Эквивариантные компактификации редуктивных групп*

Д. А. Тимашёв

21 февраля 2003

УДК 512.743.7, 512.745, 512.813.4

Аннотация

В работе изучаются эквивариантные проективные компактификации редуктивных групп, получаемые замыканием образа группы в пространстве операторов проективного представления. Описаны структура и взаимное расположение орбит действия удвоенной группы левыми/правыми умножениями, локальная структура компактификации в окрестности замкнутой орбиты, получены некоторые условия нормальности и гладкости компактификации. Методы исследования используют теорию эквивариантных вложений сферических однородных пространств и редуктивных алгебраических полугрупп.

Библиография: 36 наименований.

Ключевые слова: редуктивная группа, проективное представление, компактификация, алгебраическая полугруппа, сферическое многообразие, орбита, локальная структура, нормальность, гладкость.

0. Введение

Пусть G — связная редуктивная комплексная алгебраическая группа. Её можно рассматривать как симметрическое однородное пространство $(G \times G)/\operatorname{diag} G$ группы $G \times G$, действующей левыми/правыми умножениями. Эквивариантные вложения и, в частности, компактификации (пополнения) G строились и изучались в целом ряде работ. Пополнение $G = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ при помощи "полных коллинеаций" было построено

*Работа выполнена при поддержке грантов CRDF № RM1-2088 и РФФИ №№ 01–01–00756, 02–01–06402.

Семплем [Sem]. Позднее Неретин обобщил эту конструкцию на другие классические группы (см. обзор [Ner]). Компактификация Неретина может рассматриваться как частный случай “превосходного” пополнения симметрического пространства, и в частности, присоединённой полупростой группы [CP-I] (см. §8). Более общий класс регулярных пополнений рассматривался в [CP-II] с приложениями к теории пересечений на однородных пространствах. Геометрия и когомологии эквивариантных компактификаций изучались в [CP], [St1], [BCP], [LP], [St2], [Br4], [BP], [AB2]. Теория эквивариантных вложений редуктивных групп и симметрических пространств является частным случаем теории сферических многообразий [LV], [Kn], [Br3] (см. §4). С другой стороны, аффинные эквивариантные вложения редуктивных групп суть не что иное как редуктивные алгебраические полугруппы, интенсивно изучавшиеся в ряде работ Путчи и Реннера [Pu1], [Re1], [PR], [Pu2], [Re2], а также Винбергом [Vin], Риттаторе [Rit] и Алексеевым–Брионом [AB1].

Компактификации Семпля–Неретина и “превосходное” пополнение де Кончини–Прочези [CP-I] были основаны на явной конструкции, сводящейся к вложению в проективное пространство. Однако общая теория эквивариантных вложений [LV] пошла другим путем: описание вложений и изучение их геометрических свойств производится в терминах некоторых объектов дискретной выпуклой геометрии (цветной конус, цветной веер) и их комбинаторики, см. §4.

В данной работе мы возвращаемся на конструктивную точку зрения и рассматриваем следующий естественный класс компактификаций группы G. Пусть $G : \mathbb{P}(V)$ — точное проективное представление. Тогда G вкладывается в пространство проективно линейных операторов $\mathbb{P}(\mathrm{L}(V))$, где $\mathrm{L}(V)$ — алгебра линейных операторов на V. Проективное замыкание $X = \overline{G} \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{L}(V))$ является $(G \times G)$-эквивариантной проективной компактификацией G. По существу, X полностью задаётся набором старших весов представления $G : V$.

Наша задача — извлечь из этих данных геометрическую информацию об X: $(G \times G)$-орбитную структуру (теорема 8), локальную структуру в окрестности замкнутой орбиты (предложения 6,7), условия нормальности (§10) и гладкости (§11). Вопрос о нормальности важен, в частности, потому, что к нормальному X можно применять глубоко разработанную теорию сферических многообразий. Скажем, замыкания всех орбит (в т.ч. само X) в этом случае имеют рациональные особенности [По], [BI], допускает явное описание группа Пикара [Br1] и, в некоторых случаях, кольцо когомологий [BCP], [LP], [St2], [Br4], справедливы теоремы об обращении в 0 высших когомологий nef-расслоений [BI], и т.д.

Опишем теперь структуру статьи. В §1 фиксируются основные обозначения. В §2 доказана техническая лемма о разложении тензорных степеней G-модулей на неприводимые компоненты, а в §3 рассмотрен частный случай фундаментальной леммы Луны, необходимый нам при изучении гладкости X. В §4 дано краткое изложение теории сферических многообразий, результаты которой используются при изучении проективных компактификаций G. Так как apriori наша компактификация X не является нормальным многообразием, то важно изучать нормализацию $\widetilde{X} \to X$, некоторые свойства которой обсуждаются в предложении 1 и, в частном случае торических многообразий, в §5.

Другим важным инструментом изучения X является описание локальной структуры проективного действия [BLV], позволяющее строить трансверсальные слайсы к замкнутым орбитам и сводить изучение геометрии действия к действию подгрупп Леви на аффинных подмногообразиях. Эти результаты формулируются в §6.

Группа G как сферическое (и даже симметрическое) однородное пространство группы $G \times G$ рассматривается в §7, где вычисляются все необходимые для теории сферических вложений комбинаторные данные. Приступая к изучению X, мы в §8 описываем замкнутые орбиты и локальную структуру X в их окрестностях в терминах многогранника весов представления $G : V$. При этом трансверсальные слайсы к замкнутым орбитам имеют структуру алгебраических полугрупп, группы обратимых элементов которых являются подгруппами Леви в G. Эти результаты позволяют вычислить комбинаторные данные, описывающие $\widetilde{X}$, что, в свою очередь, применяется к описанию орбитной структуры X в §9.

Вопросы нормальности и гладкости X обсуждаются в §§10,11. Ввиду локального характера, они сводятся к ситуации, когда вместо X рассматривается трансверсальный слайс к замкнутой орбите — редуктивная алгебраическая полугруппа. Хотя эффективный критерий нормальности в общем случае требует информации о разложении тензорных произведений представлений редуктивных групп и ограничений на подгруппы Леви, можно сформулировать некоторые необходимые или достаточные условия, а в некоторых ситуациях (например, случай регулярных старших весов) и критерии нормальности. Критерий гладкости содержится в теореме 9.

