \quad \forall w_p \in \bigwedge^p V.$$

Числа $y_{i_1 \dots i_p}$ называются *координатами Плюккера* p -вектора w_p (или соответствующего подпространства W_p , если w_p разложим). Их удобно определить для любого набора индексов i_1, \dots, i_p , приняв соглашение, что координаты Плюккера косимметричны по своим индексам.

Лемма 15. $\mathcal{F}\ell(V)$ и $\widehat{\mathcal{F}}\ell(V)$ задаются алгебраическими уравнениями на координаты Плюккера и, в частности, замкнуты. Мультиконус $\widehat{\mathcal{F}}\ell(V)$ — это в точности замыкание полного прообраза $\mathcal{F}\ell(V)$.

Доказательство. Покажем, что условия, задающие полный прообраз $\mathcal{F}\ell(V)$, в окрестности каждого w_p выражаются алгебраическими уравнениями на $y_{i_1 \dots i_p}$. В достаточно малой окрестности найдется координата Плюккера $y_{j_1 \dots j_p} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что это $y_{1 \dots p} = 1$, а значит,

$$w_p = v_1 \wedge \dots \wedge v_p, \quad v_j = e_j + \sum_{i>p} a_{ij} e_i \implies a_{ij} = y_{1 \dots i \dots p}.$$

Разложимость w_p задаётся условием, что $y_{i_1 \dots i_p}$ суть p -миноры матрицы со столбцами v_1, \dots, v_p , т.е. некоторые многочлены от $y_{1 \dots i \dots p}$, $i > p \geq j$. Делимость на w_p равносильна делимости на любой v_j , т.е. условию $v_j \wedge w_p = 0$ — это тоже алгебраическое уравнение на координаты Плюккера.

Полученные уравнения можно дополнить до однородности, домножив одночлены на подходящие степени $y_{j_1 \dots j_p}$, — тогда они будут выполняться в любой точке $w_\bullet \in \widehat{\mathcal{F}}\ell(V)$. В самом деле, при $w_p = 0$ уравнения тривиальны, а при $w_p \neq 0$ можно малым шевелением векторов v_j добиться условия $y_{j_1 \dots j_p} \neq 0$, при котором уравнения выполнены. Эти однородные уравнения задают $\widehat{\mathcal{F}}\ell(V)$ и $\mathcal{F}\ell(V)$.

Осталось показать, что $\widehat{\mathcal{F}}\ell(V)$ — замыкание полного прообраза $\mathcal{F}\ell(V)$. Возьмём произвольную точку $w_\bullet \in \widehat{\mathcal{F}}\ell(V)$. Выберем базис v_1, \dots, v_n так, что $w_p =$

$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ для всех $w_p \neq 0$, и деформируем его гомотетиями:

$$v_p(t) := \begin{cases} t \cdot v_p, & w_p = 0 \neq w_{p-1}, \\ v_p/t, & w_p \neq 0 = w_{p-1}, \\ v_p, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Прообраз $\mathcal{F}l(V)$ содержит точки вида $w_\bullet(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$, где

$$w_p(t) := v_1(t) \wedge \cdots \wedge v_p(t) = \begin{cases} t \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, & w_p = 0, \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, & w_p \neq 0, \end{cases}$$

причём $w_\bullet(t) \rightarrow w_\bullet$ при $t \rightarrow 0$. □

Подмножество M векторного или проективного пространства (или прямого произведения таких пространств) называется *алгебраическим многообразием*, если оно задаётся алгебраическими уравнениями на координаты. Таким образом, $\mathcal{F}l_n$ и $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ являются алгебраическими многообразиями.

Алгебра $\mathbb{C}[M]$ многочленов от координат, ограниченных на алгебраическое подмногообразие M , и идеал $\mathbb{I}(M)$ всех многочленов, тождественно обращающихся в 0 на M , несут важную информацию о геометрических свойствах многообразия M , см. [Ша]. Изучим структуру алгебры $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n]$.

Многообразие флагов *однородно* относительно естественного действия $GL(V)$ (т.е. состоит из одной орбиты): $\mathcal{F}l_n \simeq GL_n/B_n$, где B_n — подгруппа невырожденных верхнетреугольных матриц, являющаяся стабилизатором стандартного флага $E_\bullet = (E_1, E_{12}, \dots, E_{1\dots n})$, $E_{1\dots p} = \langle e_1, \dots, e_p \rangle_{\mathbb{C}}$. Его полный прообраз в $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ — открытая плотная орбита, изоморфная GL_n/U_n , где U_n — подгруппа верхних *унитреугольных* матриц (т.е. с 1 на диагонали), являющаяся стабилизатором $e_\bullet = (e_1, e_{12}, \dots, e_{1\dots n})$.

Орбитное отображение

$$GL_n \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}l}_n, \quad g \mapsto ge_\bullet,$$

продолжается до отображения

$$Mat_n \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}l}_n, \quad x \mapsto xe_\bullet = (\dots, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p, \dots).$$

С его помощью всякий многочлен f от координат Плюккера на $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ можно поднять до многочлена $x \mapsto f(xe_\bullet)$ на Mat_n . Поскольку многочлен как функция на $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ однозначно определяется своим ограничением на плотную орбиту, получаем вложение $\mathbb{C}[Mat_n] \hookrightarrow \mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n]$, при котором, очевидно, координаты Плюккера $y_{i_1\dots i_p}$ переходят в $D_{i_1\dots i_p}$, а одночлены $y_T := y_{T(1)} \cdots y_{T(i)}$ — в D_T (где T — любая обобщённая таблица Юнга высоты $\leq n$, заполненная числами $1, \dots, n$). Из результатов п. 3.3 вытекает

Теорема 11. *Имеет место изоморфизм алгебр:*

$$\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n] \simeq \langle D_T \mid \text{ht } T \leq n, t_{jq} \in \{1, \dots, n\} \rangle_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\text{ht } \lambda \leq n} \mathbb{S}^\lambda(\mathbb{C}^n)^*.$$

Одночлены y_T , где T полустандартна, при ограничении на $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ образуют базис $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n]$ (они называются стандартными мономами). Идеал $\mathbb{I}(\widehat{\mathcal{F}l}_n)$ порождается квадратичными соотношениями вида $y_{i_1\dots i_k} y_{j_1\dots j_l} - (\text{сумма произведений двух плюккеревых координат, отвечающих парам мультииндексов, получаемых}$

из $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_l)$ обменом j_1, \dots, j_p с какими-то p индексами из i_1, \dots, i_k по всем $k \geq l \geq p$.

Следствие. Уравнения $y_{i_1 \dots i_k} y_{j_1 \dots j_l} = \dots$ служат определяющими соотношениями между образующими $y_{i_1 \dots i_p}$ алгебры $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n]$ и задают алгебраические многообразия $\mathcal{F}l_n$ и $\widehat{\mathcal{F}l}_n$.

Доказательство. Описание структуры и базиса $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n]$ следует из теоремы 10. Квадратичные соотношения указанного вида между координатами Плюккера на $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ вытекают из соотношений выпрямления (лемма 14). Пользуясь только ими, любой многочлен f от координат Плюккера можно преобразовать в линейную комбинацию стандартных мономов. Если $f \in \mathbb{I}(\widehat{\mathcal{F}l}_n)$, то эта комбинация тривиальна, поскольку стандартные мономы линейно независимы в $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n]$. Следовательно, $\mathbb{I}(\widehat{\mathcal{F}l}_n)$ порождается указанными соотношениями. \square

Упражнение 16. Сколько GL_n -орбит в $\widehat{\mathcal{F}l}_n$? Какие из них лежат в образе Mat_n ?

Упражнение 17. Выведите из соотношений выпрямления уравнения Плюккера

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} y_{i_1, \dots, i_{k-1}, j_s} y_{j_1, \dots, j_{s-1}, j_{s+1}, \dots, j_{k+1}} = 0,$$

задающие грассманов конус разложимых k -векторов в $\wedge^k V$.

Можно доказать, что $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n] \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]^{U_n}$ — алгебра всех инвариантных многочленов относительно действия группы U_n правыми сдвигами аргумента.

Аналогичным образом, если взять в $\widehat{\mathcal{F}l}_n$ открытое подмножество, задаваемое условием $w_n \neq 0$, и рассмотреть на нем рациональные функции, разрешая в знаменателе степень $y_{1 \dots n}$, то полученная алгебра функций будет изоморфна

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\widehat{\mathcal{F}l}_n][y_{1 \dots n}^{-1}] &\simeq \langle D_T / \det^k \mid \mathrm{ht} T \leq n, t_{jq} \in \{1, \dots, n\}, k \geq 0 \rangle_{\mathbb{C}} = \\ &= \mathbb{C}[\mathrm{GL}_n]^{U_n} \simeq \bigoplus_{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \in \mathbb{Z}} V(\lambda) \end{aligned}$$

(где $\mathbb{C}[\mathrm{GL}_n] := \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n][\det^{-1}]$). Получается замечательный факт: все неприводимые представления $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ можно организовать в конечнопорождённую коммутативную алгебру без делителей нуля.

4. МНОГОЧЛЕНЫ ШУРА

4.1. Характеры представлений GL_n . *Характером* представления $R : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ называется функция на группе

$$\mathrm{ch}_W(g) := \mathrm{tr} R(g) = \mu_1(g) + \dots + \mu_N(g),$$

где $\mu_i(g)$ — собственные значения оператора $R(g)$.

Упражнение 18. Докажите, что $\mathrm{ch}_{V \oplus W} = \mathrm{ch}_V + \mathrm{ch}_W$ и $\mathrm{ch}_{V \otimes W} = \mathrm{ch}_V \cdot \mathrm{ch}_W$ для любых G -модулей V, W .

В теории представлений конечных групп характеры играют важную роль [Ви, гл. 11, §4], [FH, Lect. 2]. То же оказывается справедливым и для (рациональных) представлений $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (а также любой редуктивной группы G , см. приложение 3).

Почти все $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ диагонализуемы (например, матрицы с однократными собственными значениями образуют плотное открытое подмножество в GL_n). Поэтому с точностью до сопряжения (что не меняет значения ch_W) для вычисления $\mathrm{ch}_W(g)$ достаточно рассматривать диагональные матрицы

$$g = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix} \in T_n := \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix},$$

Другими словами, характер представления однозначно определяется своим ограничением на подгруппу T_n диагональных матриц, и мы можем рассматривать ch_W как многочлен Лорана из $\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ в случае рационального представления или обычный многочлен из $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ в случае полиномиального представления. Числа t_i суть собственные значения g в стандартном представлении GL_n в \mathbb{C}^n . По непрерывности, $\mathrm{ch}_W(g)$ — многочлен (Лорана) от собственных значений g на всей группе GL_n .

Лемма 16. *Характеры представлений GL_n являются симметрическими многочленами (Лорана).*

Доказательство. Имеется естественное вложение $S_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ в качестве подгруппы матриц, переставляющих базисные векторы. Имеем при всех $t \in T_n$, $\sigma \in S_n$:

$$\mathrm{ch}_W(t_1, \dots, t_n) = \mathrm{tr} R(t) = \mathrm{tr} R(\sigma^{-1}t\sigma) = \mathrm{ch}_W(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}). \quad \square$$

В модуле Вейля $W = S^\lambda \mathbb{C}^n$ все операторы $R(t)$ ($t \in T_n$) одновременно диагонализуемы: на базисном векторе e_S , отвечающем полустандартной таблице S формы λ веса μ , $R(t)$ действует умножением на $t^\mu := t_1^{\mu_1} \cdots t_n^{\mu_n}$. Другими словами, e_S — *весовой* вектор относительно T_n веса t^μ или просто μ (см. приложение 3). Вес называется *доминантным*, если он является разбиением, т.е. $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$.

Среди всех полустандартных таблиц формы λ имеется старшая относительно обратного лексикографического порядка:

$$S_\lambda = \begin{array}{|c|} \hline 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots 1 \\ \hline 2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots 2 \\ \hline \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \hline k \dots\dots k \\ \hline \end{array}$$

Соответствующий базисный вектор e_λ является весовым не только для T_n , но и для B_n . Его (доминантный) вес t^λ является старшим среди весов t^μ модуля $S^\lambda \mathbb{C}^n$ относительно лексикографического порядка. Такие векторы называются *старшими* (см. теорему 29 в приложении 3).

Определение 8. *Многочлены Шура* — это характеры модулей Вейля:

$$s_\lambda(t_1, \dots, t_n) := \mathrm{ch}_{S^\lambda \mathbb{C}^n} = \sum_{|\mu|=|\lambda|} K_{\lambda\mu} t^\mu,$$

где $K_{\lambda\mu}$ — это число полустандартных таблиц формы λ веса μ . Числа $K_{\lambda\mu}$ называются *числами Костки*.

Упражнение 19. Докажите, что $s_{(1^k)} = s_k$ — элементарный симметрический многочлен степени k , а $s_{(k)}$ — сумма всех одночленов степени k (*полный симметрический многочлен*).

Характеры рациональных неприводимых модулей имеют вид

$$\text{ch}_{V(\lambda)} = s_{\lambda+(k^n)}(t_1, \dots, t_n)/(t_1 \dots t_n)^k.$$

Весовые векторы — те же, что для $\mathbb{S}^{\lambda+(k^n)}\mathbb{C}^n$, но их веса сдвигаются на $(-k^n)$. В частности, старший вектор имеет вес λ .

Применение характеров в теории представлений основано на следующем фундаментальном результате:

Теорема 12. *Многочлены Шура образуют базис алгебры симметрических многочленов $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\mathbb{S}_n}$.*

Доказательство. Идея та же, что и в доказательстве основной теоремы о симметрических многочленах [Ви, гл. 3, §8].

У любого симметрического многочлена f старший член $\hat{f} = t^\lambda$ обладает свойством $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Вычитая из f многочлен Шура s_λ с нужным коэффициентом, получаем многочлен $h = f - c_\lambda s_\lambda$ с $\hat{h} \prec \hat{f}$. Той же процедурой убиваем старший член h и так далее, в итоге выражая f в виде линейной комбинации многочленов Шура.

Линейная независимость следует из того, что $\lambda \succ \lambda' \iff t^\lambda \succ t^{\lambda'}$, а значит, в любой нетривиальной линейной комбинации многочленов s_λ старший член не сокращается. \square

Следствие 1. *$\text{ch}_{V(\lambda)}$ образуют базис алгебры симметрических многочленов Лорана $\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]^{\mathbb{S}_n}$.*

Следствие 2. *Модули $V(\lambda)$ попарно неизоморфны при разных λ .*

Это следствие также вытекает из того, что $V(\lambda)$ имеют различные старшие веса (ср. теорему 29 в приложении 3).

Следствие 3. *Рациональные представления $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ однозначно определяются своими характеристиками.*

Доказательство. Разложение рационального представления GL_n в пространстве W на неприводимые слагаемые определяет разложение ch_W в сумму характеров $\text{ch}_{V(\lambda)}$. Последнее однозначно определяется характером ch_W , а значит, и структура разложения W на неприводимые однозначно восстанавливается по ch_W . \square

В приложении 3 эти результаты обобщаются на представления любых редуктивных групп.

Полученные результаты позволяют сводить многие вопросы теории представлений к чистой алгебраической комбинаторике, работая вместо представлений с их характеристиками.

Например, вопрос о разложении $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ на неприводимые слагаемые сводится к линейному выражению $s_\lambda \cdot s_\mu$ через многочлены Шура. В полной общности этот вопрос будет рассмотрен в §5, а в следующем пункте мы выясним, как тензорно умножать на $S^k\mathbb{C}^n$ и $\bigwedge^k\mathbb{C}^n$.

4.2. Формулы Пиери. Правила разложения на неприводимые слагаемые тензорного произведения модуля Вейля на симметрическую и внешнюю степени \mathbb{C}^n имеют следующий вид.

Теорема 13 (Формулы Пиери). *Имеют место изоморфизмы GL_n -модулей:*

$$\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^k \mathbb{C}^n \simeq \bigoplus_{\lambda'} \mathbb{S}^{\lambda'} \mathbb{C}^n$$

по всем диаграммам λ' высоты $\leq n$, получаемым из λ добавлением k клеток справа, причём не более одной в каждый столбец;

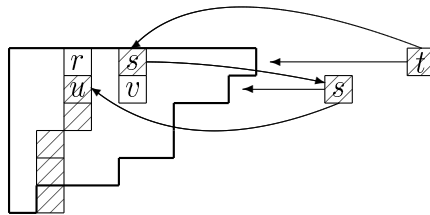
$$\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \wedge^k \mathbb{C}^n \simeq \bigoplus_{\lambda''} \mathbb{S}^{\lambda''} \mathbb{C}^n$$

по всем диаграммам λ'' высоты $\leq n$, получаемым из λ добавлением k клеток справа, причём не более одной в каждую строку.

Идея доказательства такова. Используя следствие 3 теоремы 12, сводим вопрос к многочленам Шура: достаточно получить разложения $s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum s_{\lambda'}$, $s_\lambda \cdot \sigma_k = \sum s_{\lambda''}$, где λ', λ'' пробегает диаграммы вышеописанного вида. Заметим, что $s_\lambda = \sum_S t^{\omega(S)}$ по всем полустандартным таблицам S формы λ . Для разложения $s_\lambda \cdot s_\mu$ в сумму многочленов Шура $s_{\lambda'}$ достаточно установить взаимно однозначное соответствие между парами (S, T) полустандартных таблиц форм λ и μ и полустандартными таблицами S' всевозможных форм λ' (из данного списка), при котором $\omega(S') = \omega(S) + \omega(T)$. Для решения этого, уже чисто комбинаторного, вопроса на множестве всех полустандартных таблиц определяется операция умножения, при которой веса складываются.