В §12 мы иллюстрируем полученные результаты изучением эквивариантных компактификаций простых алгебраических групп в пространствах проективно-линейных операторов фундаментальных и присоединённых представлений. Часть полученных результатов перекликается с с аналогичными результатами Путчи–Реннера [PR], [Re2] (орбитальное разложение), и Фальтингса [Fal], Каннана [Kan] и де Кончини

[Con] (нормальность) для редуктивных алгебраических полугрупп.

Данная работа преследует двоякую цель. Наряду с получением новых результатов, мы хотим собрать воедино и обобщить некоторые известные результаты об эквивариантных вложениях редуктивных групп, рассеянные в литературе. Поэтому мы старались сделать изложение максимально замкнутым, включив доказательства некоторых известных утверждений (см. например §7).

Замечание. Для простоты мы работаем над основным полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Однако наш подход является чисто алгебраическим, и все результаты переносятся на случай любого алгебраически замкнутого основного поля характеристики 0.

Автор благодарен А. Стояновскому, чей интерес к данной тематике стимулировал написание статьи, а также Г. Рёрле и М. Бриону за ряд полезных замечаний, позволивших улучшить первоначальный текст.

1. Обозначения

G — связная редуктивная комплексная алгебраическая группа.
$B \supseteq T, U$ — борелевская подгруппа, максимальный тор и максимальная унипотентная подгруппа в G.
$\Delta = \Delta_G$ — система корней G относительно T.
$\Delta^+ \supseteq \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — системы положительных и простых корней, отвечающих выбору B.
$\alpha^\vee$ — дуальный к α корень (т.е. однопараметрическая подгруппа в T).
e_α — корневой вектор в $\mathfrak{g}$, отвечающий корню α.
$u_\alpha(t) = \exp(te_\alpha)$ — корневая унипотентная однопараметрическая подгруппа.
$W = W_G = N_G(T)/T$ — группа Вейля.
$s_\alpha \in W$ — отражение, отвечающее корню $\alpha \in \Delta$ (или его представитель в $N_G(T)$).
$Q = \mathbb{Z}\Delta$ — решётка корней.
$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$ — решётка характеров T.
$C = C_G \subseteq \mathfrak{X} \otimes \mathbb{Q}$ — положительная камера Вейля. То же обозначение используем для положительной камеры Вейля в сопряжённом пространстве $\operatorname{Hom}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$, отождествляя его с $\mathfrak{X} \otimes \mathbb{Q}$ при помощи W-инвариантного скалярного умножения.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание между элементами двойственных пространств.
$\mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}^+_G = C \cap \mathfrak{X}$ — полугруппа доминантных весов.
$\omega_1, \dots, \omega_l$ — фундаментальные веса.
$V(\lambda) = V_G(\lambda)$ — неприводимое представление старшего веса λ.

$v_\mu \in V(\lambda)$ — (какой-нибудь) вектор T-веса μ, в частности, v_λ — старший вектор.
$M_{(\lambda)}$ — изотипная компонента старшего веса λ в G-модуле M.
$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ — многогранник весов линейного представления $G : V$.
$\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ — точка проективного пространства, отвечающая вектору $v \in V$.
$\mathrm{L}(V)$ — алгебра линейных операторов на V.
$\mathbb{C}(X)$ — поле рациональных функций на многообразии X.
$\mathbb{C}[X]$ — алгебра многочленов на аффинном многообразии X.
$\widetilde{X}$ — нормализация многообразия X.

Алгебры Ли алгебраических групп будем обозначать соответствующими строчными готическими буквами. Значки "$\times, \rightthreetimes$" обозначают *почти* (полу)прямое произведение алгебраических групп (допускается пересечение по конечной подгруппе).

Для параболической подгруппы $P \subseteq G$, $P \supseteq T$, обозначим через P^- противоположную параболическую подгруппу (и будем писать $P = P^+$), а через P_{u} унипотентный радикал.

2. Результат из теории представлений

Пусть $G : V$ — произвольное рациональное линейное представление.

Лемма 1 (ср. [AB2, Lemma 4.9]). *Для любого $\mu \in C \cap \mathcal{P}$ при некотором n в разложении $V^{\otimes n}$ имеется простой подмодуль $V(n\mu)$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{M} = \{\mu \in C \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ V^{\otimes n} \hookleftarrow V(n\mu)\}$. Очевидно $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$. Надо доказать $\mathcal{M} = C \cap \mathcal{P}$.

Заметим, что $\mathcal{M}$ выпукло. Действительно для любых $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ рассмотрим произвольную выпуклую комбинацию $r\mu + s\nu$, $r = p/m$, $s = q/m$, $p, q \geq 0$, $p + q = m$. При некотором n имеем $V^{\otimes n} \hookleftarrow V(n\mu), V(n\nu)$, откуда $V^{\otimes nm} \hookleftarrow V(n\mu)^{\otimes p} \otimes V(n\nu)^{\otimes q} \hookleftarrow V(nm(r\mu + s\nu))$, а значит $r\mu + s\nu \in \mathcal{M}$.

Следовательно, равенство $\mathcal{M} = C \cap \mathcal{P}$ достаточно доказать для неприводимого $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \mathfrak{X}^+$. При этом можно считать G полупростой.

Во-первых, $\lambda \in \mathcal{M}$. Во-вторых, $0 \in \mathcal{M}$. Действительно, $V^{\otimes n} \supset \bigwedge^n V = V(0)$, где $n = \dim V$.

Остальные вершины μ многогранника $C \cap \mathcal{P}$ — точки пересечения граней $\mathcal{P}$ при λ, направляющие подпространства которых натянуты на подсистемы простых корней, с перпендикулярными им гранями C. Если $L \subset G$ — соответствующая подгруппа Леви, то грань имеет вид $\mathcal{P}_L = \mathcal{P} \cap (\lambda + \langle \Delta_L \rangle)$, и μ — центр $\mathcal{P}_L$. При этом $V(\lambda)$ содержит $V_L(\lambda)$ с многогранником весов $\mathcal{P}_L$, и при ограничении на коммутант L вес μ переходит в 0. Отсюда $V(\lambda)^{\otimes n} \hookleftarrow V_L(n\mu)$, но L-старший вектор веса $n\mu$ в

$V(\lambda)^{\otimes n}$ будет автоматически старшим и для G (прибавление $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_L^+$ выводит за пределы многогранника весов $n\mathcal{P}$), а значит $\mu \in \mathcal{M}$. $\square$

3. Фундаментальная лемма Д. Луны

Следующий результат является простым частным случаем фундаментальной леммы [Lu, II.2] в теории этальных слайсов [loc. cit.]. Для удобства читателя приведём доказательство.

Лемма 2. *Пусть $X \subseteq V$ — гладкое замкнутое G-инвариантное подмногообразие с плотной орбитой, и $0 \in X$. Тогда проекция $\pi : X \to T_0X \subseteq V$ вдоль G-инвариантного дополнительного подпространства — изоморфизм.*

Доказательство. Отображение π этально в 0. Множество точек неэтальности замкнуто и G-инвариантно. Ввиду разделяемости замкнутых орбит полиномиальными инвариантами, единственная замкнутая орбита в X суть $\{0\}$, откуда π этально. По основной теореме Зарисского, π разлагается в композицию открытого вложения $X \hookrightarrow \overline{X}$ и конечного морфизма $\overline{X} \to T_0X$, причём $\mathbb{C}[\overline{X}]$ — целое замыкание $\mathbb{C}[T_0X]$ в $\mathbb{C}[X]$. Но $\overline{X}$ также имеет плотную, а значит единственную замкнутую орбиту, откуда $\overline{X} \setminus X = \emptyset$, т.е. π — конечное этальное накрытие. Но $\pi^{-1}(0) = \{0\}$ (в X всего одна неподвижная точка), следовательно $\deg \pi = 1$, т.е. π — изоморфизм. $\square$

4. Сферические многообразия

Нормальное G-многообразие X называется *сферическим*, если B имеет на X открытую орбиту. Тем более X содержит открытую G-орбиту, которую выделением базисной точки можно отождествить с однородным пространством G/H, и X можно рассматривать как эквивариантное вложение однородного пространства G/H. Все эквивариантные вложения сферического однородного пространства G/H допускают описание в терминах комбинаторики некоторых объектов выпуклой геометрии (конусы, многогранники), связанных с G/H. Теория принадлежит Луне и Вюсту [LV], доступное изложение см. в [Kn], [Br3].

Алгебра регулярных функций на сферическом однородном пространстве G/H имеет простой спектр, т.е. ненулевые изотипные компоненты $\mathbb{C}[G/H]_{(\lambda)} \cong V(\lambda)$ — простые G-модули.

Пусть $\mathfrak{X}(G/H)$ — решётка весов рациональных B-полуинвариантных функций на G/H (которые определяются своими весами однозначно с точностью до пропорциональности). Рассмотрим сопряжённое линейное пространство $E = \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(G/H), \mathbb{Q})$. Любое (дискретное $\mathbb{Q}$-значное) нормирование поля $\mathbb{C}(G/H)$ при ограничении на мультипликативную подгруппу B-полуинвариантных рациональных функций определяет гомоморфизм $\mathfrak{X}(G/H) \to \mathbb{Q}$, т.е. точку E.

Теорема 1 ([Kn, 2.8, 6.3], [Br3, 3.1, 4.2]). *Множество G-инвариантных нормирований $\mathbb{C}(G/H)$ отображается в E инъективно, и образ — телесный многогранный конус $\mathcal{V}$, содержащий образ отрицательной камеры Вейля при естественной проекции в E.*

B-инвариантные дивизоры на G/H (т.е. неприводимые компоненты дополнения к открытой B-орбите, их конечное число) определяют конечное множество $\mathcal{D}$ нормирований $\mathbb{C}(G/H)$ (множество *красок*), но отображение $\rho : \mathcal{D} \to E$ уже не обязательно инъективно.

Определение. *Цветной конус* — это пара $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$, $\rho(\mathcal{F}) \not\ni 0$, а $\mathcal{C}$ — острый многогранный конус, порождённый $\rho(\mathcal{F})$ и конечным числом векторов из $\mathcal{V}$, причём $\mathrm{int}\,\mathcal{C}$ (относительная внутренность) пересекает $\mathcal{V}$.

Цветная грань цветного конуса — цветной конус $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$, где $\mathcal{C}'$ — грань $\mathcal{C}$, а $\mathcal{F}' = \rho^{-1}(\rho(\mathcal{F}) \cap \mathcal{C}')$.

Цветной веер — конечный набор цветных конусов $(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_i)$, замкнутый относительно перехода к цветным граням, причём $\mathrm{int}\,\mathcal{C}_i \cap \mathrm{int}\,\mathcal{C}_j \cap \mathcal{V} = \emptyset$ при $i \neq j$ (т.е. в пределах $\mathcal{V}$ конусы пересекаются строго по граням).

Теорема 2 ([Kn, 4.3], [Br3, 3.4]). *Имеется биекция между всевозможными эквивариантными нормальными вложениями $X \hookleftarrow G/H$ и цветными веерами. При этом G-орбиты $Y \subseteq X$ взаимно однозначно соответствуют цветным конусам $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$ данного цветного веера. Множество красок $\mathcal{F}_Y$ соответствует замыканиям B-инвариантных дивизоров на G/H, содержащим Y, а G-инвариантные дивизоры, содержащие Y, задают образующие тех рёбер $\mathcal{C}_Y$, которые не содержат векторов из $\rho(\mathcal{F}_Y)$.*

Геометрия сферического многообразия определяется его веером.