Замечание. Векторы $e_S \otimes e_T$ образуют естественный базис $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n$, а векторы $e_{S'}$ — базис $\bigoplus \mathbb{S}^{\lambda'} \mathbb{C}^n$. Вышеупомянутая биекция даст изоморфизм векторных пространств $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n \simeq \bigoplus \mathbb{S}^{\lambda'} \mathbb{C}^n$, а условие на веса гарантирует, что это изоморфизм T_n -модулей. Однако этот изоморфизм, как правило, не перестановочен с действием группы GL_n — базисные векторы неприводимых GL_n -подмодулей не являются, вообще говоря, тензорными произведениями стандартных базисных векторов сомножителей. Например, $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{S}^2 \mathbb{C}^n \oplus \wedge^2 \mathbb{C}^n$, а базисные векторы неприводимых слагаемых суть $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$ ($i \leq j$) и $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$ ($i < j$).

Определение 9. Умножение полустандартной таблицы S на одноклеточную таблицу \boxed{t} определяется следующим образом. Вначале пытаемся приписать клетку \boxed{t} к первой строчке S справа. Если нарушается полустандартность, то ищем первую справа клетку \boxed{s} первой строчки, которую можно заменить на \boxed{t} без нарушения полустандартности (т.е. самую левую клетку с $s > t$), и заменяем. Вытесненную клетку \boxed{s} пытаемся вписать во вторую строчку S аналогичным образом, и т.д.:

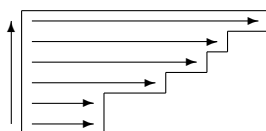


В результате получается обобщённая таблица S' формы λ' , получаемой из λ добавлением одной клетки, заполненная элементами S и числом t .

Свойства умножения на клетку:

- 1) *Путь вытеснения* (состоящий из перемещаемых клеток, начиная с добавляемой) идёт по направлению вниз/влево (заштрихован на предыдущем рисунке). В самом деле, рассмотрим переход от 1-й строки ко 2-й. Клетка \boxed{s} , вытесненная из 1-й строки, может вытеснить во 2-й строке либо стоящую под \boxed{s} клетку \boxed{v} , либо клетку левее этой, поскольку $s < v$. Дальше всё аналогично.
- 2) В результате получается полустандартная таблица. В самом деле, нестрогое возрастание по строкам ясно из конструкции, а строгое возрастание по столбцам достаточно проверить на уровне первых двух строчек: $r \leq t < s, t < s < v$ (см. предыдущий рисунок).

Произведение произвольных полустандартных таблиц $S \cdot T$ определяется так: S последовательно умножается на клетки таблицы T , в порядке слева направо по строкам снизу вверх, начиная с последней.

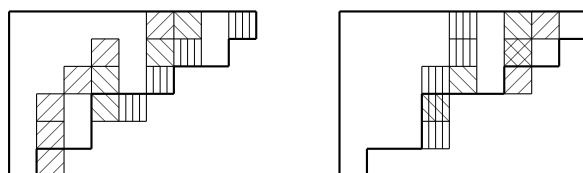


Упражнение 20. Перемножить таблицы:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Свойства умножения на строку (столбец):

- 3) Последовательные пути вытеснения не длиннее (соответственно, длиннее) предыдущих и расположены строго правее (нестрого левее) их, т.е. в каждой строке, содержащей клетки двух последовательных путей, клетка 1-го пути расположена строго правее (нестрого левее) клетки 2-го пути.



Это легко показать индукцией по номеру строки. При последовательном умножении на клетки \boxed{t} и $\boxed{t'}$ с $t \leq t' (t > t')$ сперва \boxed{t} вытесняет из 1-й строки клетку \boxed{s} с $s > t$, а затем $\boxed{t'}$ вытесняет самую левую клетку $\boxed{s'}$ с $s' > t' \geq t (s' > t' < t)$. Поэтому $\boxed{s'}$ расположена строго правее (нестрого левее) вставленной клетки \boxed{t} , т.е. клетки \boxed{s} в исходной таблице, и $s \leq s' (s > t \geq s')$. Затем клетки \boxed{s} и $\boxed{s'}$ вписываются во 2-ю строку аналогичным образом, и т.д.

Замечание. Можно доказать, что умножение полустандартных таблиц ассоциативно [Фу, гл. 1-3].

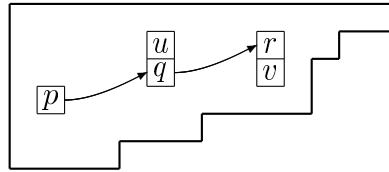
Лемма 17. *Операция умножения $S' = S \cdot T$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между парами (S, T) , где S — полустандартная таблица формы λ , а T — полустандартная строка (столбец) длины k , и полустандартными таблицами S' всевозможных форм λ' , получаемых из λ добавлением k клеток, причём не более одной в каждый столбец (строку).*

Доказательство. То, что произведение таблицы формы λ на строку (столбец) длины k имеет вышеописанную форму λ' , следует из свойства 3 умножения таблиц. Теперь нужно показать, что по любой полустандартной таблице S' формы λ' однозначно восстанавливается пара (S, T) , для которой $S' = S \cdot T$.

Умножение производится последовательно на каждую клетку T . Последние клетки в последовательных путях вытеснения — это в точности клетки, дополняющие диаграмму λ до λ' , в порядке слева направо и снизу вверх (сверху вниз и справа налево, соответственно). Поскольку они однозначно определяются видом S' , можно восстанавливать S и T по S' постепенно, считая на каждом шаге, что $k = 1$, т.е. T состоит из одной клетки.

Для каждой клетки \boxed{p} в пути вытеснения достаточно установить, какая клетка \boxed{q} вытеснила её из предыдущей строки. Заметим, что $q < p$, но любая клетка правее \boxed{q} должна содержать число $\geq p$. Поэтому \boxed{q} — самая правая клетка предыдущей строки, в которой стоит число $< p$.

Так мы восстановим весь путь вытеснения снизу вверх, а его 1-я клетка добавляется к T . Процесс восстановления S изображён на следующем рисунке (стрелки показывают перемещение клеток снизу вверх вдоль пути вытеснения):



Остаётся убедиться, что полученные таблицы S, T полустандартны.

На каждом шаге восстановления S нестрогое возрастание по строкам сохраняется по построению, а строгое возрастание по столбцам ясно из неравенств $u < q < p, q < p \leq v$ (см. предыдущий рисунок).

Чтобы доказать полустандартность строки (столбца) T , рассмотрим два последовательно восстановленных пути вытеснения. Пусть \boxed{p} и $\boxed{p'}$ — клетки этих путей, стоящие в одной строке; тогда $\boxed{p'}$ расположена строго левее (нестрого правее) \boxed{p} и $p' \leq p$ ($p' > p$). Это можно показать обратной индукцией по номеру строки: если \boxed{p} и $\boxed{p'}$, удовлетворяющие условиям по предположению индукции, вытеснены из предыдущей строки клетками \boxed{q} и $\boxed{q'}$, соответственно, то $q' < p' \leq p$ ($q' < p' > p$), а значит, $\boxed{q'}$ стоит строго левее (нестрого правее) клетки \boxed{q} и $q' \leq q$ ($q' \geq p > q$). В частности, эти условия выполнены для клеток из 1-й строки, которые образуют соседние клетки в T . Поэтому числа в T нестрого убывают справа налево (строго возрастают сверху вниз). \square

Доказательство теоремы 13. Имеем

$$s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_S t^{\omega(S)} \cdot \sum_T t^{\omega(T)}$$

(по всем полустандартным таблицам S формы λ и строкам T длины k)

$$= \sum_{S, T} t^{\omega(S) + \omega(T)} = \sum_{S'} t^{\omega(S')}$$

(по всем полустандартным таблицам S' всевозможных форм λ' , в силу леммы 17)

$$= \sum_{\lambda'} s_{\lambda'}.$$

Аналогично, $s_{\lambda} \cdot \sigma_k = \sum_{\lambda''} s_{\lambda''}$. Следовательно, характеры GL_n -модулей в левой и правой частях формул Пиери совпадают, а значит, и сами модули изоморфны по следствию 3 теоремы 12. \square

4.3. Формула Якоби–Труди. Вычисление многочленов Шура по определению 8 требует перебора полустандартных таблиц и подсчёта их количества. Ввиду важности многочленов Шура, желательно научиться их сворачивать в компактную формулу, с которой удобно работать. Такая формула существует и выглядит следующим образом:

Теорема 14 (Формула Якоби–Труди).

$$s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n) = \frac{a(\ell_1, \dots, \ell_n)}{a(n-1, \dots, 1, 0)},$$

где $\ell_i = \lambda_i + n - i$ и

$$a(\ell_1, \dots, \ell_n) = \begin{vmatrix} t_1^{\ell_1} & \dots & t_n^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1^{\ell_n} & \dots & t_n^{\ell_n} \end{vmatrix}.$$

Вначале изложим схему доказательства. Мы покажем, что правая часть \tilde{s}_{λ} формулы Якоби–Труди удовлетворяет соотношениям, аналогичным формулам Пиери для перемножения многочленов Шура. Эти соотношения можно рассматривать как рекуррентные выражения для правой части как функции параметра λ . Теперь формулу Якоби–Труди можно доказать индукцией по λ , поскольку обе её части удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению.

Лемма 18.

$$\frac{a(\ell_1, \dots, \ell_n)}{(1-t_1) \cdots (1-t_n)} = \sum_{\ell'_1 \geq \ell_1 > \ell'_2 \geq \ell_2 > \dots > \ell'_n \geq \ell_n} a(\ell'_1, \dots, \ell'_n)$$

Доказательство. Проведём индукцию по n . База индукции: $t^{\ell}/(1-t) = \sum_{\ell' \geq \ell} t^{\ell'}$. Для выполнения шага индукции разложим определитель $a(\ell'_1, \dots, \ell'_n)$ по последней строке:

$$a(\ell'_1, \dots, \ell'_n) = \sum_{i=1}^n t_i^{\ell'_n} (-1)^{n+i} a_i(\ell'_1, \dots, \ell'_{n-1}),$$

где a_i — определитель, аналогичный a , но зависящий от переменных $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$. Правая часть доказываемой формулы равна

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \sum_{l'_n=l_n}^{l_{n-1}-1} t_i^{l'_n} \sum_{l'_1 \geq l_1 > \dots > l'_{n-1} \geq l_{n-1}} a_i(l'_1, \dots, l'_{n-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{t_i^{l_n} - t_i^{l_{n-1}}}{1 - t_i} \cdot \frac{a_i(l_1, \dots, l_{n-1})}{\prod_{j \neq i} (1 - t_j)} \\ &\quad \text{(по предположению индукции)} \\ &= \frac{a(l_1, \dots, l_n) - a(l_1, \dots, l_{n-1}, l_{n-1})}{(1 - t_1) \dots (1 - t_n)} \end{aligned}$$

(два разложения по последней строке), т.е. равна левой части формулы. \square

Разложение в ряд

$$\frac{1}{(1 - t_1) \dots (1 - t_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{(k)}$$

позволяет вывести из леммы 18 формулу Пиери для правой части формулы Якоби–Труди:

Лемма 19. $\tilde{s}_\lambda \cdot s^{(k)} = \sum_{\lambda'} \tilde{s}_{\lambda'}$ по всем λ' , получаемым из λ добавлением k клеток, причём не более одной в каждый столбец.

Доказательство. Эквивалентное равенство

$$a(\ell_1, \dots, \ell_n) \cdot s^{(k)} = \sum a(\ell'_1, \dots, \ell'_n),$$

где $\ell'_i = \lambda'_i + n - i$, получается из леммы 18 взятием однородных компонент степени $\ell_1 + \dots + \ell_n + k$ по t_1, \dots, t_n от левой и правой частей. \square

Доказательство теоремы 14. Проведём индукцию по лексикографическому упорядочению на диаграммах λ^\top . База индукции: при $\lambda = \emptyset$ формула Якоби–Труди очевидна (в левой и правой частях стоит 1).

В общем случае рассмотрим диаграмму μ , получаемую из λ удалением последней строки, имеющей длину k . Перепишем лемму 19 в виде рекуррентного соотношения: $\tilde{s}_\lambda = \tilde{s}_\mu \cdot s^{(k)} - \sum_{\lambda'} \tilde{s}_{\lambda'}$ по всем $\lambda' \neq \mu$, получаемым из λ добавлением k клеток, причём не более одной в каждый столбец. Аналогичная формула имеет место для s_λ . Поскольку $\mu^\top, (\lambda')^\top \prec \lambda^\top$, формула Якоби–Труди верна для $s_\mu, s_{\lambda'}$ по предположению индукции. Следовательно, она верна и для s_λ в силу рекуррентного соотношения. \square

4.4. Размерность модулей Вейля. Формула Якоби–Труди позволяет, в частности, вычислить размерности неприводимых представлений $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Теорема 15.

$$\dim \mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n = \prod_{p < q} \frac{\lambda_p - \lambda_q + q - p}{q - p} = \prod_{p < q} \frac{\ell_p - \ell_q}{q - p}$$

Доказательство. Очевидно, $\dim \mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n = s_\lambda(1, \dots, 1)$. К сожалению, прямая подстановка $t_1 = \dots = t_n = 1$ в формулу Якоби–Труди даст неопределённость $0/0$.

Чтобы её разрешить, удобно вначале сделать подстановку $t_i = t^{n-i}$. Получаем:

$$s_\lambda(t^{n-1}, \dots, t, 1) = \frac{\Delta(t^{\ell_1}, \dots, t^{\ell_n})}{\Delta(t^{n-1}, \dots, 1)} = \prod_{p < q} \frac{t^{\ell_p} - t^{\ell_q}}{t^{n-p} - t^{n-q}} \longrightarrow \prod_{p < q} \frac{\ell_p - \ell_q}{q - p} \quad \text{при } t \rightarrow 1,$$

что легко установить методом Лопиталья или чисто алгебраически, сократив числители и знаменатели на $t - 1$. \square

Упражнение 21. Вычислите размерности неприводимых подмодулей в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes 4}$.

Упражнение 22. Выведите формулу крюков для размерности модуля Вейля:

$$\dim \mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{n - i + j}{h_{ij}}$$

Замечание. Формулы для характеров и размерностей модулей Вейля дословно обобщаются на любые рациональные неприводимые представления $V(\lambda)$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. В свою очередь, они являются частными случаями более общих формул Вейля для характеров и размерностей неприводимых представлений любых редуктивных групп, см. приложение 3.

5. ПРАВИЛО ЛИТТЛВУДА–РИЧАРДСОНА

Задача разложения тензорного произведения неприводимых представлений на неприводимые слагаемые является одной из основных в теории представлений. В этом параграфе мы решим её для представлений группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Так как все рациональные представления $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ получаются из полиномиальных домножением на \det^{-k} ($k \in \mathbb{N}$), и эта операция сохраняет разложение на неприводимые слагаемые (лишь подкручивая представления в них на \det^{-k} , но сохраняя неприводимость), для разложения $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ достаточно рассмотреть случай, когда λ, μ — разбиения, а $V(\lambda) = \mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n$ и $V(\mu) = \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n$ — модули Вейля. Проблему можно переформулировать так: разложить $s_\lambda \cdot s_\mu$ в линейную комбинацию многочленов Шура.

Поскольку $\mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{\mu_1} \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{S}^{\mu_n} \mathbb{C}^n$, разложение $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n$ на неприводимые слагаемые — это часть разложения $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^{\mu_1} \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{S}^{\mu_n} \mathbb{C}^n$, которое легко вычислить по формуле Пиери. С другой стороны, легко доказать аналогично теореме 12, что многочлены $h_\nu = s_{(\nu_1)} \cdots s_{(\nu_n)}$ также образуют базис алгебры симметрических многочленов. В частности, s_μ выражается через многочлены h_ν (доказательство теоремы 12 даёт рекурсивный алгоритм, но есть и явная формула [FH, §A.1]). Поэтому разложение $s_\lambda \cdot s_\mu$ можно вычислить через разложения $s_\lambda \cdot h_\nu$, а последние — по формуле Пиери.

По существу, эта процедура определяет интересующую нас часть разложения $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^{\mu_1} \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{S}^{\mu_n} \mathbb{C}^n$ методом включения/исключения: сперва мы вычитаем из разложения $s_\lambda \cdot h_\mu$ всевозможные разложения $s_\lambda \cdot h_{\mu'}$, где $s_{\mu'}$ входит в разложение h_μ , $(\mu')^\top \prec \mu^\top$; затем добавляем разложения $s_\lambda \cdot h_{\mu''}$, где $s_{\mu''}$ входят в разложения $h_{\mu'}$, $(\mu'')^\top \prec (\mu')^\top$; затем снова вычитаем, и т.д.