Теорема 3 ([Kn, 4.2, 5.2], [Br3, 3.4]). *Пусть $X \hookleftarrow G/H$ — сферическое многообразие, $Y, Y' \subseteq X$ — G-орбиты. Тогда $\overline{Y} \subseteq \overline{Y'} \iff (\mathcal{C}_{Y'}, \mathcal{F}_{Y'})$ — грань $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$. В частности, G/H соответствует $(0, \emptyset)$, и Y проективна $\iff$ $\mathcal{C}_Y$ — телесный конус. X полно $\iff$ его веер покрывает $\mathcal{V}$.*

Из теоремы видно, что всякое сферическое многообразие покрывается *простыми* открытыми подмногообразиями, которые имеют единственную замкнутую орбиту. В частности, аффинные сферические многообразия просты. Цветной веер простого многообразия определяется цветным конусом замкнутой орбиты (состоит из всех его цветных граней).

Аффинные сферические многообразия имеют более явное описание.

Теорема 4 ([Kn, 7.7]). *G/H допускает аффинное вложение тогда и только тогда, когда $\rho(\mathcal{D})$ лежит в открытом полупространстве E. Имеется биекция между всевозможными эквивариантными нормальными аффинными вложениями $X \hookleftarrow G/H$ и острыми многогранными конусами $\mathcal{C} \subset E$, порождёнными $\rho(\mathcal{D})$ и конечным набором векторов из $\mathcal{V}$. При этом*

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}(G/H) \cap \mathcal{C}^{\vee}} \mathbb{C}[G/H]_{(\lambda)}$$

и $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[\mathfrak{X}(G/H) \cap \mathcal{C}^{\vee}]$ — полугрупповая алгебра полугруппы целых точек дуального конуса $\mathcal{C}^{\vee}$. Цветной веер X — множество всех цветных граней $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Замечание. Пара $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ из теоремы 4 не вполне удовлетворяет определению цветного конуса: $\operatorname{int} \mathcal{C}$ может не пересекать $\mathcal{V}$. Однако мы можем рассматривать его цветные грани в соответствии с определением. Существует наибольшая грань $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, внутренность которой пересекает $\mathcal{V}$. Соответствующая цветная грань $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ задаёт цветной веер X.

Предложение 1. *Пусть $X \hookleftarrow G/H$ — квазипроективное вложение сферического однородного пространства. Тогда отображение нормализации $\widetilde{X} \to X$ биективно на множестве G-орбит.*

Доказательство. Если X аффинно, то $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[G/H]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}^{+}$ — конечнопорождённая полугруппа, и $\mathbb{Z}S = \mathfrak{X}(G/H)$. Следующие объекты находятся в биективном соответствии: G-орбиты на X, G-инвариантные замкнутые неприводимые подмногообразия X, G-инвариантные простые идеалы в $\mathbb{C}[X]$, (некоторые, но вообще говоря не все) отвечающие им T-инвариантные простые идеалы в $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[S]$ — полугрупповой алгебре S, (некоторые) множества весов вида $S \cap (\Sigma \setminus \Sigma')$, где $\Sigma = \mathbb{Q}_{+} S$, а Σ' — его грань.

При нормализации S заменяется на $\mathfrak{X}(G/H) \cap \Sigma$, но конус Σ, его грани и пр. сохраняется.

Проективный случай сводится к аффинному рассмотрением аффинного конуса над X и расширением группы G при помощи гомотетий.

Общий случай сводится к проективному взятием проективного замыкания. $\square$

Пример. Торические многообразия — частный случай сферических. Здесь $G = B = T$ — тор, и при желании можно считать $H = \{e\}$, заменив T на T/H. Решётка $\mathfrak{X}(T/H)$ совпадает с решёткой характеров тора T/H. Любое T-инвариантное нормирование $\mathbb{C}(T/H)$ пропорционально нормированию, задаваемому порядком при $t \to \infty$ ограничения функции на однопараметрическую подгруппу $\gamma(t) \in T/H$. Его значение на полуинвариантной функции веса λ равно $\langle \gamma, \lambda \rangle$, откуда $\mathcal{V} = E$. Красок нет, и цветные конусы превращаются в обычные, а веер — просто конечный набор острых многогранных конусов, пересекающихся по граням.

Простое торическое многообразие X, задаваемое конусом $\mathcal{C}$, аффинно, и его алгебра многочленов $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[\mathfrak{X}(T/H) \cap \mathcal{C}^\vee]$ — полугрупповая алгебра полугруппы целых точек дуального конуса.

Проективное торическое многообразие также можно задавать многогранником в $E^* = \mathfrak{X}(T/H) \otimes \mathbb{Q}$, двойственным к вееру, т.е. веер состоит из конусов, двойственных к конусам при вершинах многогранника (и всех их граней).

5. Многогранник замыкания орбиты тора

Рассмотрим линейное представление $T : V$ и вектор $v \in V$. *Носитель* $\operatorname{supp} v$ — выпуклая оболочка весов в разложении v.

Предложение 2. *Многогранником проективного торического многообразия* $\widetilde{\overline{T\langle v \rangle}}$ *является* $-\operatorname{supp} v$.

Доказательство. Рассмотрим весовое разложение $v = v_{\lambda_0} + \dots + v_{\lambda_n}$, дополним $v_{\lambda_0}, \dots, v_{\lambda_n}$ до весового базиса V, и рассмотрим двойственную систему координат x_λ (вес $-\lambda$) как однородные координаты в $\mathbb{P}(V)$. Многообразие $X = \overline{T\langle v \rangle}$ покрывается аффинными картами $X_i = \{x_{\lambda_i} \neq 0\}$. Возьмём для определённости X_0. Тогда $\mathbb{C}[X_0] = \mathbb{C}[x_{\lambda_1}/x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_n}/x_{\lambda_0}]$ — полугрупповая алгебра полугруппы $S_0 = \mathbb{Z}_+(\lambda_0 - \lambda_1) + \dots + \mathbb{Z}_+(\lambda_0 - \lambda_n)$. Эта полугруппа порождает конус Σ_0 при вершине $-\lambda_0$ многогранника $-\operatorname{supp} v$. При этом $\mathbb{C}[\widetilde{X_0}] = \mathbb{C}[\mathbb{Q}S_0 \cap \Sigma_0]$. Таким образом, веер $\widetilde{X}$ двойствен многограннику $-\operatorname{supp} v$. $\square$