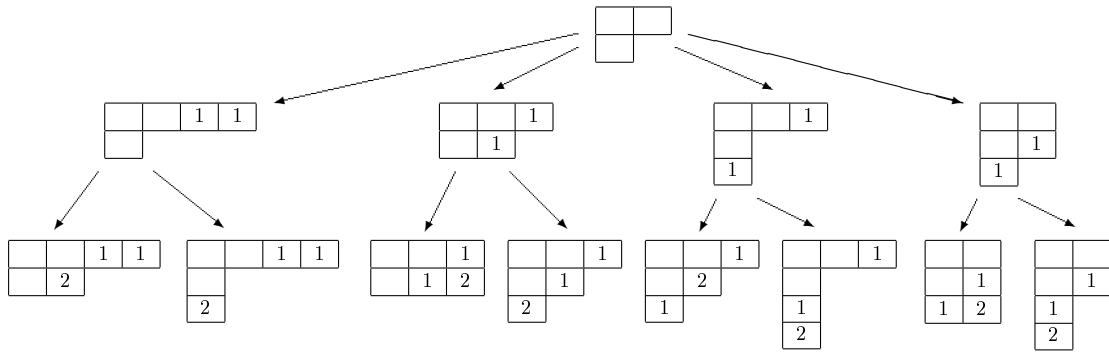
Предложенный алгоритм разложения $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n$ на неприводимые слагаемые имеет два недостатка: он избыточен (так как в процессе вычисления итоговых кратностей неприводимых подмодулей путём сложения/вычитания происходят сокращения) и не даёт явной формулы для разложения в терминах λ, μ . Явный ответ даёт

Теорема 16 (Правило Литтлвуда–Ричардсона).

$$\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n \simeq \bigoplus_{(\nu', \nu'', \dots, \nu^{(n)} = \nu)} \mathbb{S}^\nu \mathbb{C}^n$$

по всем цепочкам диаграмм $\nu^{(k)}$, получаемым из λ последовательным применением формул Пиери умножения на $\mathbb{S}^{\mu^k} \mathbb{C}^n$ и удовлетворяющим дополнительному условию: число клеток, добавляемых на k -м шаге в строки с номерами $\leq i$, не должно превосходить числа клеток, добавленных на $(k-1)$ -м шаге в строки с номерами $< i$, для всех $k = 2, \dots, \text{ht } \mu$, $i = 1, \dots, \text{ht } \nu^{(k-1)} + 1$ (в частности, на k -м шаге клетки можно добавлять только в строки с номерами $\geq k$).

Пример 9. Рассмотрим простейший случай, когда не применимы формулы Пиери: $\lambda = \mu = (2, 1)$.

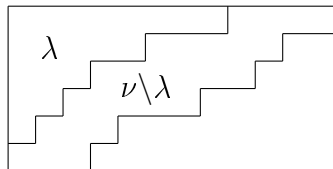


Получаем $(\mathbb{S}^{(2,1)} \mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \simeq \mathbb{S}^{(4,2)} \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{S}^{(4,1,1)} \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{S}^{(3,3)} \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{S}^{(3,2,1)} \mathbb{C}^n)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{S}^{(3,1,1,1)} \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{S}^{(2,2,2)} \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{S}^{(2,2,1,1)} \mathbb{C}^n$ (исключая диаграммы высоты $> n$).

Упражнение 23. Разложите $\mathbb{S}^{(2,2,1)} \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^{(3,2,1)} \mathbb{C}^n$ на неприводимые слагаемые.

Можно было бы дать доказательство теоремы 16 в духе п. 4.2, используя умножение полустандартных таблиц [Фу, гл. 5] (только в данном случае одна и та же таблица формы ν может быть реализована в виде произведения таблиц форм λ, μ несколькими способами). Однако это потребовало бы развития мощной комбинаторной техники, что не входит в нашу задачу. Поэтому мы пойдём окольным путём, следуя Макдональду [Ма, гл. I, §9].

5.1. Косые диаграммы и многочлены Шура. Предположим, что у нас имеются две диаграммы Юнга λ, ν , причём λ целиком содержится в левом верхнем углу диаграммы ν , т.е. $\lambda_i \leq \nu_i, \forall i = 1, \dots, n$. Мы будем обозначать это так: $\lambda \subseteq \nu$. Множество клеток, остающихся после удаления λ из верхнего левого угла ν , называется *косой диаграммой Юнга* $\nu \setminus \lambda$:



Значительная часть теории, развитой выше на основе обычных диаграмм Юнга, обобщается на косые диаграммы. В частности, определяются косые таблицы Юнга различных типов (обычные и обобщённые, стандартные и полустандартные).

В дальнейшем будет систематически использоваться упорядочение клеток косой таблицы T слева направо по строкам снизу вверх, начиная с последней, как

Теорема 18. $s_{\nu\setminus\lambda} = \sum_{\mu} M_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\mu}$

Доказательство. Теорема вытекает из следующего комбинаторного результата:

Комбинаторная лемма. *Имеется взаимно однозначное соответствие между полустандартными таблицами S формы $\nu\setminus\lambda$ веса μ и парами (S', T) , где S' — полустандартная таблица формы $\nu\setminus\lambda$ с обратным решётчатым строчным словом, а T — полустандартная таблица веса μ , форма которой совпадает с весом S' .*

Лемму мы докажем в следующем пункте, а сейчас закончим доказательство теоремы. Из леммы следует, что $K_{\nu\setminus\lambda, \mu} = \sum_{\mu'} M_{\lambda\mu'}^{\nu} K_{\mu'\mu}$, а значит,

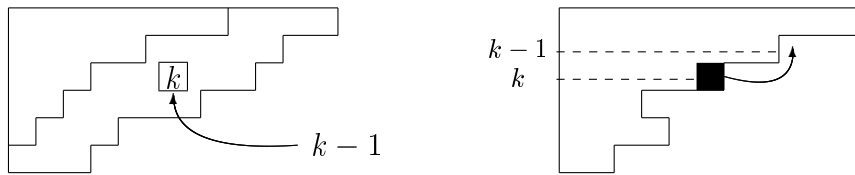
$$s_{\nu\setminus\lambda} = \sum_{\mu} K_{\nu\setminus\lambda, \mu} t^{\mu} = \sum_{\mu, \mu'} M_{\lambda\mu'}^{\nu} K_{\mu'\mu} t^{\mu} = \sum_{\mu'} M_{\lambda\mu'}^{\nu} s_{\mu'}. \quad \square$$

5.2. Доказательство комбинаторной леммы. Мы построим соответствие $S \rightsquigarrow (S', T)$, последовательно видоизменяя косую таблицу S , чтобы её строчное слово стало обратным решётчатым, и регистрируя изменения в таблице T .

Для каждого элемента слова определим его k -дефект как разность между количествами чисел k и $k-1$ в слове, начиная с этого элемента ($k \geq 2$). Заметим, что слово является обратным решётчатым тогда и только тогда, когда все его дефекты неположительны.

Строя (S', T) алгоритмически, на начальном шаге полагаем $S' := S$, $T := S_{\mu}$ (эта запись имеет смысл даже если μ не доминантен).

Пусть на очередном шаге в строчном слове S' все l -дефекты ≤ 0 при $l < k$, но у некоторых элементов k -дефекты > 0 . Возьмём последний элемент с максимальным k -дефектом d — очевидно, этот элемент равен k . Заменяем его на $k-1$ и одновременно перенесём крайнюю правую клетку k -й строки T в правый конец $(k-1)$ -й строки. В этом состоит *элементарная операция уровня k* нашего алгоритма.



Отметим, что уровень применяемой на данном шаге элементарной операции однозначно определяется видом S' . В результате элементарной операции k -дефекты всех элементов слова вплоть до выбранного включительно уменьшились на 2, а после выбранного — не изменились, так что максимальный k -дефект в новом слове равен $d-1$ или -1 , если выбран последний элемент (при этом $d = 1$).

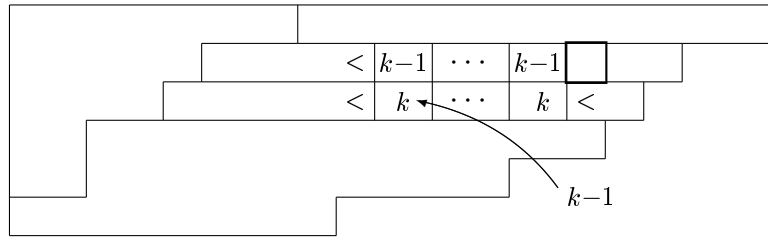
Лемма 21. *Элементарная операция уровня k обратима при любом $k \geq 2$.*

Доказательство. После элементарной операции элемент слова, следующий за выбранным, станет первым элементом с максимальным k -дефектом (равным $d-1$). Поэтому, чтобы восстановить исходную косую таблицу, нужно взять первый элемент с максимальным неотрицательным k -дефектом и заменить предыдущий (или самый последний, если все k -дефекты < 0) элемент (очевидно, равный $k-1$) на k . \square

Замечание. Элементарная операция уровня k осуществляет взаимно однозначное соответствие между словами с максимальным k -дефектом > 0 и словами, у которых k -дефект 1-го элемента не максимален или < 0 .

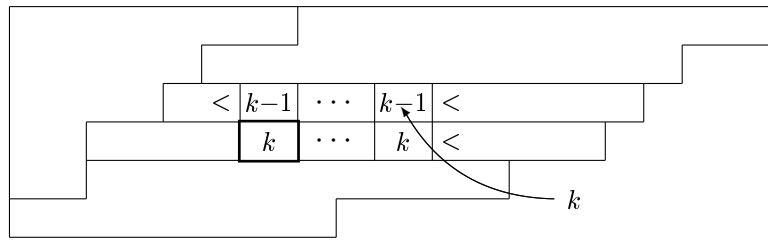
Лемма 22. *Элементарные операции и обратные к ним сохраняют полустандартность.*

Доказательство. Если исходная таблица S' была полустандартна, а новая — нет, то заменяемый в S' элемент — самое левое из чисел k в некоторой строке (идущих подряд), а в предыдущей строке над ними стоят числа $k - 1$, левее которых стоят меньшие числа.



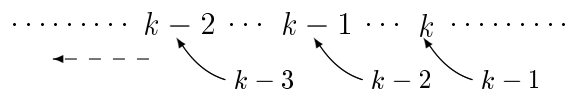
Тогда элемент, следующий в слове за этими числами $k - 1$, тоже имеет максимальный k -дефект d — противоречие.

Аналогично, если S' не была полустандартной, но стала таковой после элементарной операции, то в новой таблице заменённый элемент — самое правое из чисел $k - 1$ в некоторой строке, а в следующей строке под ними стоят числа k , правее которых стоят бóльшие числа.



Первый из этих элементов k тоже имеет максимальный k -дефект $d - 1$ — противоречие. □

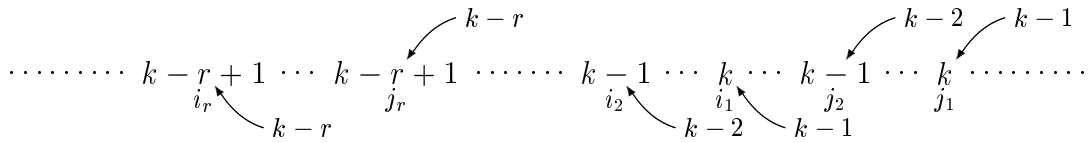
Хотя элементарная операция уменьшает максимальный k -дефект, $(k - 1)$ -дефекты элементов от начала слова вплоть до заменённого включительно увеличиваются на 1 и могут стать равными 1 (в то время как их k -дефекты уменьшатся на 2, $(k + 1)$ -дефекты увеличатся на 1, а остальные l -дефекты при $l \leq k - 2$ и $l \geq k + 2$, очевидно, не изменятся). В этом случае следующая элементарная операция заменит последний элемент с $(k - 1)$ -дефектом 1 на $k - 2$. При этом некоторые элементы до заменённого включительно могут приобрести $(k - 2)$ -дефект 1 (но k -дефекты, увеличившись на 1, останутся $< d$), и тогда следующим шагом станет замена последнего из них на $(k - 2)$, и т.д. до тех пор, пока все l -дефекты при $l < k$ не станут снова неположительными (а максимальный k -дефект станет равен $d - 1$).



В таблице T при этом крайняя правая клетка k -й строки переедет в одну из предыдущих строчек. Назовём эту цепочку элементарных операций *составной операцией уровня k* .

Лемма 23. При последовательном применении составных операций уровня k номера строчек, в которые перемещаются клетки из k -й строки T , нестрого убывают.

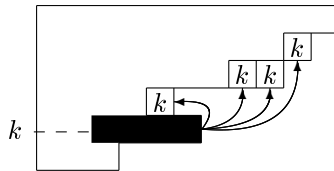
Доказательство. Предположим, что применив составную операцию уровня k , мы последовательно заменили в строчном слове S' элементы на позициях $i_1 \geq \dots \geq i_r$ на $k-1, \dots, k-r$. Элемент на позиции $i_1 + 1$ имеет k -дефект $d-1$. Поэтому следующая элементарная операция заменяет последний элемент с k -дефектом $d-1$, стоящий на позиции $j_1 > i_1$, на $k-1$. Теперь элемент на позиции $i_2 + 1$ приобрёл $(k-1)$ -дефект 1. Значит, следующая элементарная операция заменит последний элемент с $(k-1)$ -дефектом 1, стоящий на позиции $j_2 > i_2$, на $k-2$. Продолжая в том же духе, заменяем элементы на позициях $j_s > i_s$ на $k-s$, $s = 1, \dots, r$.



Таким образом, цепочка элементарных операций, входящих в следующую составную операцию уровня k , не короче предыдущей, что и доказывает лемму. \square

Лемма 24. После проведения всех составных операций уровня k строки T с 1-й по k -ю образуют полустандартную таблицу, заполненную числами $1, \dots, k$.

Доказательство. Проведём индукцию по k с очевидной базой. На k -м шаге некоторое количество d клеток \boxed{k} с правого края k -й строки T перемещается в предыдущие строки, номера которых нестрого убывают по лемме 23.



Перед каждой составной операцией уровня k все l -дефекты ≤ 0 при $l < k$, а после всех этих операций — и при $l = k$. Поскольку длина l -й строки T равна количеству μ'_l чисел l в S' , перед каждой операцией длины первых $k-1$ строк, а после всех операций — первых k строк, должны нестрого убывать. Кроме того, $d \geq \mu'_k - \mu'_{k-1}$. Отсюда легко понять, что клетки \boxed{k} не могут встать друг над другом, из чего и следует полустандартность. \square

Теперь мы можем завершить доказательство комбинаторной леммы.

Из леммы 22 следует, что итоговая косая таблица S' будет полустандартной. По построению, её строчное слово — обратное решётчатое. В частности, $\mu' = \omega(S')$ — разбиение. По построению, T — обобщённая таблица формы μ' веса μ . По лемме 24 она тоже будет полустандартной. Наконец, лемма 23 позволяет однозначно восстановить последовательность составных, а значит, и элементарных операций, приведших от (S, S_μ) к (S', T) . В самом деле, цепочка составных операций k -го уровня однозначно определяется последовательностью номеров строк таблицы T , в которых стоят числа k выше k -й строки слева направо. Применяя обратные операции к паре (S', T) , мы однозначно восстанавливаем S по лемме 21. Нетрудно убедиться, что это можно проделать для любой полустандартной косой таблицы S' веса μ' с обратным решётчатым строчным словом,

поскольку обратные к элементарным операциям уровня l в составных операциях уровня k потребуются применять только когда l -дефект 1-го элемента < 0 ($l < k$) или немаксимален ($l = k$).

Упражнение 24. Какая пара таблиц (S', T) соответствует косой таблице

$$S = \begin{array}{cccc} & & & 2 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & \\ 3 & 5 & 5 & & \end{array} ?$$

5.3. Вывод правила. Вернёмся к правилу Литтлвуда–Ричардсона. Чтобы его вывести, надо связать косые многочлены Шура с произведениями обычных многочленов Шура.

Воспользуемся для этого одним полезным тождеством:

Лемма 25 (Тождество Коши).

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t'_1, \dots, t'_m) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{1}{1 - t_i t'_j}$$

Тождество надо понимать как равенство формальных степенных рядов.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $m = n$ (общий случай получается подстановкой нулевых значений “лишних” переменных). Домножив тождество Коши на $\Delta(t_1, \dots, t_n) \Delta(t'_1, \dots, t'_n)$, перепишем его в эквивалентном виде, с учётом формулы Якоби–Труди:

$$\frac{\Delta(t) \Delta(t')}{\prod_{i,j=1}^n (1 - t_i t'_j)} = \sum_{\ell_1 > \dots > \ell_n \geq 0} \begin{vmatrix} t_1^{\ell_1} & \dots & t_n^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1^{\ell_n} & \dots & t_n^{\ell_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (t'_1)^{\ell_1} & \dots & (t'_n)^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ (t'_1)^{\ell_n} & \dots & (t'_n)^{\ell_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-t_1 t'_1} & \dots & \frac{1}{1-t_1 t'_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{1-t_n t'_1} & \dots & \frac{1}{1-t_n t'_n} \end{vmatrix}$$

Второе равенство вытекает из того, что в последнем определителе коэффициент при $t_1^{\ell_{\sigma(1)}} \dots t_n^{\ell_{\sigma(n)}}$ ($\sigma \in S_n$) равен

$$\begin{vmatrix} (t'_1)^{\ell_{\sigma(1)}} & \dots & (t'_n)^{\ell_{\sigma(1)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ (t'_1)^{\ell_{\sigma(n)}} & \dots & (t'_n)^{\ell_{\sigma(n)}} \end{vmatrix}.$$

Докажем тождество Коши в эквивалентном виде. Для этого преобразуем определитель в правой части, вычтя 1-ю строку из остальных, а потом 1-й столбец из остальных, вынося при этом общие множители из строк и столбцов:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{1}{1-t_1 t'_1} & \cdots & \frac{1}{1-t_1 t'_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{1-t_i t'_1} & \cdots & \frac{1}{1-t_i t'_n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-t_1 t'_1} & \cdots & \frac{1}{1-t_1 t'_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{t_i-t_1}{1-t_1 t'_1} \frac{t'_1}{1-t_i t'_1} & \cdots & \frac{t_i-t_1}{1-t_1 t'_n} \frac{t'_n}{1-t_i t'_n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\
 & = \prod_{i=2}^n (t_i - t_1) \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-t_1 t'_j} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{t'_1}{1-t_i t'_1} & \cdots & \frac{t'_n}{1-t_i t'_n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\
 & = \prod_{i=2}^n (t_i - t_1) \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-t_1 t'_j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t'_1}{1-t_i t'_1} & \frac{t'_2-t'_1}{1-t_i t'_1} \frac{1}{1-t_i t'_2} & \cdots & \frac{t'_n-t'_1}{1-t_i t'_1} \frac{1}{1-t_i t'_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\
 & = \prod_{i=2}^n \frac{(t_i - t_1)(t'_i - t'_1)}{1-t_i t'_1} \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-t_1 t'_j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \frac{1}{1-t_2 t'_2} & \cdots & \frac{1}{1-t_2 t'_n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \frac{1}{1-t_n t'_2} & \cdots & \frac{1}{1-t_n t'_n} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Доказательство завершается индукцией по n . □

Доказательство теоремы 17. Фиксируем три набора t, t', t'' по n переменных. Домножив формулу теоремы 18 на $s_\lambda(t')s_\nu(t'')$ и просуммировав по λ, ν , получим:

$$\sum_{\lambda, \nu} s_\lambda(t')s_{\nu \setminus \lambda}(t)s_\nu(t'') = \sum_{\lambda, \mu, \nu} M_{\lambda\mu}^\nu s_\lambda(t')s_\mu(t)s_\nu(t'').$$

С другой стороны, из леммы 20 получаем:

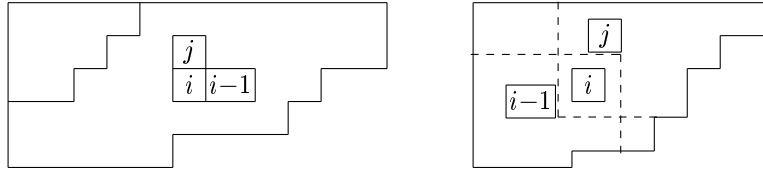
$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda, \nu} s_\lambda(t')s_{\nu \setminus \lambda}(t)s_\nu(t'') &= \sum_{\nu} s_\nu(t', t)s_\nu(t'') = \\
 &= \prod_{i,k=1}^n \frac{1}{1-t'_i t''_k} \cdot \prod_{j,k=1}^n \frac{1}{1-t_j t''_k} = \sum_{\lambda, \mu} s_\lambda(t')s_\lambda(t'')s_\mu(t)s_\mu(t''),
 \end{aligned}$$

трижды применяя тождество Коши. Осталось воспользоваться линейной независимостью многочленов Шура и приравнять коэффициенты при $s_\lambda(t')s_\mu(t)$ в правых частях обеих формул, что даёт искомое разложение $s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} M_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$. □

5.4. Другие формулировки. Правило Литтлвуда–Ричардсона можно переформулировать несколькими эквивалентными способами. Мы приведём две таких формулировки.

Первая принадлежит Реммелю и Уитни. Занумеруем клетки диаграммы $\nu \setminus \lambda$ в обратном порядке, так что соответствующее строчное слово будет иметь вид $|\nu \setminus \lambda|, \dots, 2, 1$.

Теорема 19. *Коэффициент $M_{\lambda\mu}^\nu$ равен числу стандартных таблиц формы μ , удовлетворяющих дополнительному условию: если клетка \boxed{i} в $\nu \setminus \lambda$ стоит непосредственно слева от $\boxed{i-1}$ или непосредственно под \boxed{j} , то в стандартной таблице \boxed{i} стоит нестрого выше и строго правее $\boxed{i-1}$ и, соответственно, строго ниже и нестрого левее \boxed{j} .*



Доказательство. Каждой обобщённой таблице S формы $\nu \setminus \lambda$ веса μ поставим во взаимно однозначное соответствие таблицу T формы μ следующим образом: в k -й строке T пишем в порядке возрастания номера клеток S , в которых стоит число k . При этом T стандартна тогда и только тогда, когда строчное слово S — обратное решётчатое.

Условие на взаимное расположение клеток $\boxed{i}, \boxed{i-1}$ в T в точности означает, что числа в S нестрого возрастают по строкам слева направо. Строго говоря, условие при этом накладывается только на вертикальное расположение клеток, но если клетка \boxed{i} не ниже $\boxed{i-1}$, она обязана быть строго правее, в силу стандартности T .

Аналогично, условие на взаимное расположение клеток \boxed{i}, \boxed{j} по вертикали означает, что числа в S строго возрастают по столбцам сверху вниз. Условие на горизонтальное расположение получается автоматически. В самом деле, заметим, что $1, \dots, j$ заполняют стандартную подтаблицу в левом верхнем углу T , причём если j -я клетка S находится в k -й строке, то под номерами клеток k -й строки в этой подтаблице ничего не стоит. Теперь индукцией по i легко показать, что \boxed{i} не может быть строго ниже и правее \boxed{j} (иначе числа $1, \dots, i$ не будут образовывать подтаблицу в T).

В итоге получаем взаимно однозначное соответствие между стандартными таблицами формы μ с дополнительным условием и полустандартными таблицами формы $\nu \setminus \lambda$ веса μ с обратным решётчатым строчным словом. \square

Теорема 19 удобна для вычисления конкретных коэффициентов $M_{\lambda\mu}^\nu$, так как все стандартные таблицы, удовлетворяющие условиям, можно построить рекурсивно, начав с $\boxed{1}$ в левом верхнем углу и на i -м шаге добавляя \boxed{i} в допустимую зону всеми возможными способами.

Упражнение 25. Вычислите $M_{\lambda\mu}^\nu$ для $\lambda = (3^2, 2, 1^2), \mu = (4, 3^2, 2), \nu = (6, 5^2, 4, 2)$.

Другая переформулировка принадлежит Литтельману [Li].

Теорема 20.

$$\mathbb{S}^\lambda \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{S}^\mu \mathbb{C}^n \simeq \bigoplus_T \mathbb{S}^{\lambda + \omega(T)} \mathbb{C}^n$$

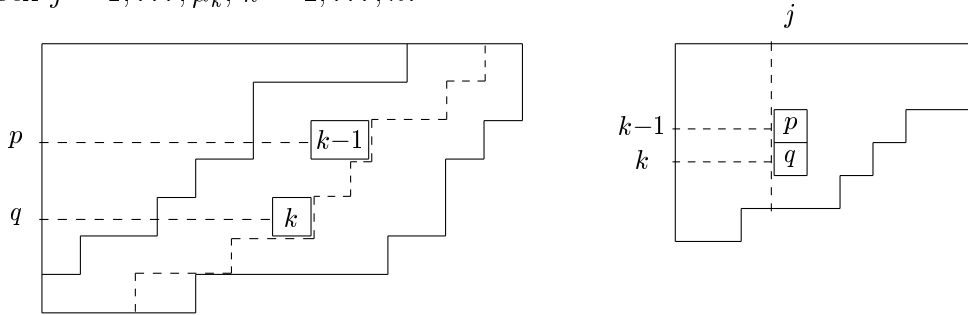
по всем полустандартным таблицам T формы μ таким, что все веса $\lambda + \omega(T_j)$ доминантны ($j = 1, \dots, \mu_1$), где T_j обозначает фрагмент T , начиная с j -го столбца.

Доказательство. Каждой полустандартной таблице T формы μ веса $\mu' = \omega(T)$ поставим в соответствие слово, состоящее из последовательных сегментов длин μ'_n, \dots, μ'_1 , так что в k -м с конца сегменте числа нестрого возрастают, причём количество чисел j равно количеству чисел k в j -й строке T :

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{\mu'_n} \dots\dots\dots \underbrace{1 \dots 1 \dots j \dots j \dots k \dots k}_{\mu'_k} \dots\dots\dots \underbrace{\dots\dots\dots}_{\mu'_1}$$

Из полустандартности следует, что слово будет обратным решётчатым. Приписав k -й с конца сегмент слова к k -й строке диаграммы λ , получим косую обобщённую таблицу S формы $\nu \setminus \lambda$, $\nu = \lambda + \mu'$ (здесь мы пользуемся доминантностью).

Заметим, что в строках S числа нестрого возрастают по построению. Замена T на T_j приводит к удалению из S последних $j-1$ клеток \boxed{k} для всех $k = 1, \dots, n$. Поскольку строчное слово S — обратное решётчатое, в каждой строке клетки удаляются с конца. Если веса $\lambda + \omega(T_j)$ доминантны, то j -я с конца клетка \boxed{k} в таблице S расположена строго ниже и нестрого левее j -й с конца клетки $\boxed{k-1}$, для всех $j = 1, \dots, \mu_k$, $k = 2, \dots, n$.



Поэтому над числом k в S может стоять только меньшее число, а значит, S полустандартна.

Обратно, всякая полустандартная таблица S формы $\nu \setminus \lambda$ веса μ с обратным решётчатым строчным словом получается при помощи этой конструкции из некоторой однозначно определённой полустандартной таблицы T формы μ веса $\nu - \lambda$, удовлетворяющей условиям теоремы. \square

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДРУГИХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

6.1. Специальная линейная группа. Между линейными представлениями $GL_n(\mathbb{C})$ и $SL_n(\mathbb{C})$ имеется тесная связь, поскольку эти две группы не слишком сильно отличаются друг от друга: любая матрица $g \in GL_n$ представима в виде $g = t \cdot g_1$, $t \in \mathbb{C}^\times$, $g_1 \in SL_n$.

В самом деле, любое представление $R : GL_n \rightarrow GL(W)$ можно ограничить на подгруппу SL_n . Если R неприводимо, то по лемме Шура подгруппа скалярных матриц $\mathbb{C}^\times \subset GL_n$ действует на W гомотетиями, а значит, $R|_{SL_n}$ тоже неприводимо (поскольку у GL_n и SL_n одни и те же инвариантные подпространства).

Обратно, всякое представление $R : SL_n \rightarrow GL(W)$ можно продолжить (неоднозначно) до представления GL_n . В самом деле, рассмотрим подгруппу скалярных матриц $Z_n \subset SL_n$. Это будет циклическая группа порядка n с образующей $\varepsilon \cdot E$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, а E обозначает единичную матрицу. Разложим W в прямую сумму собственных подпространств W_k относительно $\varepsilon \cdot E$ с собственными значениями ε^k , где k пробегает полную систему вычетов $\text{mod } n$. Так как Z_n — центральная подгруппа SL_n , подпространства W_k будут SL_n -инвариантны. Продолжив R на \mathbb{C}^\times так, чтобы $R(t)$ действовал на W_k гомотетией с коэффициентом t^k , получим корректно определённое представление $R : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(W)$ по правилу $R(g) = R(t)R(g_1)$.

Из вышесказанного и теоремы 9, в частности, следует, что все рациональные (\iff полиномиальные, дифференцируемые) представления SL_n вполне приводимы, а неприводимые представления получаются ограничением неприводимых представлений GL_n .

Если R, S — два неприводимых представления GL_n , причём $R|_{SL_n} \simeq S|_{SL_n}$, то $R(t \cdot E)$ и $S(t \cdot E)$ — гомотетии с коэффициентами t^r и t^s , соответственно, причём $r \equiv s \pmod n$. Отсюда следует, что $R \simeq S \otimes \det^k$, где $r = s + nk$. По теореме 8, всякий неприводимый GL_n -модуль подкруткой на $\otimes \det^k$ можно привести к виду $S^\lambda \mathbb{C}^n$ с $\lambda_n = 0$. В итоге получается:

Теорема 21. *Неприводимые представления $SL_n(\mathbb{C})$ взаимно однозначно, с точностью до изоморфизма, параметризуются диаграммами Юнга λ высоты $< n$ и реализуются в соответствующих модулях Вейля $S^\lambda \mathbb{C}^n$.*

6.2. Симплектическая группа. Симплектическая группа $Sp(V)$ состоит из всех линейных преобразований векторного пространства V , сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму ω (кососкалярное умножение). Можно выбрать базис e_1, \dots, e_n в V , т.е., отождествление $V \simeq \mathbb{C}^n$ так, что матрица ω в этом базисе примет вид:

$$\Omega = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{|cc|} \hline 0 & \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ 1 \quad 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} n/2 \\ \left. \begin{array}{|cc|} \hline \begin{array}{c} 0 \quad -1 \\ \cdot \quad \cdot \\ -1 \quad 0 \end{array} & 0 \\ \hline \end{array} \right\} n/2 \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{n/2} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{n/2} \end{array}$$

(разумеется, $n = \dim V$ должно быть чётным). При этом $Sp(V)$ отождествляется с матричной группой

$$Sp_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g^T \Omega g = \Omega\}.$$

Поскольку Sp_n сохраняет ненулевую кососимметрическую n -форму $\omega \wedge \dots \wedge \omega$ ($n/2$ раз), имеем $Sp_n \subset SL_n$.

Можно доказать, что любое дифференцируемое линейное представление Sp_n полиномиально и вполне приводимо (см. приложение 3). Кроме того, любое полиномиальное представление вкладывается при помощи матричных элементов в прямую сумму представлений Sp_n в пространствах тензоров $V^{\otimes m}$ (теорема 28). Поэтому построение теории представлений $Sp_n(\mathbb{C})$ завершится описанием неприводимых представлений в пространствах тензоров.

Для любого разбиения λ обозначим через $V(\lambda)$ подпространство тензоров в $S^\lambda \mathbb{C}^n$, имеющих нулевую свёртку с ω по любой паре индексов. Очевидно, $V(\lambda)$ инвариантно относительно Sp_n .

Лемма 26. $V(\lambda)$ — неприводимый Sp_n -модуль.

Доказательство. Достаточно показать, что каждый эндоморфизм $V(\lambda)$ скалярен. В силу полной приводимости его можно продолжить до эндоморфизма $V^{\otimes m}$ ($m = |\lambda|$). Классическая теория инвариантов (следствие теоремы 31 в приложении 4) говорит, что всякий Sp_n -эквивариантный эндоморфизм $V^{\otimes m}$ является линейной комбинацией элементарных эндоморфизмов, которые суть композиции полной свёртки с $\omega^{\otimes k}$ ($k \leq m/2$), тензорного домножения на $(\omega^*)^{\otimes k}$, где ω^* — двойственный 2-форме ω бивектор, и некоторой перестановки индексов. Из всех элементарных эндоморфизмов ненулевым образом на $V(\lambda)$ действуют только перестановки индексов. Поэтому исходный эндоморфизм, будучи линейной комбинацией перестановок индексов, коммутирует с действием GL_n , а значит, сохраняет $S^\lambda V \supseteq V(\lambda)$ и действует на нём скалярно по лемме Шура. \square

$\text{ch}_{V(\lambda)} \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n/2}^{\pm 1}]$ этих представлений играют в теории представлений Sp_n такую же роль как многочлены Шура в теории представлений GL_n , см. также приложение 3.

Лемма 30. *Модули $V(\lambda)$, отвечающие разным диаграммам λ высоты $\leq n/2$, не изоморфны.*

Доказательство. Легко видеть, что старший (в лексикографическом порядке) вес $T_{n/2}$ в $\mathbb{S}^\lambda V$ равен t^λ и реализуется на единственном (с точностью до пропорциональности) векторе e_λ . Поскольку $e_\lambda \in V(\lambda)$, старший вес $T_{n/2}$ в $V(\lambda)$, т.е. старший член $\text{ch}_{V(\lambda)}$ тоже равен t^λ . Значит, при разных λ модули $V(\lambda)$ имеют различные характеры и стало быть не изоморфны. \square

Теперь можно подвести итоги.

Теорема 22. *Неприводимые представления $\text{Sp}_n(\mathbb{C})$ взаимно однозначно, с точностью до изоморфизма, параметризуются диаграммами Юнга λ высоты $\leq n/2$ и реализуются в пространствах $V(\lambda)$.*

Упражнение 26. Докажите, что $S^m \mathbb{C}^n = V(m)$ — неприводимый Sp_n -модуль, а $\bigwedge^m \mathbb{C}^n \simeq \bigwedge^{n-m} \mathbb{C}^n \simeq V(1^m) \oplus V(1^{m-2}) \oplus \dots \oplus V(1^{m-2k}) \oplus \dots$ при $m \leq n/2$.