Следствие (доказательства). $\overline{T\langle v \rangle}$ *нормально* $\iff$ $\mathbb{Q}S_i \cap \Sigma_i = S_i$, $i = 0, \dots, n$

6. Локальная структура проективного действия

Рассмотрим линейное представление $G : V$ и фиксируем младший вектор $v_\lambda \in V$. Пусть $P^- = P(\lambda) = G_{\langle v_\lambda \rangle}$, и $P \supseteq B$ — противоположная параболическая подгруппа. Рассмотрим разложения Леви $P = P_{\mathrm{u}} \rightthreetimes L$, $P^- = P_{\mathrm{u}}^- \rightthreetimes L$. Имеем разложение в прямую сумму L-модулей $V = \mathfrak{p}_{\mathrm{u}} v_\lambda \oplus \mathbb{C} v_\lambda \oplus M$. Рассмотрим двойственный старший вектор $v_{-\lambda} \in V^*$ и открытое подмножество $\mathring{V} = \mathfrak{p}_{\mathrm{u}} v_\lambda \oplus \mathbb{C}^\times v_\lambda \oplus M$ — дополнение до гиперплоскости $\{\langle v_{-\lambda}, \cdot \rangle = 0\}$.

Теорема 5 ([BLV]). *Действие P на $\mathbb{C} v_\lambda \oplus M$ задаёт изоморфизм*

$$\mathbb{P}(\mathring{V}) \cong P \times_L M(-\lambda) = P_{\mathrm{u}} \times M(-\lambda)$$

где $M(-\lambda) = M$ с действием L, подкрученным на характер $-\lambda$, вложено в $\mathbb{P}(V)$ как $\{\langle v_\lambda \rangle\} \times M = \mathbb{P}(v_\lambda + M)$.

Отсюда следует, что любое проективное G-многообразие $X \subseteq \mathbb{P}(V)$, содержащее замкнутую орбиту $Y = G \langle v_\lambda \rangle$, содержит пересекающее Y аффинное открытое P-инвариантное подмножество $\mathring{X} = X \cap \mathbb{P}(\mathring{V}) \cong P \times_L Z = P_{\mathrm{u}} \times Z$, где $Z \subseteq M(-\lambda)$ — замкнутое аффинное L-подмногообразие.

Если X — сферическое G-многообразие, то Z — аффинное сферическое L-многообразие. Из структуры $\mathring{X}$ видно, что $\mathfrak{X}(X) = \mathfrak{X}(\mathring{X}) = \mathfrak{X}(Z)$, и $\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_{Y \cap Z}$, только конус инвариантных нормирований может увеличиться, а множество красок — уменьшиться, т.к. некоторые краски могут превратиться в L-инвариантные дивизоры. В сочетании с теоремой 4 это дает эффективное описание локальной структуры сферического многообразия по его вееру.

7. Редуктивная группа как сферическое однородное пространство

Группа G является однородным пространством группы $G \times G$, действующей умножениями слева и справа, со стабилизатором $\operatorname{diag} G$ точки e. Фиксируем борелевскую подгруппу $B^- \times B \subseteq G \times G$. Из разложения Брюа следует, что $G = (G \times G)/\operatorname{diag} G$ — сферическое однородное пространство. Комбинаторные данные этого однородного пространства в смысле §4 были вычислены Вюстом [Vu] (в более общем контексте симметрических пространств) и Риттаторе [Rit]. Их результаты мы изложим ниже. Следующий результат хорошо известен [Кр, II.3.1, теорема 3]:

Предложение 3. $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}^+} \mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$, *где* $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)} \cong V(\lambda)^* \otimes V(\lambda)$ — *линейная оболочка матричных элементов представления $G : V(\lambda)$.*

Следствие. $\mathfrak{X}(G) \cong \mathfrak{X}$

Функция $f_\lambda(g) = \langle v_{-\lambda}, gv_\lambda\rangle$ имеет старший вес $(-\lambda, \lambda)$, т.е. λ при нашем отождествлении.

Предложение 4. *$\mathbb{C}[G]_{(\lambda)} \cdot \mathbb{C}[G]_{(\mu)} = \mathbb{C}[G]_{(\lambda+\mu)} \oplus \bigoplus_i \mathbb{C}[G]_{(\lambda+\mu-\beta_i)}$, где $\lambda+\mu-\beta_i$ — старшие веса всех "младших" неприводимых компонент в разложении $V(\lambda)\otimes V(\mu) = V(\lambda+\mu)\oplus\dots$, причём $\beta_i \in \mathbb{Z}_+\Pi$.*

Доказательство. $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)} \cdot \mathbb{C}[G]_{(\mu)}$ порождается всевозможными произведениями матричных элементов $G : V(\lambda)$ и $G : V(\mu)$, т.е. матричными элементами $G : V(\lambda)\otimes V(\mu)$. □

Следствие. *$\mathcal{V} = -C$ — отрицательная камера Вейля.*

Доказательство. Легко видеть, что G-инвариантное нормирование поля $\mathbb{C}(G)$ постоянно на любой изотипной компоненте $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$, и его ограничение есть линейная функция от λ, т.е. $\nu \in E = \mathrm{Hom}(\mathfrak{X},\mathbb{Q})$. На $\forall f \in \mathbb{C}[G]$ значение нормирования равно $\min_{f_{(\lambda)}\neq 0}\langle\nu,\lambda\rangle$ ($f_{(\lambda)}$ — проекция f на $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$). Перемножая функции из $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$ и $\mathbb{C}[G]_{(\mu)}$, из предложения 4 получаем $\langle\nu,\beta_i\rangle \le 0$ — необходимое условие для того, чтобы ν определял нормирование. Так как β_i — положительные комбинации простых корней, и при всевозможных $\lambda,\mu\in\mathfrak{X}^+$ среди них встретятся кратные всех простых корней (см. например §2), то неравенства задают $-C$.