6.3. Ортогональная группа. Перейдём к построению теории представлений двух оставшихся классических групп $O_n(\mathbb{C})$ и $SO_n(\mathbb{C})$. Предположим, что на основном пространстве $V \simeq \mathbb{C}^n$ задана невырожденная симметрическая билинейная форма ω (скалярное умножение). Традиционно при изучении ортогональной матричной группы в V выбирается ортонормированный базис (в котором матрица ω единична), однако в теории представлений удобно выбрать *гиперболический базис* e_1, \dots, e_n , в котором матрица ω имеет вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом группа ортогональных операторов $O(V)$ отождествляется с матричной группой

$$O_n(\mathbb{C}) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid g^\top \Omega g = \Omega\}.$$

Теория представлений O_n и SO_n развивается аналогично симплектическому случаю, с некоторыми осложнениями.

Все дифференцируемые представления O_n и SO_n полиномиальны и вполне приводимы, а также вкладываются в прямую сумму представлений в пространствах тензоров $V^{\otimes m}$.

Как и в п. 6.2, определяются O_n -подмодули $V(\lambda) \subseteq \mathbb{S}^\lambda V$ как подпространства тензоров, имеющих нулевую свёртку с ω по любой паре индексов.

Лемма 31. *Представления O_n в $V(\lambda)$ неприводимы и исчерпывают все неприводимые подпредставления O_n в $V^{\otimes m}$, с точностью до изоморфизма.*

Доказательство абсолютно идентично симплектическому случаю.

Аналогом леммы 29 является

Лемма 32. $V(\lambda) \neq 0 \iff \lambda_1^\top + \lambda_2^\top \leq n$

Доказательство. Пусть $\lambda^\top = \mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$. При $\mu_1 + \mu_2 \leq n$ имеем $V(\lambda) \ni e_\lambda \neq 0$ (неравенство гарантирует, что свёртка e_λ с ω по индексам из двух разных

Теорема 23. *Неприводимые представления $O_n(\mathbb{C})$ взаимно однозначно, с точностью до изоморфизма, параметризуются диаграммами Юнга λ с суммарной высотой первых двух столбцов $\leq n$ и реализуются в пространствах $V(\lambda)$.*

Упражнение 27. Докажите, что $\bigwedge^m \mathbb{C}^n = V(1^m)$ — неприводимый O_n -модуль, а $S^m \mathbb{C}^n \simeq V(m) \oplus V(m-2) \oplus \dots \oplus V(m-2k) \oplus \dots$.

Упражнение 28. Докажите, что представление O_n в $V(m)$ реализуется в пространстве гармонических многочленов степени m на пространстве V , т.е. многочленов $f(x_1, \dots, x_n)$ от ортогональных координат, аннулируемых оператором Лапласа: $\partial^2 f / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 f / \partial x_n^2 = 0$.

Перейдём к представлениям SO_n . Поскольку SO_n — подгруппа индекса 2 в $O_n = SO_n \sqcup \tau SO_n$, мы можем применить ту же схему рассуждений, что и в п. 2.5.

Всякое неприводимое представление SO_n реализуется в некотором пространстве тензоров $U \subseteq V^{\otimes m}$. Стало быть, мы можем вложить U в некоторый неприводимый O_n -модуль W . Очевидно, $W = U + \tau U$. Обратно, любой неприводимый O_n -модуль разлагается в сумму не более двух неприводимых SO_n -подмодулей, переставляемых действием τ .

Лемма 34. *Возможно одно из двух:*

- $W \not\cong W \otimes \det \implies W = U = \tau U$;
- $W \simeq W \otimes \det \implies W = U \oplus \tau U, U \not\cong \tau U$.

Доказательство. Изоморфизм $W \xrightarrow{\sim} W \otimes \det$, рассматриваемый как линейное преобразование W , должен переставлять собственные подпространства τ с собственными значениями ± 1 , а значит, не может быть скалярным, и представление SO_n в W оказывается приводимым по лемме Шура. Обратно, если $W = U \oplus \tau U$, то оператор $E \oplus (-E)$ осуществляет изоморфизм $W \xrightarrow{\sim} W \otimes \det$. Осталось доказать, что в этом случае $U \not\cong \tau U$.

Предположим противное. Изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \tau U$ имеет вид $u \mapsto \tau \varphi(u), \forall u \in U$, где $\varphi \in GL(U)$ подкручивает действие SO_n на τ : $\varphi(gu) = (\tau^{-1}g\tau)\varphi(u), \forall g \in SO_n$. При этом φ^2 коммутирует с действием SO_n , а значит, скалярен по лемме Шура. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi^2 = E$. Тогда подпространство $\{(u, \tau \varphi(u)) \mid u \in U\} \subset W$ инвариантно относительно O_n — противоречие. \square

По леммам 34 и 33, представления SO_n в $V(\lambda)$ и $V(\bar{\lambda})$ изоморфны и неприводимы при $\lambda \neq \bar{\lambda}$. В этом случае, заменяя при необходимости λ на $\bar{\lambda}$, можно считать, что $\text{ht } \lambda < n/2$. При различных λ высоты $< n/2$ неприводимые SO_n -модули $V(\lambda)$ попарно неизоморфны, поскольку имеют разные старшие веса относительно $T_{[n/2]} \subset SO_n$.

При $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. если $\text{ht } \lambda = n/2$ (и n чётно), изоморфизм $V(\lambda) \xrightarrow{\sim} V(\lambda) \otimes \det$, построенный в доказательстве леммы 33, инволютивен. Его собственные подпространства (с собственными значениями ± 1) — это и есть два неприводимых SO_n -подмодуля $V_{\pm}(\lambda) \subset V(\lambda)$. Обозначения выберем так, что $V_+(\lambda) \ni e_{\lambda}$ (собственное значение $(-1)^{[n/4]}$), а $V_-(\lambda)$ содержит вектор $e_{\lambda^-} = \tau e_{\lambda}$ следующего по старшинству веса $\lambda^- = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{n}{2}-1}, -\lambda_{\frac{n}{2}})$.

В итоге получаем следующую классификацию:

Теорема 24. *Неприводимые представления $SO_n(\mathbb{C})$ реализуются в пространствах $V(\lambda)$, где λ — диаграмма Юнга высоты $< n/2$, и (при чётном n) в $V_{\pm}(\lambda)$,*

где λ — диаграмма высоты $n/2$. Перечисленные представления попарно не изоморфны.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Классические группы содержатся в более широком классе редуктивных групп Ли, и многие факты теории классических групп и их представлений могут быть лучше поняты в более общем контексте редуктивных групп. В приложениях мы изложим основные результаты теории редуктивных групп и их линейных представлений, как правило, опуская доказательства, но иллюстрируя их на примере классических групп. Полное изложение можно найти, например, в [ВО, гл. 4–5].

1. Группы Ли. Нам понадобятся начальные понятия теории групп и алгебр Ли. Напомним их вкратце, отсылая читателя за более подробным изложением к [Ви, гл. 12], см. также [ВО, гл. 1], [FH, Part II].

Пусть V — n -мерное векторное пространство над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} . *Линейная группа Ли* (вещественная или комплексная) — это подгруппа $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$, являющаяся одновременно дифференцируемым подмногообразием (вещественным или комплексным) в пространстве $L(V)$. Стандартные понятия теории групп (подгруппа, гомоморфизм, изоморфизм, и т. д.) адаптируются к группам Ли, если дополнительно потребовать согласованности со структурой многообразия (подгруппы должны быть подмногообразиями, гомоморфизмы — дифференцируемыми, и т. п.).

Касательное пространство к G в E замкнуто относительно операции коммутирования линейных операторов $[X, Y] = XY - YX$ и следовательно, обладает структурой алгебры Ли. Оно называется *касательной алгеброй* группы Ли G и обозначается \mathfrak{g} , согласно традиции, по которой группы Ли обозначаются прописными латинскими буквами, а их касательные алгебры Ли — соответствующими строчными готическими буквами. В дальнейшем мы будем придерживаться этой традиции по умолчанию.

Группа Ли G задаётся, как правило, уравнениями на матричные элементы, а уравнения \mathfrak{g} получаются дифференцированием уравнений G в E .

Пример 11. Касательная алгебра группы $\mathrm{GL}(V)$ есть алгебра всех линейных операторов: $\mathfrak{gl}(V) = L(V)$. Дифференцирование в $g = E$ уравнения $\det g = 1$, задающего группу Ли $\mathrm{SL}(V)$, даёт её касательную алгебру

$$\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{tr} X = 0\}.$$

Пример 12. Группа $\mathrm{O}(V)$ или $\mathrm{Sp}(V)$ линейных операторов, сохраняющих скалярное или кососкалярное умножение ω на V , является группой Ли. На матричном языке она задаётся уравнением

$$g^\top \Omega g = \Omega,$$

где Ω — матрица ω в данном базисе. Дифференцируя это уравнение при $g = E$, получаем уравнение

$$X^\top \Omega + \Omega X = 0,$$

задающее касательную алгебру $\mathfrak{o}(V)$ или, соответственно, $\mathfrak{sp}(V)$. Поскольку $\mathrm{SO}(V) = \mathrm{O}(V) \cap \mathrm{SL}(V)$ совпадает с $\mathrm{O}(V)$ в окрестности E (в которой $\det > 0$), их касательные алгебры равны: $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{o}(V)$. Это видно и из матричного уравнения $\mathfrak{o}(V)$ — из него автоматически следует $\mathrm{tr} X = 0$.

Пример 13. Группа $U(V)$ унитарных операторов в эрмитовом пространстве V является *вещественной* группой Ли, её касательная алгебра $\mathfrak{u}(V)$ состоит из всех косоэрмитовых операторов (ср. пример 12). Группа $U(V)$ *компактна*, так как замкнута и ограничена в пространстве $L(V)$ (это видно из её матричного задания).

Обратная связь между алгеброй Ли и группой Ли даётся *экспоненциальным отображением* \exp (экспонента линейного оператора определяется, как обычно, при помощи степенного ряда). Можно доказать, что \exp отображает \mathfrak{g} в G и осуществляет диффеоморфизм окрестностей $0 \in \mathfrak{g}$ и $E \in G$. Несложно показать, что *связная* группа Ли порождается (как абстрактная группа) любой своей окрестностью единицы, а значит, однозначно восстанавливается по своей касательной алгебре Ли.

Переход от группы Ли к алгебре Ли и обратно сильно упрощает многие вопросы теории групп Ли, сводя их, по существу, к линейной алгебре. Это ярко проявляется в теории представлений групп Ли.

Представление группы Ли — это дифференцируемый гомоморфизм $R : G \rightarrow GL(W)$. Его дифференциал в единице $dR : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ — представление алгебры Ли. Имеет место формула:

$$R(\exp X) = \exp dR(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Она позволяет восстановить представление G по представлению \mathfrak{g} , по крайней мере, если G связна.

Замечание. Не всякое представление алгебры Ли \mathfrak{g} , т.е. гомоморфизм $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ (= линейное отображение, перестановочное с операцией коммутирования) происходит из представления G . Это верно, если G связна и односвязна.

Пример 14. С каждой группой Ли канонически связано *присоединённое представление* $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$, определяемое следующим образом. Операция сопряжения $x \mapsto gxg^{-1}$ — диффеоморфизм G , оставляющий E на месте. Дифференцируя его при $x = E$, получаем линейное преобразование касательного пространства $\text{Ad}(g) \in GL(\mathfrak{g})$, определяемое той же формулой $\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}$, $\forall g \in G, X \in \mathfrak{g}$. Дифференцируя эту формулу по g при $g = E$, получаем *присоединённое представление алгебры Ли* $\text{ad} = d\text{Ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\text{ad}(Y)X = [Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ (именно это рассуждение и доказывает, что \mathfrak{g} замкнута относительно коммутирования).

Представления R и dR тесно связаны между собой. Например, всякое $R(G)$ -инвариантное подпространство будет и $dR(\mathfrak{g})$ -инвариантным. Верно и обратное, если G связна.

2. Редуктивные группы. Отныне будем считать V комплексным векторным пространством, а G — комплексной группой Ли (если не оговорено противное).

Вещественная подгруппа Ли $K \subset G$ называется *вещественной формой* G , если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$ и K пересекает все связные компоненты G .

Пример 15. Группа $GL_n(\mathbb{C})$ имеет вещественные формы $GL_n(\mathbb{R})$ и $U_n(\mathbb{C})$ (группа унитарных матриц).

Одно из возможных определений редуктивной группы состоит в следующем:

Определение 11. Комплексная линейная группа Ли $G \subset GL(V)$ *редуктивна*, если она обладает компактной вещественной формой K .

Можно доказать, что все компактные формы редуктивной группы G сопряжены друг с другом элементами G .

На V можно ввести K -инвариантное эрмитово скалярное умножение [Ви, гл. 11, §2], так что $K \subseteq U(V)$.

Напомним понятие *полярного разложения* [Ви, гл. 6, §3]: любой невырожденный линейный оператор $g \in GL(V)$ однозначно разлагается в произведение $g = g_u g_p$, где g_u — унитарный, а g_p — положительно определённый эрмитов оператор. Более того, \exp диффеоморфно отображает пространство $iu(V)$ эрмитовых операторов на открытое подмножество положительно определённых операторов, а операция умножения осуществляет диффеоморфизм

$$U(V) \times \exp iu(V) \xrightarrow{\sim} GL(V).$$

Лемма 35. $G = K \cdot \exp(i\mathfrak{k}) \simeq K \times \mathfrak{k}$

Доказательство. Подмножество $K \cdot \exp(i\mathfrak{k}) \subseteq G$ замкнуто и открыто, поскольку их касательные пространства в E совпадают: $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. Следовательно, оно является объединением нескольких связных компонент G , а K пересекает все связные компоненты. \square

Следствие 1. G восстанавливается по своей компактной форме K .

Следствие 2. G замкнута относительно эрмитова сопряжения и полярного разложения: $g \in G \implies g^*, g_u, g_p \in G$.

Замечание. Лемму 35 можно обратить: для любой $G \subseteq GL(V)$ разложение $G = K \cdot \exp(i\mathfrak{k})$ для некоторой $K \subseteq U(V)$ означает, что $K = G \cap U(V)$ является компактной вещественной формой G .

Пример 16. Все конечные группы редуктивны (здесь $K = G$).

Пример 17. Все классические группы редуктивны. Группы $GL(V)$ и $SL(V)$ имеют компактные формы $U(V)$ и $SU(V) = U(V) \cap SL(V)$, соответственно.

Для ортогональной и симплектической групп следует выбрать эрмитово скалярное умножение на V так, чтобы ортонормированный или симплектический базис для ω был одновременно ортонормированным в эрмитовом смысле. Тогда для $G = O(V)$ или $Sp(V)$ справедливо утверждение следствия 2: в обозначениях примера 12, $g \in G \iff g = \Omega^{-1}(g^T)^{-1}\Omega$, откуда, пользуясь унитарностью матрицы Ω в выбранном базисе и единственностью полярного разложения, получаем аналогичное уравнение на g_u, g_p и $g^* = g_p g_u^{-1}$. Более того, записав $g_p = \exp X$ для некоторого однозначно определённого эрмитова оператора X , мы видим, что $X = -\Omega^{-1}X^T\Omega \in \mathfrak{g}$ (справа тоже эрмитов оператор с экспонентой g_p). Поэтому к G применимо обращение леммы 35 (см. замечание выше).

На матричном языке, компактной формой $O_n(\mathbb{C})$ будет $O_n(\mathbb{R})$, а компактной формой $Sp_n(\mathbb{C})$ — так называемая *кватернионная симплектическая* (или *унитарная*) группа $Sp_{n/2}(\mathbb{H}) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U_n(\mathbb{C})$. Название связано с тем, что $Sp_{n/2}(\mathbb{H})$ содержится в группе невырожденных кватернионных матриц $GL_{n/2}(\mathbb{H})$, вложенной в $GL_n(\mathbb{C})$, если кватернионы задавать комплексными (2×2) -матрицами специального вида [Ви, гл. 1, §9, зад. 4]. Компактной формой $SO_n(\mathbb{C})$ является $SO_n(\mathbb{R})$.

Упражнение 29. Докажите, что группы $GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C}), SO_n(\mathbb{C}), Sp_n(\mathbb{C})$ связны, а $O_n(\mathbb{C})$ — нет.

Пример 18. Алгебраический тор $T_n \simeq \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$ (n раз) редуکتивен. Название мотивировано тем, что компактной формой T_n является n -мерный тор $T_n \cap U_n(\mathbb{C}) \simeq S^1 \times \cdots \times S^1$, где $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ — единичная окружность.

Алгебраические торы играют ключевую роль в описании структуры редуکتивных групп и их касательных алгебр Ли. В каждой редуکتивной группе размерности > 0 (т.е. бесконечной) есть алгебраический тор, а все максимальные (по включению) торы сопряжены.

Рассмотрим *связную* редуکتивную группу G . Зафиксируем в G максимальный тор $T \simeq T_r$. Его размерность r называется *рангом* G . Можно доказать, что T имеет конечный индекс в своём нормализаторе $N_G(T)$. Факторгруппа $W = N_G(T)/T$ (конечного порядка) называется *группой Вейля*.

Всякое линейное представление T диагоналізуемо (следствие теоремы 26), а значит, разлагается в прямую сумму весовых подпространств, на каждом из которых T действует умножением на вес $T \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Любой гомоморфизм $T_r \rightarrow \mathbb{C}^\times$ имеет вид $t = (t_1, \dots, t_r) \mapsto t^\lambda := t_1^{\lambda_1} \cdots t_r^{\lambda_r}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$. Поэтому веса T образуют решётку $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^r$. На ней естественно действует группа Вейля целочисленными линейными преобразованиями по правилу: $t^{w\lambda} = (g^{-1}tg)^\lambda, \forall w = gT \in W$. На Λ можно ввести W -инвариантное скалярное умножение (\cdot, \cdot) .