Напротив, каждый вектор $\nu \in -C$ определяет по вышенаписанной формуле $\mathbb{Q}$-значную функцию на $\mathbb{C}[G]$ (обозначаемую для краткости той же буквой), удовлетворяющую аддитивному свойству нормирования. Для проверки мультипликативного свойства возьмем $p,q\in\mathbb{C}[G]$ и подберем $\gamma \in \mathrm{int}(-C)$ так, чтобы $\min\langle\gamma,\lambda\rangle$ по всем λ с условиями $p_{(\lambda)}\neq 0$, $\langle\nu,\lambda\rangle = \min$, и $\min\langle\gamma,\mu\rangle$ по всем μ с условиями $q_{(\mu)}\neq 0$, $\langle\nu,\mu\rangle = \min$, достигались в единственных точках λ_0 и μ_0, соответственно. Тогда $pq = f_{(\lambda_0+\mu_0)} + \sum f_{(\chi)}$, где $\langle\nu,\chi\rangle \ge \langle\nu,\lambda_0+\mu_0\rangle$, $\langle\gamma,\chi\rangle\ge\langle\gamma,\lambda_0+\mu_0\rangle$, и хотя бы одно из этих неравенств — строгое. Отсюда $\nu(pq) = \langle\nu,\lambda_0+\mu_0\rangle = \nu(p)+\nu(q)$, и утверждение полностью доказано. □

Из разложения Брюа следует, что $(B^-\times B)$-инвариантные дивизоры на G имеют вид $D_i = \overline{B^- s_{\alpha_i} B}$. Если G имеет односвязный тип (является прямым произведением тора и односвязной полупростой группы), то $\omega_i \in \mathfrak{X}$, и D_i задаётся уравнением $f_{\omega_i} = 0$. Более точно, рассмотрим кривую $g_j(t) = u_{-\alpha_j}(t)\alpha_j^\vee(t^{-1})u_{\alpha_j}(-t)$, лежащую в большой клетке Брюа. Тогда $\lim_{t\to\infty} g_j(t) = s_{\alpha_j} \in D_j$ (всё происходит в SL_2-подгруппе, где вычисляется явно), и

$$f_{\omega_i}(g_j(t)) = \langle v_{-\omega_i}, \alpha_j^\vee(t^{-1})v_{\omega_i}\rangle = t^{-\langle\omega_i,\alpha_j^\vee\rangle}\langle v_{-\omega_i}, v_{\omega_i}\rangle$$

Значит f_{ω_i} имеет порядок 1 вдоль D_j при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Поэтому краски имеют вид $\rho(D_j) = \alpha_j^\vee$. Это заключение сохраняет силу для произвольной G, поскольку G накрывается группой односвязного типа, краски которой — прообразы красок G.

Эти результаты позволяют применить для описания $(G \times G)$-эквивариантных вложений группы G теорию §§4,6. Аффинные вложения обладают ещё одним замечательным свойством.

Теорема 6 ([Vin]). *Аффинное $(G \times G)$-эквивариантное вложение $X \hookleftarrow G$ — алгебраическая полугруппа с единицей, в которой G — группа обратимых элементов.*

Доказательство. Действия левого и правого сомножителя $G \times G$ на X определяют кодействия $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[G]$, которые суть ограничения на $\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[G]$ коумножения $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$. Значит, образ $\mathbb{C}[X]$ лежит в $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[X] \cap \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X]$, и мы имеем коумножение в $\mathbb{C}[X]$. Группа G — открытое подмножество X, состоящее из обратимых элементов, и $xG \cap G \neq \emptyset$ для любого обратимого $x \in X$, откуда $x \in G$. □

8. Проективная компактификация редуктивной группы

Пусть $V = \bigoplus_{i=0}^m V(\lambda_i)$ $(\lambda_i \in \mathfrak{X}^+)$ — точное представление G. Тогда $G \hookrightarrow \mathbb{V} = \bigoplus \mathrm{L}(V(\lambda_i)) \subseteq \mathrm{L}(V) \cong V \otimes V^*$. При проективизации, $G \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{V})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = \sum \mathbb{Z}(\lambda_i - \lambda_j) + Q$. Этого всегда можно добиться, добавив к V тривиальное представление, и мы будем это предполагать или, несколько более общим образом, будем рассматривать точные проективные представления $G : \mathbb{P}(V)$ (которые поднимаются до линейных представлений быть может не самой G, а её конечнолистной накрывающей). Кроме того, можно считать все λ_i различными.

Наша цель — изучить $X = \overline{G} \subseteq \mathbb{P}$.

Образ единичного элемента в $\mathbb{V}$ таков: $e = \sum v_\mu \otimes v_{-\mu}$, где $v_{\pm\mu}$ пробегают двойственные весовые базисы в V, V^*. При этом $\operatorname{supp} e = -\mathcal{P}$ при отождествлении $\mathfrak{X}((T \times T)/\operatorname{diag} T) \cong \mathfrak{X}(T)$.

Все замкнутые $(G \times G)$-орбиты в $\mathbb{P}$ имеют вид $Y_i = (G \times G)y_i$, $y_i = \langle v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i} \rangle$.

Локальная структура $\mathbb{P}$ в окрестности Y_i имеет следующий вид (§6). Пусть $P = P(\lambda_i)$ — проективный стабилизатор v_{λ_i}, и $P = P_\mathrm{u} \rightthreetimes L$, $P^- = P_\mathrm{u}^- \rightthreetimes L$ — разложения Леви. Тогда $P \times P^- = (G \times G)_{y_i}$. Аффинная $(P^- \times P)$-инвариантная карта $\mathring{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathring{\mathbb{V}})$, где

$$\mathring{\mathbb{V}} = \mathbb{C}^\times (v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i}) \oplus (\mathfrak{p}_\mathrm{u}^- v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i}) \oplus (v_{\lambda_i} \otimes \mathfrak{p}_\mathrm{u} v_{-\lambda_i}) \oplus \mathbb{M},$$

пересекает Y_i, причём $\mathring{\mathbb{P}} \cong (P^- \times P) \times_{(L\times L)} \mathbb{M}(-\lambda_i, \lambda_i) = P_{\mathrm{u}}^- \times P_{\mathrm{u}} \times \mathbb{M}(-\lambda_i, \lambda_i)$, где $\mathbb{M} \subset \mathbb{V}$ — $(L \times L)$-инвариантное подпространство и $\mathbb{C}(v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i}) \oplus \mathbb{M} \ni e$.