В частности, рассмотрим ограничение на T присоединённого представления $\text{Ad} : T \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$.

Теорема 25. *Имеет место так называемое корневое разложение:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\Delta \subset \Lambda \setminus 0$ — множество ненулевых весов T в присоединённом действии на \mathfrak{g} , называемых корнями, а соответствующие весовые подпространства \mathfrak{g}_α , называемые также корневыми, одномерны.

Система корней Δ редуکتивной группы G обладает замечательными комбинаторно-геометрическими свойствами: она симметрична относительно 0, W -инвариантна и удовлетворяет важному условию целочисленности: $2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \lambda \in \Lambda, \alpha \in \Delta$. Более того, образ W в $\text{GL}(\Lambda)$ порождается отражениями вдоль корней

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Можно доказать, что пара (Λ, Δ) с перечисленными свойствами определяет G однозначно с точностью до изоморфизма. Конечные системы векторов в решётках со скалярным умножением, обладающие перечисленными свойствами, можно классифицировать, что ведёт к классификации связных редуکتивных групп.

Пример 19. Рассмотрим $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Стандартный максимальный тор $T = T_n$ состоит из всех невырожденных диагональных матриц. Его нормализатор $N_G(T)$ состоит из всех мономиальных матриц (т.е. в каждой строке и в каждом столбце ровно один ненулевой элемент). В самом деле, $N_G(T)$ должен переставлять весовые подпространства T в \mathbb{C}^n , т.е. координатные оси. Поэтому $W \simeq S_n$.

Фиксируем в $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ стандартный базис $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, так что $t^{\varepsilon_i} = t_i$. Группа W действует на Λ перестановками базисных векторов, и стандартное скалярное умножение $(\lambda, \mu) = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n$ инвариантно.

Корневые подпространства в $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ порождаются матричными единицами E_{ij} , а соответствующие корни суть $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ ($i \neq j$). Корневые отражения $r_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ соответствуют транспозициям $(ij) \in S_n$.

Пример 20. Случай $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ не сильно отличается от предыдущего. Максимальный тор $T = T_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ состоит из всех унимодулярных диагональных матриц. Его нормализатор и группа Вейля $W \simeq S_n$ описываются так же, как в предыдущем примере, с учетом условия $\det = 1$.

Веса T получаются ограничением весов T_n , поэтому Λ канонически отождествляется с факторрешёткой \mathbb{Z}^n по $\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$. Образы векторов ε_i (обозначаемые теми же буквами) порождают Λ , но уже не составляют базис — их сумма равна 0. Инвариантное скалярное умножение индуцировано с ортогонального дополнения к $\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$. Корни и корневые подпространства — такие же, как в примере 19.

Упражнение 30. Вычислите $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$.

Пример 21. В ортогональном и симплектическом случаях удобно выбрать в пространстве V гиперболический или симплектический базис, как в пп. 6.2–6.3, и рассматривать матричные реализации $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ в этом базисе. Тогда $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ состоит из всех матриц, кососимметрических относительно побочной диагонали, а $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ — из всех матриц вида

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}, \quad A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_{n/2},$$

где B, C симметричны относительно побочной диагонали, а A и D кососимметричны друг другу (проверьте это!).

Стандартные максимальные торы в $G = \mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ имеют вид $T = T_n \cap G \simeq T_r$, $r = [n/2]$; они описаны в пп. 6.2–6.3. Их максимальность можно доказать так: любой элемент большего тора обязан коммутировать с T , а значит, сохранять весовые подпространства $\mathbb{C}e_i$, т.е. лежать в T_n .

Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ — стандартный базис $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^r$. Система корней состоит из $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($i \neq j$), а также $\pm\varepsilon_i$ для $G = \mathrm{SO}_{2r+1}$ и $\pm 2\varepsilon_i$ для $G = \mathrm{Sp}_n$ (проверьте это!). Как и в примере 19, $N_G(T)$ переставляет координатные оси, а значит, W переставляет их веса $\pm\varepsilon_i$. Отсюда вытекает, что стандартное скалярное умножение на Λ инвариантно.

Упражнение 31. Вычислите W для $G = \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_n$.

3. Представления редуктивных групп.

Теорема 26. *Представления редуктивных групп вполне приводимы.*

Доказательство. Редуктивная группа G и её компактная форма K имеют одни и те же инвариантные подпространства: из K -инвариантности следует инвариантность относительно \mathfrak{k} и $i\mathfrak{k}$, а значит, и G -инвариантность, по лемме 35. С другой стороны, на пространстве представления существует K -инвариантное эрмитово скалярное умножение, поэтому каждое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение — а именно, ортогональное дополнение. Этот приём доказательства принадлежит Г. Вейлю и носит название “унитарный трюк”. \square

Следствие. *Всякое представление алгебраического тора диагонализуемо.*

Доказательство. Оно разлагается в прямую сумму неприводимых, а неприводимые представления абелевых групп одномерны.

Почитательно дать независимое доказательство следствия, не использующее существование инвариантного эрмитова скалярного умножения. У алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ и компактного тора $(S^1)^n$ одни и те же инвариантные подпространства в любом линейном представлении. Элементы конечного порядка в $(S^1)^n$ образуют плотное подмножество (достаточно рассмотреть S^1) и одновременно диагонализуются в любом линейном представлении (поскольку диагонализуются по отдельности и коммутируют). По непрерывности, всё представление $(S^1)^n$, а значит, и $(\mathbb{C}^\times)^n$ диагонализуемо. \square

Вектор $v \neq 0$ в линейном представлении R группы H называется *весовым*, если он собственный для всех $h \in H$, т.е. $R(h)v = \chi(h)v$ для некоторой функции (как легко проверить, гомоморфизма) $\chi : H \rightarrow \mathbb{C}^\times$, называемой *весом*.

Таким образом в любом линейном представлении алгебраического тора существует базис из весовых векторов.

Как и в п. 3.2, назовём линейное представление R редуктивной группы $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *полиномиальным* (*рациональным*), если его матричные элементы $r_{ij}(g)$ являются многочленами от матричных элементов $g \in G$ (соответственно, рациональными функциями со степенями $\det g$ в знаменателе). Всякое рациональное представление становится полиномиальным после подкрутки на $\otimes \det^k$.

Теорема 27. *Все дифференцируемые представления редуктивных групп рациональны.*

Следствие. *Все дифференцируемые представления классических групп SL_n , O_n , SO_n , Sp_n полиномиальны.*

Доказательство. На этих группах \det принимает значения ± 1 , поэтому деление на \det можно заменить умножением. \square

Теорема 28. *Всякое полиномиальное представление G можно вложить в прямую сумму нескольких пространств вида $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$.*

Доказательство. Идея та же, что и в п. 3.2 — с помощью матричных элементов строим вложение пространства представления в $\mathbb{C}[G] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[G]$, где $\mathbb{C}[G] \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]/\mathbb{I}(G)$ — алгебра многочленов на Mat_n , ограниченных на G . Пользуясь полной приводимостью представлений G , мы можем поднять это вложение в $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]$ (хотя это пространство бесконечномерно, оно является прямой суммой конечномерных инвариантных подпространств однородных многочленов, которые вполне приводимы по теореме 26). Пространство $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]$ вкладывается в прямую сумму пространств $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$. \square

Замечание. Для полиномиальных представлений классических групп инвариантное эрмитово скалярное умножение можно построить, отправляясь от инвариантного эрмитова скалярного умножения на \mathbb{C}^n — оно индуцирует инвариантное эрмитово скалярное умножение на $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$. Это позволяет “заткнуть дырку” в доказательстве теоремы 26.

Перейдём к описанию неприводимых представлений связной редуктивной группы G .

Фиксируем максимальный тор $T \subseteq G$ и рассмотрим соответствующую систему корней $\Delta \subset \Lambda$. Любая гиперплоскость в вещественном векторном пространстве, натянутом на решётку Λ , не содержащая корней, разбивает Δ на

две симметричные половины Δ^+ и Δ^- (положительные и отрицательные корни). Вес $\lambda \in \Lambda$ называется доминантным, если $(\lambda, \alpha) \geq 0, \forall \alpha \in \Delta^+$.

Подалгебра

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$$

называется подалгеброй Бореля. Она является касательной алгеброй максимальной связной разрешимой подгруппы Ли $B \subseteq G$ (подгруппы Бореля). Все борелевские подалгебры и подгруппы сопряжены.

Теорема 29. *Неприводимый G -модуль содержит единственный с точностью до пропорциональности вектор v_λ , весовой относительно B доминантного веса λ относительно $T \subseteq B$. Вектор v_λ называется старшим вектором, а λ — старшим весом. Веса остальных T -весовых векторов имеют вид $\lambda - \alpha_1 - \dots - \alpha_k$, где $\alpha_i \in \Delta^+$. Для всякого доминантного веса λ существует единственный с точностью до изоморфизма неприводимый G -модуль $V(\lambda)$ со старшим весом λ .*

Пример 22. Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Гиперплоскость в $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle_{\mathbb{R}}$ не содержит корней тогда и только тогда, когда все координаты вектора нормали ν попарно различны. Возьмём, например, $\nu = (n, n-1, \dots, 1)$. Тогда положительными корнями (лежащими в одном полупространстве с ν) будут $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ при $i < j$. Доминантные веса суть $\lambda \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Борелевская подалгебра $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_n$ состоит из всех верхнетреугольных матриц, борелевская подгруппа $B = B_n$ — из всех невырожденных верхнетреугольных матриц. Неприводимые модули $V(\lambda)$ описаны в теореме 8, их T -веса — в п. 4.1, старшие векторы суть

$$e_\lambda = (e_1 \wedge \dots \wedge e_{\mu_1}) \otimes \dots \otimes (e_1 \wedge \dots \wedge e_{\mu_l}),$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ — разбиение, транспонированное к $\lambda + (k^n)$ ($k \gg 0$).

Случай $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ совершенно аналогичен, ср. п. 6.1.

Пример 23. Пусть $G = \mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$. Как мы видели в примере 21, решётка весов максимального тора изоморфна $\mathbb{Z}^r, r = [n/2]$, со стандартным базисом $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$. Гиперплоскость в $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \rangle_{\mathbb{R}}$ с вектором нормали ν не содержит корней тогда и только тогда, когда $|\nu_i| \neq |\nu_j|$, а также $|\nu_i| \neq 0$ для $G = \mathrm{SO}_{2r+1}, \mathrm{Sp}_{2r}$, при всех $i \neq j$. Взяв $\nu = (r, \dots, 1)$, получим положительные корни $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, i < j$, а также ε_i для $G = \mathrm{SO}_{2r+1}$ и $2\varepsilon_i$ для $G = \mathrm{Sp}_n$. Доминантные веса $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ задаются условием $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$ для $G = \mathrm{SO}_{2r+1}, \mathrm{Sp}_{2r}$ и $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{r-1} \geq |\lambda_r|$ для $G = \mathrm{SO}_{2r}$.

Легко убедиться (проделайте это!), что $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{g}$ и $B = B_n \cap G$ состоят из всех верхнетреугольных матриц, лежащих в соответствующей классической алгебре или группе Ли.

Неприводимые G -модули со старшим весом λ можно описать так. Если $G = \mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, а также $G = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$ и $\lambda_r = 0$, то это модули $V(\lambda)$, определённые в пп. 6.2–6.3, со старшими векторами e_λ . В случае $G = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$, $\lambda_r > 0$ это $V_+(\lambda)$, а при $\lambda_r < 0$ — $V_-(\lambda^+)$, где $\lambda^+ = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, |\lambda_r|)$. Старшими векторами будут e_λ и τe_{λ^+} , соответственно.

Основная информация о представлении $R : G \rightarrow \mathrm{GL}(M)$ содержится в его характере $\mathrm{ch}_M(t) = \mathrm{tr} R(t), t \in T$. Характеры являются многочленами Лорана от координат t_1, \dots, t_r в $T \simeq T_r$, их можно рассматривать как элементы групповой алгебры $\mathbb{C}[\Lambda]$.

Лемма 36. *Характеры представлений W -инвариантны.*

Доказательство аналогично лемме 16: ch_M инвариантен относительно действия $N_G(T)$ сопряжениями аргумента, что сводится к действию W на Λ .

Теорема 30. *Характеры неприводимых представлений $\text{ch}_{V(\lambda)}$ образуют базис алгебры $\mathbb{C}[\Lambda]^W$.*

Отсюда, как и в п. 4.1, можно вывести, что представления однозначно определяются своими характеристиками.

Поскольку неприводимое представление G в $V(\lambda)$ определяется своим старшим весом λ , его характер $\text{ch}_{V(\lambda)}$ должен восстанавливаться по λ . Явная формула принадлежит Г. Вейлю.

Обозначим $A(\lambda) = \sum_{w \in W} (\text{sgn } w) t^{w\lambda}$, где $\text{sgn } w$ — определитель соответствующего ортогонального преобразования Λ (равный ± 1). Также обозначим через ρ полусумму положительных корней. Можно доказать, что $(\rho, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta^+$.

Формула Вейля для характера. $\text{ch}_{V(\lambda)} = A(\lambda + \rho)/A(\rho)$

Замечание. Равенство сохранится, если к ρ прибавить произвольный вектор $\nu \perp \Delta$ (числитель и знаменатель домножатся на t^ν).

Из формулы для характера выводится

Формула Вейля для размерности.

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

Пример 24. Пусть $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Легко подсчитать, что вектор ρ имеет координаты $\rho_i = \frac{n+1}{2} - i$. Прибавляя к нему $\nu = (\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2})$, получаем вектор $\tilde{\rho} = (n-1, \dots, 1, 0)$. Очевидно, $A(\lambda)$ — не что иное как развернутое выражение для определителя $a(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ из п. 4.3. Поэтому формула Вейля $\text{ch}_{V(\lambda)} = A(\lambda + \tilde{\rho})/A(\tilde{\rho})$ превращается в формулу Якоби–Труди. Формула Вейля для размерности превращается в теорему 15. Для $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ все то же самое.

Упражнение 32. Вычислите характеры и размерности неприводимых представлений $\text{SO}_n(\mathbb{C})$ и $\text{Sp}_n(\mathbb{C})$.

Формула Вейля для характера позволяет выписать общие формулы для разложения $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ на неприводимые слагаемые или, что эквивалентно, произведения $\text{ch}_{V(\lambda)} \cdot \text{ch}_{V(\mu)}$ в линейную комбинацию характеров $\text{ch}_{V(\nu)}$ (формула Стейнберга [FH, §25.3] и др.), однако они малоэффективны, поскольку в них присутствуют члены разных знаков и возможно большое количество сокращений. Есть и более эффективные формулы (например, так называемая “формула трёх индусов”, см. формулу (Ф11) в справочном разделе [BO]), которые особенно хорошо работают в том случае, когда один из модулей $V(\lambda), V(\mu)$ устроен просто, напоминая этим формулы Пиери. Формулы Пиери и правило Литтлвуда–Ричардсона обобщаются на классические и некоторые другие редуктивные группы [Li].

4. Инварианты классических групп. Классическая теория инвариантов изучает инварианты наборов тензоров на исходном пространстве V относительно классических линейных групп $\text{GL}(V), \text{SL}(V), \text{O}(V), \text{SO}(V), \text{Sp}(V)$. Более точно, описываются многочлены на прямых суммах пространств тензоров, инвариантные относительно преобразований тензорных координат, индуцированных действием классической группы. С классической теорией инвариантов можно

познакомиться по книге Вейля [Ве]. Нам для приложений в §6 потребуется развить фрагмент этой теории, а именно описать инварианты наборов векторов относительно ортогональной и симплектической групп.

Теорема 31. Пусть $G = O(V)$ или $Sp(V)$ — группа линейных преобразований, сохраняющих невырожденную симметрическую или кососимметрическую билинейную форму ω на пространстве V . Алгебра $\mathbb{C}[V \oplus \dots \oplus V]^G$ инвариантных относительно G многочленов на прямой сумме t экземпляров V порождается многочленами $\omega_{ij}(v_1, \dots, v_m) = \omega(v_i, v_j)$ ($v_1, \dots, v_m \in V$), $i, j = 1, \dots, t$ (в ортогональном случае достаточно брать $i \leq j$, а в симплектическом — $i < j$).

Замечание. Эта теорема носит название “первой основной теоремы теории инвариантов” для ортогональной и симплектической групп. Аналогичный результат имеется и для других классических групп [Ве, гл. 2, 6], [ФН, App. F].

Доказательство. Объясним вначале идею.

На пространстве $V \oplus \dots \oplus V \simeq V \otimes (\mathbb{C}^m)^*$ помимо группы G действует GL_m . Действие матрицы $g \in GL_m$ сводится к замене наборов векторов их линейными комбинациями с матрицей перехода g^{-1} : $(v_1, \dots, v_m) \mapsto (v_1, \dots, v_m) \cdot g^{-1}$. Так как эти два действия коммутируют, GL_m действует и на $\mathbb{C}[V^{\oplus m}]^G$.

Из теории представлений полной линейной группы нам известно, что представление GL_m в $\mathbb{C}[V^{\oplus m}]^G$ вполне приводимо и в каждом неприводимом подмодуле имеется многочлен, инвариантный относительно U_m и весовой относительно T_m с доминантным весом. Такие многочлены назовём *примитивными инвариантами*.

Достаточно доказать, что алгебра, порождённая многочленами ω_{ij} , инвариантна относительно GL_m и содержит все примитивные инварианты.

Заметим, что ω_{ij} образуют матрицу Грама Ω набора векторов (v_1, \dots, v_m) . Под действием $g \in GL_m$ она преобразуется так: $\Omega \mapsto g^T \Omega g$ (рассматривая Ω как функцию от (v_1, \dots, v_m) , по общему правилу на аргумент следует действовать обратным преобразованием g^{-1}). Следовательно, ω_{ij} переходят в их линейные комбинации, и значит, порождённая ими подалгебра GL_m -инвариантна.

Для нахождения примитивных инвариантов можно применить идею сечения — одну из самых плодотворных в теории инвариантов. Под *сечением* понимается подмножество S в пространстве линейного представления данной группы G , пересекающее все орбиты этой группы или хотя бы орбиты из некоторого плотного открытого подмножества. Поскольку инвариантные многочлены постоянны на орбитах и непрерывны, они однозначно определяются ограничением на S . Более того, если S инвариантно относительно некоторой подгруппы $H \subset G$, то ограничения G -инвариантных многочленов на S будут H -инвариантны. Если удаётся описать алгебру H -инвариантов на S (что может быть проще исходной задачи нахождения G -инвариантов, поскольку действует меньшая группа на меньшем множестве) и показать, что её образующие являются ограничениями G -инвариантов, то эти последние порождают алгебру G -инвариантных многочленов на исходном пространстве.

Примитивные инварианты инвариантны относительно $G \times U_m$. Построим сечение S для действия этой группы на пространстве $V^{\oplus m}$. Рассмотрим по отдельности ортогональный и симплектический случаи. Для краткости обозначим $n = \dim V$, $r = \min(m, n)$.

Ортогональный случай. Рассмотрим в $V^{\oplus m}$ плотное открытое подмножество, состоящее из наборов векторов, у которых все угловые миноры матрицы Грама

Ω размера $\leq r$ ненулевые. Такие наборы можно ортогонализировать действием U_m (это не что иное как процесс ортогонализации Грама–Шмидта). Ортогонализированный набор векторов действием $O(V)$ можно привести к виду (x_1e_1, \dots, x_me_m) в случае $m \leq n$ и $(x_1e_1, \dots, x_ne_n, 0, \dots, 0)$ в случае $m > n$, где e_1, \dots, e_n — фиксированный ортонормированный базис V . Множество всех таких наборов и есть искомое сечение S . Заметим, что оно инвариантно относительно $H \times T_m$, где $H \subset O_n$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому примитивные инварианты при ограничении на S переходят в многочлены, инвариантные относительно H и весовые относительно T_m с доминантными весами. Такие многочлены суть одночлены $x_1^{2k_1} \dots x_r^{2k_r}$, $k_1 \geq \dots \geq k_r \geq 0$. Любой одночлен указанного вида однозначно продолжается до примитивного инварианта $\Delta_1^{k_1-k_2} \dots \Delta_{r-1}^{k_{r-1}-k_r} \Delta_r^{k_r}$, где Δ_i — угловые миноры Ω (при ограничении на S дающие $x_1^2 \dots x_i^2$). Таким образом, мы нашли все примитивные инварианты и убедились, что они выражаются через ω_{ij} .

Симплектический случай. Рассмотрим в $V^{\oplus m}$ плотное открытое подмножество, состоящее из наборов векторов, из которых первые r линейно независимы и все чётные угловые миноры Ω размера $\leq r$ ненулевые. Такой набор (v_1, \dots, v_m) действием U_m , т.е. вычитая из v_j линейную комбинацию предыдущих, можно привести к виду, в котором $\omega_{ij} \neq 0$ лишь при $i = 2k - 1$, $j = 2k \leq n$ и $v_j = 0$ при $j > n$. В частности, ненулевые v_j пропорциональны векторам симплектического базиса, и действием $Sp(V)$ можно преобразовать (v_1, \dots, v_m) в начальный отрезок длины m последовательности вида $(e_1, x_1e_2, \dots, e_{n-1}, x_{n/2}e_n, 0, 0, \dots)$, где e_1, \dots, e_n — фиксированный симплектический базис V , в котором матрица ω имеет вид:

$$\Omega_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие наборы (e_1, x_1e_2, \dots) длины m образуют искомое сечение S . Оно инвариантно относительно подгруппы $H \subset T_m$, состоящей из диагональных матриц с 1 на нечётных позициях.

Чтобы описать примитивные инварианты, нам потребуется вспомнить понятие пфаффиана кососимметрической матрицы [Ви, гл. 8, §4, с. 340]. Пусть A — произвольная кососимметрическая $(n \times n)$ -матрица. Она определяет бивектор $\alpha = \sum_{i < j} a_{ij}e_i \wedge e_j$ на V . Тогда $\alpha \wedge \dots \wedge \alpha$ ($n/2$ раз) пропорционально $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ с коэффициентом $(n/2)! \cdot \text{pf } A$, где $\text{pf } A$ — некий целочисленный многочлен от элементов матрицы A , называемый её *пфаффианом*. Под действием $g \in GL_n$ матрица A переходит в gAg^T , а $\text{pf } A$ умножается на $\det g$. Поскольку любая невырожденная кососимметрическая матрица имеет вид $A = g\Omega_n g^T$, а $\text{pf } \Omega_n = \det \Omega_n = 1$ (как легко посчитать), получаем, что $\det A = (\text{pf } A)^2$. Этот вывод сохраняет силу и для вырожденных матриц (левая и правая части равны 0).

Ограничения примитивных инвариантов на S суть многочлены, весовые относительно H , т.е. одночлены $x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s}$, $s \leq r/2$, причем доминантность веса примитивного инварианта влечёт $k_1 \geq \cdots \geq k_s \geq 0$. Любой одночлен указанного вида однозначно продолжается до примитивного инварианта $P_1^{k_1-k_2} \cdots P_{s-1}^{k_{s-1}-k_s} P_s^{k_s}$, где P_i — пфаффиан угловой подматрицы Ω размера $2i \times 2i$ (при ограничении на S дающий $x_1 \cdots x_i$). Все найденные примитивные инварианты выражаются через ω_{ij} . \square

Классическая теория инвариантов позволяет описать G -эквивариантные, т.е. перестановочные с действием G , линейные преобразования пространства $V^{\otimes m}$. Среди них можно сразу указать запас элементарных эндоморфизмов, определяемых при помощи тензорных операций. *Элементарный эндоморфизм* — это композиция полной свёртки с $\omega \otimes \cdots \otimes \omega$, тензорного домножения на $\omega^* \otimes \cdots \otimes \omega^*$, где ω^* — 2-тензор, двойственный ω , и некоторой перестановки индексов.

Следствие. *Все G -эквивариантные эндоморфизмы $V^{\otimes m}$ суть линейные комбинации элементарных эндоморфизмов.*

Доказательство. G -эквивариантные линейные отображения $F : V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes m}$ можно отождествить с G -инвариантными линейными функциями на $V^{\otimes m} \otimes (V^*)^{\otimes m}$, а те в свою очередь — с G -инвариантными полилинейными функциями f на $V^{\times m} \times (V^*)^{\times m}$, по правилу:

$$f(v_1, \dots, v_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m) = \langle F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m), \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \rangle, \quad \forall v_i \in V, \varphi_j \in V^*.$$

Поднимая индексы при помощи ω^* , можно превратить φ_j в $v_{m+j} \in V$, а f — в G -инвариантную полилинейную функцию на $V^{\times 2m}$. По теореме 31, все такие функции являются линейными комбинациями функций вида

$$f(v_1, \dots, v_{2m}) = \omega(v_{i_1}, v_{j_1}) \cdots \omega(v_{i_m}, v_{j_m}),$$

где $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m$ — некая перестановка чисел $1, \dots, 2m$.

При вычислении соответствующего отображения F , каждой паре индексов $i_k, j_k \leq m$ отвечает свёртка с ω по этой паре индексов, паре $i_k, j_k > m$ — домножение на ω^* с последующей перестановкой двух добавленных индексов на позиции $i_k - m, j_k - m$, а паре $i_k \leq m < j_k$ — перестановка $i_k \mapsto j_k - m$. \square

ЛИТЕРАТУРА

- [Ве] Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления*, Иностр. лит., Москва, 1947.
- [Ви] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, 3-е изд., Факториал, Москва, 2002.
- [ВО] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, Москва, 1988.
- [Гн] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, 6-е изд., Наука, Москва, 1988.
- [Дж] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп*, Математика: новое в зарубежной науке, т. 32, Мир, Москва, 1982.
- [Ма] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, Москва, 1984.
- [Фу] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, Москва, 2006.
- [Ша] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, 2-е изд., Наука, Москва, 1988.
- [FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [GNW] C. Greene, A. Nijenhuis, H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. Math. **31** (1979), 104–109.
- [Ли] P. Littelmann, *A generalization of the Littlewood–Richardson rule*, J. Alg. **130** (1990), 328–368.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

- 1: Представить A -модуль как гомоморфный образ свободного A -модуля.
- 2: $\lambda = (m - 1, 1)$. Использовать $\mathbb{C}^n \simeq Aa_\lambda$.
- 3: Отображение $\sigma \mapsto (\text{sgn } \sigma)\sigma$ ($\sigma \in S_m$) определяет автоморфизм алгебры A , отображающий Ac_{λ^\top} на Ac_λ^* и подкручивающий действие S_m на sgn .

4:

$$\sum_{i=l}^m (-1)^{i-l} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & l-1 & i \\ \hline l & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline m & & & \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{без } i$$

- 5: Удаление m из стандартной таблицы T приводит к стандартной таблице T' . Кроме того, $\Delta_T = \Delta_{T'} \prod_i (x_m - x_i)$, где i пробегает все числа в одном столбце с m . Взятие старшего коэффициента при x_m эпиморфно отображает линейную оболочку всех Δ_T с фиксированной позицией m в T на соответствующее $S(\lambda')$. Поэтому каждое $S(\lambda')$ входит в $S(\lambda)$. Остаётся сравнить размерности.
- 6: В обозначениях упражнения 5 имеем $\lambda = \bigcup \lambda'$, кроме случая, когда λ — прямоугольник.
- 7: Использовать упражнение 2 и правило ветвления.
- 8: При удалении из λ 1-го столбца $\dim U(\lambda)/|\lambda|$ поделится на $(m - 1) \cdots (m - k)/\ell_1 \cdots \ell_k$. Этот множитель почти всегда ≥ 1 (исключения: $\lambda = (m)$, (1^m) , $(2, 1^{m-2})$). Рассуждая по индукции, остаётся перебрать варианты, когда оставшаяся диаграмма задаётся одним из разбиений $(m - k)$, (1^{m-k}) , $(m - k - 1, 1)$, $(2, 1^{m-k-2})$, $(2, 2)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 3)$.
- 9: Пусть T — таблица формы $\lambda = \lambda^\top$, $\theta \in S_m$, $\theta(T) = T^\top$. Композиция автоморфизма алгебры A из упражнения 3 и умножения справа на θa_T отображает Ac_T в себя, подкручивая действие S_m на sgn . Его квадрат равен $(\text{sgn } \theta)q_\lambda \cdot E$.
- 10: $U(\lambda)$ или $U_\pm(\lambda)$, где λ — одна из диаграмм в упражнении 8 или

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

- 11: Неприводимые слагаемые: $S^m \mathbb{C}^n$ в кратности 1, $\dim = \binom{n+m-1}{m}$; $\bigwedge^m \mathbb{C}^n$ в кратности 1, $\dim = \binom{n}{m}$; при $m = 3$: $S^{(2,1)} \mathbb{C}^n$ в кратности 2, $\dim = \frac{n^3-n}{3}$; при $m = 4$: $S^{(3,1)} \mathbb{C}^n$ и $S^{(2,1,1)} \mathbb{C}^n$ в кратности 3; $S^{(2,2)} \mathbb{C}^n$ в кратности 2.
- 12: $S^T V \cdot c_{T^*}^* A = \bigoplus_\sigma V^{\otimes m} \cdot c_{T^*}^* \sigma^{-1}$ (по всем σ таким, что σT стандартна) $= \bigoplus_\sigma V^{\otimes m} \cdot \sigma^{-1} c_{\sigma T}^* = \bigoplus_\sigma S^{\sigma T} V$.
- 13: Естественное $\text{GL}(V)$ -инвариантное спаривание между $V^{\otimes m}$ и $(V^*)^{\otimes m}$ задаётся полной свёрткой $\langle w, \omega \rangle$ тензора $w \otimes \omega$, $\forall w \in V^{\otimes m}$, $\omega \in (V^*)^{\otimes m}$. Показать, что оно невырождено между $V^{\otimes m} \cdot c_\lambda^*$ и $(V^*)^{\otimes m} \cdot c_\lambda$, используя $\langle w \cdot a, \omega \rangle = \langle w, \omega \cdot a^* \rangle$, $\forall a \in A$.
- 14: $\lambda' = (-\lambda_n, \dots, -\lambda_1)$. Рассмотреть GL_n -инвариантное спаривание между $\bigwedge^{\mu_1} \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \bigwedge^{\mu_l} \mathbb{C}^n$ и $\bigwedge^{n-\mu_1} \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \bigwedge^{n-\mu_l} \mathbb{C}^n \otimes \det^{-l}$ по формуле $\langle w_1 \otimes \dots \otimes w_l, w'_1 \otimes \dots \otimes w'_l \rangle = (w_1 \wedge w'_1) \otimes \dots \otimes (w_l \wedge w'_l) / (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)^{\otimes l}$, где $\lambda^\top = (\mu_1, \dots, \mu_l)$. Показать, что оно ненулевое (а значит, невырождено) между неприводимыми подмодулями $S^\lambda \mathbb{C}^n$ и $S^{\lambda'+(l^n)} \mathbb{C}^n \otimes \det^{-l}$.
- 15: Аналогично упражнению 5, использовать разложение $D_T = D_{T'} x_{n,k_1} \cdots x_{n,k_s} + \dots$ как многочлена от x_{nj} ($j = 1, \dots, n$), где полустандартная таблица T' получается из полустандартной таблицы T удалением n (содержащегося в столбцах k_1, \dots, k_s) а пропущенные слагаемые содержат более старшие одночлены от x_{nj} .
- 16: 2^n орбит, задаваемых условиями $w_p = 0$ при $p = p_1, \dots, p_s$ (фиксированный набор индексов) и $w_p \neq 0$ при остальных p . Орбита лежит в образе, если p_1, \dots, p_s — последние s чисел из $1, \dots, n$.

20:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 4 & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array}$$

- 21: $\dim S^{(3,1)} \mathbb{C}^n = \frac{(n^3-n)(n+2)}{8}$; $\dim S^{(2,1,1)} \mathbb{C}^n = \frac{(n^3-n)(n-2)}{8}$; $\dim S^{(2,2)} \mathbb{C}^n = \frac{n^4-n^2}{12}$.
- 22: Использовать формулу для произведения длин крюков из п. 2.4.

- 23:** $\mathbb{S}^{(5,4,2)} \oplus \mathbb{S}^{(5,4,1^2)} \oplus \mathbb{S}^{(5,3^2)} \oplus (\mathbb{S}^{(5,3,2,1)})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{S}^{(5,3,1^3)} \oplus \mathbb{S}^{(5,2^3)} \oplus \mathbb{S}^{(5,2^2,1^2)} \oplus \mathbb{S}^{(4^2,3)} \oplus (\mathbb{S}^{(4^2,2,1)})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{S}^{(4^2,1^3)} \oplus (\mathbb{S}^{(4,3^2,1)})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{S}^{(4,3,2^2)})^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{S}^{(4,3,2,1^2)})^{\oplus 3} \oplus \mathbb{S}^{(4,3,1^4)} \oplus (\mathbb{S}^{(4,2^3,1)})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{S}^{(4,2^2,1^3)} \oplus \mathbb{S}^{(3^3,2)} \oplus \mathbb{S}^{(3^3,1^2)} \oplus (\mathbb{S}^{(3^2,2^2,1)})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{S}^{(3^2,2,1^3)} \oplus \mathbb{S}^{(3,2^4)} \oplus \mathbb{S}^{(3,2^3,1^2)}$.

24:

$$S' = \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & \end{array}, \quad T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & 4 & 5 & \\ 5 & & & \end{array}$$

25: 3.

26: Свёртка симметрического тензора с ω по любой паре индексов равна 0. Для 2-го утверждения показать, что свёртка с ω отображает $\bigwedge^m \mathbb{C}^n$ на $\bigwedge^{m-2} \mathbb{C}^n$ и применить индукцию по m .

27: Аналогично упражнению 26.

28: При отождествлении $S^m V \simeq S^m V^*$ опусканием индексов свёртка с ω переходит в оператор Лапласа.

29: Доказать связность компактных форм. Для $U_n(\mathbb{C})$ заметить, что любой унитарный оператор g диагонализуем в подходящем ортонормированном базисе, и можно непрерывно продеформировать его собственные значения в 1, сохраняя унитарность, т.е. соединить g кривой с E . Случай $SU_n(\mathbb{C})$ аналогичен. Для $Sp_{n/2}(\mathbb{H})$ дополнительно заметить, что симплектичность g равносильна тому, что собственные подпространства с собственными значениями λ, μ косоортогональны друг другу при $\lambda\mu \neq 1$ — это условие сохраняется при подходящей деформации. Для $SO_n(\mathbb{R})$ вместо диагонализуемости использовать каноническую форму матрицы собственного ортогонального оператора. На $O_n(\mathbb{C})$ непрерывная функция \det принимает ровно 2 значения ± 1 .