Предложение 5. *$X \supset Y_i \iff \lambda_i$ — вершина $\mathcal{P}$*

Доказательство. Если λ_i — вершина $\mathcal{P}$, то найдётся однопараметрическая подгруппа $\gamma(t) \in T$ такая, что $\langle\gamma, \lambda_i\rangle > \langle\gamma, \mu\rangle$, $\forall\mu \in \mathcal{P}$, $\mu \neq \lambda_i$. Тогда

$$\gamma(t) = \left\langle \sum \gamma(t) v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle = \left\langle \sum t^{\langle\gamma,\mu\rangle} v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle \to y_i \qquad \text{при } t \to \infty$$

Обратно, пусть $Y_i \subset X$. Рассмотрим локальную структуру X в окрестности Y_i. X содержит $(P^- \times P)$-инвариантное аффинное открытое подмножество $\mathring{X} = P_{\mathrm{u}}^- \times P_{\mathrm{u}} \times Z$, где $Z = X \cap \mathbb{M}(-\lambda_i, \lambda_i) = \overline{(L \times L)e} = \overline{L}$ — аффинное $(L\times L)$-эквивариантное вложение L с единственной неподвижной точкой y_i. Тогда по теореме 4 имеем $\mathbb{C}[\widetilde{Z}] = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{X}\cap\mathcal{C}^\vee} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $\mathcal{C}$ — острый телесный конус, порождённый Δ_L^+ и конечным числом векторов из $\mathcal{V}_L = -C_L$, причём $\operatorname{int}\mathcal{C} \cap \mathcal{V}_L \neq \emptyset$. Отсюда $\mathbb{C}[Z] = \bigoplus_{\lambda\in S} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}_L^+ \cap \mathcal{C}^\vee$ — конечнопорождённая полугруппа такая, что $\mathbb{Z}S \cap \mathcal{C}^\vee = \mathfrak{X} \cap \mathcal{C}^\vee$.

Существует однопараметрическая подгруппа $\gamma \in \operatorname{int}\mathcal{C} \cap -C_L$, $\gamma \perp \Delta_L$. Она задаёт неотрицательную градуировку $\mathbb{C}[Z]$: $\deg \mathbb{C}[Z]_{(\lambda)} = \langle\gamma, \lambda\rangle$, причём функции нулевой степени — константы. Следовательно, действие $\gamma(t)$ стягивает всё Z (и в частности, e) в y_i при $t \to \infty$, откуда $-\lambda_i$ — вершина $\operatorname{supp} e = -\mathcal{P}$. □

Изучим подробнее локальную структуру X в окрестности замкнутой орбиты, скажем Y_0. Сохраним предшествующие обозначения. Пусть $\mathring{X} = X \cap \mathring{\mathbb{P}} = \{f_{\lambda_0} \neq 0\}$ ($f_{\lambda_0} = v_{-\lambda_0} \otimes v_{\lambda_0}$ рассматривается как линейная функция на $\mathbb{V}$). Тогда $\mathring{X} \cong (P^- \times P) \times_{(L\times L)} Z = P_{\mathrm{u}}^- \times P_{\mathrm{u}} \times Z$, где $Z = X \cap (\{y_0\} \times \mathbb{M}) = \overline{L}$ — эквивариантное аффинное вложение.

Более точно, если $V = \mathbb{C}v_{\lambda_0} \oplus V_0$ — L-инвариантное разложение, то $Z \subseteq \mathrm{L}(V_0(-\lambda_0)) \subseteq \mathbb{M}(-\lambda_0, \lambda_0)$, откуда вытекает

Предложение 6. *Пусть $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathfrak{X}_L^+$ — все старшие веса $L : V$, кроме λ_0. Представления $L : V_L(\mu_j - \lambda_0)$ продолжаются на Z и индуцируют замкнутое вложение $Z \hookrightarrow \mathbb{V}_0 = \bigoplus \mathrm{L}(V_L(\mu_j - \lambda_0))$.*

Предложение 7. *$\mathbb{C}[Z] = \bigoplus_{\lambda\in S} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}_L^+$ — полугруппа, порождающая конус Σ_0 многогранника $C \cap \mathcal{P}$ в вершине λ_0, и $\mathbb{Z}S = \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Однородная координатная алгебра проективного пространства $\mathbb{P}$ есть $\mathbb{C}[\mathbb{V}] = \mathrm{S}^\bullet\mathbb{V}^*$. Система весов однородных многочленов степени n лежит в $-n\mathcal{P} \oplus n\mathcal{P}$. Поскольку $\mathbb{C}[\mathring{\mathbb{P}}] = \bigoplus \mathrm{S}^n\mathbb{V}^*/f_{\lambda_0}^n$, то веса однородных многочленов степени n на $\mathring{\mathbb{P}}$ лежат в $n(-\mathcal{P}+\lambda_0) \oplus n(\mathcal{P}-\lambda_0)$. Следовательно, старшие веса $(L \times L)$-модуля $\mathbb{C}[Z] \subseteq \mathbb{C}[L]$ лежат в $C_L \cap \bigcup n(\mathcal{P}-\lambda_0) = \Sigma_0$ (при антидиагональном вложении $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}(T \times T)$).