30: $(n-1)/n$ при $i=j$; $-1/n$ при $i \neq j$.

31: W изоморфна группе преобразований \mathbb{Z}^r , действующей перестановками и заменами знаков координат, в случае $G = SO_{2r}$ разрешаются замены знаков только у чётного числа координат.

32: Обозначим $\ell_i = \lambda_i + r - i$ и

$$a_{\pm}(\ell_1, \dots, \ell_r) = \begin{vmatrix} t_1^{\ell_1} \pm t_1^{-\ell_1} & \dots & t_r^{\ell_1} \pm t_r^{-\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1^{\ell_r} \pm t_1^{-\ell_r} & \dots & t_r^{\ell_r} \pm t_r^{-\ell_r} \end{vmatrix}.$$

Ответ:

	$\text{ch}_{V(\lambda)}$	$\dim V(\lambda)$
SO_{2r}	$\frac{a_-(\ell_1, \dots, \ell_r) + a_+(\ell_1, \dots, \ell_r)}{a_+(r-1, \dots, 1, 0)}$	$\prod_{i < j} \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i} \prod_{i < j} \frac{\ell_i + \ell_j}{2r - i - j}$
SO_{2r+1}	$\frac{a_-(\ell_1 + 1/2, \dots, \ell_r + 1/2)}{a_-(r-1/2, \dots, 3/2, 1/2)}$	$\prod_{i < j} \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i} \prod_{i \leq j} \frac{\ell_i + \ell_j + 1}{2r - i - j + 1}$
Sp_{2r}	$\frac{a_-(\ell_1 + 1, \dots, \ell_r + 1)}{a_-(r, \dots, 2, 1)}$	$\prod_{i < j} \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i} \prod_{i \leq j} \frac{\ell_i + \ell_j + 2}{2r - i - j + 2}$

Используя упражнение 31, вычислить:

$$A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn } \sigma \prod_i (t_i^{\lambda_{\sigma(i)}} - t_i^{-\lambda_{\sigma(i)}}) = a_-(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

для SO_{2r+1}, Sp_{2r} , и

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn } \sigma \frac{\prod_i (t_i^{\lambda_{\sigma(i)}} - t_i^{-\lambda_{\sigma(i)}}) + \prod_i (t_i^{\lambda_{\sigma(i)}} + t_i^{-\lambda_{\sigma(i)}})}{2} \\ &= \frac{a_-(\lambda_1, \dots, \lambda_r) + a_+(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{2} \end{aligned}$$

для SO_{2r} . Найти $\rho = (r-1, \dots, 1, 0)$, $(r-1/2, \dots, 3/2, 1/2)$ или $(r, \dots, 2, 1)$ для SO_{2r}, SO_{2r+1} и Sp_{2r} , соответственно.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- алгебра
 - групповая, 4
 - Ли, 52
 - касательная, 52
 - полупростая, 4
- алгоритм выпрямления, 12, 25
- вес, 30, 57
 - доминантный, 30, 58
 - старший, 30, 58
- весовое подпространство, 55
- весовой вектор, 30, 57
- вещественная форма, 53
- гармонический многочлен, 51
- группа
 - Вейля, 55
 - знакопеременная, 2
 - кватернионная
 - симплектическая, 54
 - унитарная, 54
 - классическая, 2
 - Ли (линейная), 52
 - ортогональная, 49
 - редуктивная, 53
 - симметрическая, 2
 - симплектическая, 47
 - унимодулярная, 2
 - унитарная, 53
- дефект, 40
- диаграмма Юнга, 6
 - высота, 6
 - косая, 38
- идемпотенты
 - неразложимые, 5
 - ортогональные, 5
- изотипная компонента, 4
- изотипное разложение, 4
- инверсия, 5
- комбинаторная лемма, 40
- компактная форма, 53
- координаты Плюккера, 27
- корень, 55
 - отрицательный, 58
 - положительный, 58
- корневое подпространство, 55
- корневое разложение, 55
- крюк, 13
 - длина, 13
- лексикографический порядок
 - на диаграммах Юнга, 8
 - на одночленах, 26, 30
 - на таблицах Юнга, 10, 12, 26
- обратный, 10, 12, 26
- лемма Сильвестра, 10
- матричные элементы, 22
- многообразия
 - алгебраическое, 28
 - дифференцируемое, 52
 - однородное, 28
 - флагов, 27
- многочлен Шура, 30
 - косой, 39
- модуль
 - Вейля, 20
 - транзитивно пермутационный, 9
 - Шпехта, 10
- мультиконус, 27
- оператор Лапласа, 51
- операция
 - составная, 41
 - уровень, 40, 41
 - элементарная, 40
- подалгебра Бореля, 58
- подгруппа Бореля, 58
- полный симметрический многочлен, 30
- поляризация, 21
- полярное разложение, 54
- правило
 - ветвления, 13, 26
 - Литтлвуда–Ричардсона, 38
 - Юнга, 9
- представление
 - группы Ли, 53
 - дифференцируемое, 53
 - полиномиальное, 22, 57
 - присоединённое
 - алгебры Ли, 53
 - группы Ли, 53
 - рациональное, 23, 57
 - регулярное, 4
- примитивный инвариант, 60
- путь вытеснения, 33
- пфаффиан, 61
- разбиение, 6
 - длина, 6
 - порядок, 6
- ранг редуктивной группы, 55
- решётка весов, 55
- сечение, 60
- симметризатор Юнга, 7
- слово
 - обратное решётчатое, 39
 - строчное, 39

- соотношения выпрямления, 11, 25
- стабилизатор таблицы Юнга
 - столбцовый, 6
 - строчный, 6
- стандартный базис
 - модуля Вейля, 26
 - модуля Шпехта, 12
- стандартный моном, 28
- старший вектор, 30, 58

- таблица Юнга, 6
 - косая, 38
 - обобщённая, 24
 - вес, 24
 - полустандартная, 24
 - стандартная, 6
 - форма, 6
- теорема Лапласа, 11
- тождество Коши, 43
- тор
 - алгебраический, 55
 - компактный, 55
 - максимальный, 55

- умножение
 - кососкалярное, 47
 - полустандартных таблиц, 32–33
 - скалярное, 49, 55
- унитарный трюк, 56

- флаг, 26
- формула
 - Вейля
 - для размерности, 59
 - для характера, 59
 - крюков, 14, 37
 - Якоби–Труди, 35
- формулы Пиери, 32
- функтор Шура, 20

- характер, 29, 58

- число
 - Костки, 30
 - Литтлвуда–Ричардсона, 39

- экспоненциальное отображение, 53
- эндоморфизм
 - эквивариантный, 62
 - элементарный, 62

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- (\cdot, \cdot) , скалярное умножение, 55
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, спаривание вектора с ковектором, 21, 22, 62, 63
 $\langle \dots \rangle_{\mathbb{K}}$, линейная оболочка над полем \mathbb{K} , 10, 21, 25, 28–29, 58
 \succ , лексикографический порядок, 8, 10, 12, 26, 31
 $[\cdot, \cdot]$, коммутатор, 52
 $\bigwedge^{\bullet} V$, внешняя алгебра, 11
 $\bigwedge^k V$, внешняя степень, 13, 20, 22, 25, 27–29, 31–32, 48–51, 63–64
 $A = \mathbb{C}G$, групповая алгебра, 4
 $a \mapsto a^*$, инволюция на групповой алгебре, 5
 $a(l_1, \dots, l_n) = \det(t_j^{l_i})_{i,j=1,\dots,n}$, 35
 A_m , знакопеременная группа, 2
 $A(\lambda)$, 59
 $a_{\lambda} = a_T$, элемент алгебры $\mathbb{C}S_m$, 7
 Ad , присоединённое представление группы Ли, 53
 ad , присоединённое представление алгебры Ли, 53
 B , подгруппа Бореля, 58
 \mathfrak{b} , подалгебра Бореля, 58
 B_n , группа треугольных матриц, 28
 \mathfrak{b}_n , алгебра Ли треугольных матриц, 58
 $b_{\lambda} = b_T$, элемент алгебры $\mathbb{C}S_m$, 7
 \mathbb{C} , поле комплексных чисел, 2
 $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 46, 48, 50, 55, 57
 $\mathbb{C}[M]$, алгебра многочленов на векторном пространстве/многообразии, 22, 28, 57
 $\mathbb{C}[M]^G$, алгебра инвариантных многочленов, 29, 31, 59–60
 $c_{\lambda} = c_T$, симметризатор Юнга, 7
 ch_W , характер представления, 29, 58
 $D_{i_1 \dots i_p}$, минор, 25
 D_T , элемент дуального модуля Вейля, 25
 $D_{T^{(q)}}$, минор, 25
 $\det_{k_1 \dots k_r}$, минор, 11
 $\det(v_1, \dots, v_k)$, определитель на векторах-столбцах, 10
 dR , дифференциал представления R , 53
 E , единичный оператор/матрица, 18–19, 46–47, 51–54, 63, 64
 e , единичная подстановка, 7–8, 18
 $E_{\bullet} = (E_1, \dots, E_{1 \dots n})$, стандартный флаг, 28
 $e_{\bullet} = (e_1, \dots, e_{1 \dots n})$, 28
 $E_{1 \dots p} = \langle e_1, \dots, e_p \rangle_{\mathbb{C}}$, 28
 e_i , вектор стандартного базиса \mathbb{C}^n , 11, 21
 $e_{i_1 \dots i_p} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, 26
 E_{ij} , матричная единица, 5
 e_T , элемент модуля Вейля, 26
 e_{λ} , старший вектор модуля Вейля, 30, 48
 $\text{End}_A M$, алгебра эндоморфизмов модуля, 4
 \exp , экспонента линейного оператора, 53
 $\mathcal{F}l_n = \mathcal{F}l(V)$, многообразие флагов, 27
 $\widehat{\mathcal{F}l}_n = \widehat{\mathcal{F}l}(V)$, флаговый мультиконус, 27
 \mathfrak{g} , касательная алгебра группы Ли G , 52
 g^* , эрмитово сопряжённый оператор, 54
 g_p , положительная компонента g , 54
 g_u , унитарная компонента g , 54
 \mathfrak{g}_{α} , корневое подпространство, 55
 GL_n , полная матричная группа, 2
 \mathfrak{gl}_n , алгебра Ли всех матриц, 56
 $\text{GL}_n(\mathbb{H})$, кватернионная матричная группа, 54
 $\text{GL}(V)$, полная линейная группа, 20
 $\mathfrak{gl}(V)$, алгебра Ли всех линейных операторов, 52
 \mathbb{H} , тело кватернионов, 54, 64
 h_{ij} , длина крюка, 13
 $h_{\lambda} = s_{(\lambda_1)} \cdots s_{(\lambda_n)}$, 37
 ht , высота диаграммы/таблицы Юнга, 6
 $\mathbb{I}(M)$, идеал уравнений многообразия, 28
 $K_{\lambda\mu}$, число Костки, 30
 $K_{\nu \setminus \lambda, \mu}$, 39
 $\ell_i = \lambda_i + k - i$, 14, 35
 $L(V)$, алгебра (ассоциативная) всех линейных операторов, 20
 $M_{\lambda\mu}^{\nu}$, число Литтлвуда–Ричардсона, 39
 Mat_n , алгебра квадратных матриц, 4–5, 20–26, 28–29, 56–57
 \mathbb{N} , множество натуральных чисел, 8, 37
 $N_G(T)$, нормализатор максимального тора, 55–56, 59
 O_n , группа ортогональных матриц, 2, 49
 $O(V)$, ортогональная группа, 49, 52, 60
 $\mathfrak{o}(V)$, алгебра Ли кососимметрических операторов, 52
 $P(\dots)$, вероятность, 15–17
 $\mathbb{P}(M)$, проективизация, 27
 $P_{\lambda} = P_T$, строчный стабилизатор, 6
 pf , пфаффиан, 61
 $Q_{\lambda} = Q_T$, столбцовый стабилизатор, 6
 q_{λ} , произведение длин крюков, 8, 14
 \mathbb{R} , поле вещественных чисел, 52–54, 58, 64

- $R : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$, линейное представление, 22–23, 29–30, 46–47, 53, 57–58
 r_{ij} , матричный элемент, 22, 23, 57
 r_α , корневое отражение, 55
 $r_{\omega, w}$, матричный элемент, 22
 S^1 , единичная окружность, 55
 $S^\bullet V$, симметрическая алгебра, 23
 $S^k V$, симметрическая степень, 20–23, 31–32, 37–38, 49, 51, 63, 64
 S_m , симметрическая группа, 2
 $S(\lambda)$, модуль Шпехта, 10
 S_λ , старшая полустандартная таблица, 30
 $S^\lambda = S^T$, функтор Шура, 20
 s_λ , многочлен Шура, 30
 $s_{\nu \setminus \lambda}$, косой многочлен Шура, 39
 sgn , знак подстановки, 7–11, 18–19, 48, 63–64
 SL_n , группа матриц с $\det = 1$, 2
 $\mathrm{SL}(V)$, специальная линейная группа, 52
 $\mathfrak{sl}(V)$, алгебра Ли операторов с $\mathrm{tr} = 0$, 52
 SO_n , группа собственных ортогональных матриц, 2
 $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{o}_n$, алгебра Ли кососимметрических матриц, 56
 $\mathrm{SO}(V)$, специальная ортогональная группа, 52
 $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{o}(V)$, 52
 Sp_n , симплектическая матричная группа, 2, 47
 \mathfrak{sp}_n , симплектическая матричная алгебра Ли, 56
 $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{H})$, кватернионная симплектическая группа, 54
 $\mathrm{Sp}(V)$, симплектическая группа, 47, 52, 60
 $\mathfrak{sp}(V)$, симплектическая алгебра Ли, 52
 $\mathrm{SU}(V)$, специальная унитарная группа, 54
 T , максимальный тор, 55
 t_{ij} , элемент таблицы Юнга, 9
 $T^{(j)}$, столбец таблицы Юнга, 10, 25
 T_n , группа диагональных матриц, 30, 55
 T^\top , транспонированная таблица Юнга, 6
 $t \mapsto t^\mu$, вес алгебраического тора, 30, 55
 $T \mapsto \sigma T$, действие подстановки на таблицу Юнга, 7
 U_n , группа унитарных матриц, 28
 $U_n(\mathbb{C})$, группа унитарных матриц, 53
 $U(V)$, унитарная группа, 53
 $u(V)$, алгебра Ли косоэрмитовых операторов, 53
 $U(\lambda)$, неприводимый S_m -модуль, 7
 $U_\pm(\lambda)$, неприводимый A_m -модуль, 19
 $V \simeq \mathbb{C}^n$, векторное пространство, 20
 $V(\lambda)$, неприводимый модуль редуктивной группы, 23, 47, 49, 58
 $V_\pm(\lambda)$, неприводимый SO_n -модуль, 51
 v_λ , старший вектор, 58
 $W = N_G(T)/T$, группа Вейля, 55
 $W_\bullet = (W_1, \dots, W_n)$, полный флаг, 27
 $w_\bullet = (w_1, \dots, w_n)$, набор поливекторов, 27
 x_i , координатная функция на \mathbb{C}^n , 24
 x_{ij} , элемент матрицы x , 24
 x_{ijq} , координата, 24
 $x_{\cdot j}$, столбец матрицы x , 24
 $x_{\cdot jq} = (x_{1jq}, \dots, x_{njq})$, вектор, 24
 $x_{\cdot q}$, матрица, 25
 x_T , одночлен, 10
 $y_{i_1 \dots i_p}$, координата Плюккера, 27
 y_T , моном от координат Плюккера, 28
 $y_{T^{(q)}}$, координата Плюккера, 28
 \mathbb{Z} , кольцо целых чисел, 8, 23, 29, 55–56, 58, 64
 Z_n , циклическая группа, 46
 Δ , система корней, 55
 Δ^\pm , система положительных/отрицательных корней, 58
 Δ_T , элемент модуля Шпехта, 10
 $\Delta(t_1, \dots, t_k)$, 15
 $\Delta_{T^{(j)}}$, определитель Вандермонда, 10
 ε_i , вектор стандартного базиса \mathbb{Z}^n , 55
 Λ , решётка весов, 55
 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, разбиение/диаграмма Юнга, 6
 $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, порядок разбиения, 6
 λ^+ , вес, 58
 λ^- , вес, 51
 $\lambda \subseteq \nu$, включение диаграмм Юнга, 38
 λ^\top , транспонированная диаграмма Юнга, 9, 18–19, 21–25, 36–37, 48–50, 63
 $\bar{\lambda}$, диаграмма, 50
 $\nu \setminus \lambda$, косая диаграмма Юнга, 38
 ρ , полусумма положительных корней, 59
 σ_k , элементарный симметрический многочлен, 30, 32, 35
 $\tau \in O_n$, отражение, 50
 $\tau \in S_m$, транспозиция, 18
 Ω , матрица (косо)скалярного умножения, 47, 49, 52
 ω , (косо)скалярное умножение, 47, 49, 52, 60
 ω^* , 2-тензор, 47, 62
 $\omega(T)$, вес обобщённой таблицы Юнга, 24