С другой стороны, для любого $\mu \in C_L \cap \mathcal{P}$, по лемме 1, $V^{\otimes n} \hookleftarrow V_L(n\mu)$ при некотором n. Используя предложение 4 для L, нетрудно получить $f_{n\mu}/f_{\lambda_0}^n \in \mathbb{C}[Z]$. Следовательно, S порождает Σ_0. □

Следствие. $\mathbb{C}[\widetilde{Z}] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X} \cap \Sigma_0} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$

Замечание. Если λ_0 — регулярный вес (т.е. $\lambda_0 \in \operatorname{int} C$), то $L = T$, Σ_0 — конус $\mathcal{P}$ в λ_0, и $\mathbb{C}[Z] = \mathbb{C}[S]$ — полугрупповая алгебра полугруппы S, порождённой $\mu - \lambda_0$, где μ пробегает систему весов V (ср. §5). В общем случае описание полугруппы S требует разложений на простые L-модули G-модуля V и тензорных произведений простых L-модулей (см. §10). Нормальность Z означает $S = \mathfrak{X} \cap \Sigma_0$.

Рассмотрим сферическое многообразие $\widetilde{X}$. Согласно предложению 1, нормализация $\widetilde{X} \to X$ биективна на множестве орбит. В частности $\widetilde{X} \hookleftarrow G/H, Y_i$.

Теорема 7. *Цветной веер $\widetilde{X}$ порождается цветными конусами замкнутых орбит $Y_i \subset \widetilde{X}$ по всем вершинам $\lambda_i \in \mathcal{P}$: $\mathcal{C}_{Y_i} = \Sigma_i^\vee$, где Σ_i — конус $C \cap \mathcal{P}$ при вершине λ_i, а $\mathcal{F}_{Y_i} = \Pi_{L_i}^\vee$ — подсистема дуальных простых корней соответствующей подгруппы Леви $L_i = Z_G(\lambda_i)$. (Напоминаем, что краски отождествляются с дуальными простыми корнями.)*

Доказательство. Утверждение про $\mathcal{C}_{Y_i}$ следует из предложения 7 и рассуждений в §6. Разберёмся с красками.

Заметим, что $D_j \in \mathcal{F}_{Y_i} \iff y_i \in \overline{D_j}$. Так как $f_{\lambda_i}(y_i) \neq 0$, и f_{λ_i} имеет порядок $\langle \lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle$ вдоль D_j, то $D_j \notin \mathcal{F}_{Y_i}$ при $\lambda_i \not\perp \alpha_j \iff \alpha_j \notin \Pi_{L_i}$. Обратно, пусть $\alpha_j \in \Pi_{L_i}$, и $\gamma(t) \in T$ — однопараметрическая подгруппа такая, что $\langle \gamma, \lambda_i \rangle > \langle \gamma, \mu \rangle$, $\forall \mu \in \mathcal{P}$, $\mu \neq \lambda_i$. Тогда при $t \to \infty$

$$\gamma(t)s_{\alpha_j} = \left\langle \sum \gamma(t) v_{s_{\alpha_j}\mu} \otimes v_{-\mu} \right\rangle = \left\langle \sum t^{\langle \gamma, s_{\alpha_j}\mu \rangle} v_{s_{\alpha_j}\mu} \otimes v_{-\mu} \right\rangle \to y_i,$$

т.е. $\overline{D_j} \ni y_i$. □

Замечание. В случае, когда все вершины $\mathcal{P}$ — регулярные веса, веер X не имеет красок и является разбиением конуса $-C$. Трансверсальные слайсы Z_i к замкнутым орбитам Y_i в точках y_i — аффинные торические многообразия, и их конусы двойственны конусам $\mathcal{P}$ в λ_i. Эти слайсы содержатся в проективном торическом многообразии $\overline{T} \subseteq X$ (или $\widetilde{X}$). Оно, очевидно, W-инвариантно (W, а точнее $N_G(T)$, действует сопряжениями) и, как следует из локальной структуры, пересекает все Y_i трансверсально в точках $w(y_i)$, $w \in W$, исчерпывающих неподвижные точки T на $\overline{T}$. Веер $\overline{T}$ есть W-разнесение веера X, а многогранник равен $\mathcal{P}$ по предложению 5.

Смежные классы $\overline{vT}$, $v \in W$, пересекают все Y_i трансверсально в точках $(vw, w)y_i$, $w \in W$, исчерпывающих неподвижные точки $T \times T$ на X. Замыкание нормализатора тора $\overline{N_G(T)} = \bigsqcup_{v\in W} \overline{vT}$ — дизъюнктное объединение (иначе бы разные $\overline{vT}$ имели общие неподвижные точки).

В случае, когда $V = V(\lambda_0)$ неприводимо, X нормально (даже гладко, ср. §§10,11 и [CP-I]) и не зависит от выбора (регулярного) λ_0. Эта компактификация называется *превосходной* [CP-I]. Общий случай регулярных весов рассматривался в [CP-II] и в ряде других работ.

9. Орбиты

Согласно общей теории сферических многообразий и теореме 7, $(G\times G)$-орбиты в X, содержащие в замыкании данную замкнутую орбиту Y_i, находятся в биективном соответствии с цветными гранями цветного конуса $(\Sigma_i^\vee, \Pi_{L_i}^\vee)$ или, что то же самое, с гранями $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_i^\vee$, для которых $(\operatorname{int}\mathcal{C}) \cap (-C) \neq \emptyset$. Переформулируем это описание на "двойственном" языке многогранника $\mathcal{P}$.

Для любой грани $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ обозначим через $|\Gamma|$ её направляющее подпространство, $\langle\Gamma\rangle$ — её линейная оболочка, и $\|\Gamma\| = |\Gamma| \oplus (\langle\Gamma\rangle^\perp \cap \langle Q\rangle)$. (Если G полупроста и Γ — собственная грань, то $\|\Gamma\|$ — её опорная гиперплоскость, сдвинутая в 0.) Назовём линейную функцию $\gamma \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$ *опорной* для грани Γ в $\mathcal{P}$, если $\langle\gamma, \Gamma\rangle = \mathrm{const} < \langle\gamma, \mathcal{P} \setminus \Gamma\rangle$, т.е. γ — левая часть уравнения опорной гиперплоскости для Γ.

Предложение 8. *Имеется биекция между всевозможными $(G \times G)$-орбитами $Y \subset X$ и гранями $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$, $(\operatorname{int}\Gamma) \cap C \neq \emptyset$. При этом $\mathcal{C}_Y$ двойствен конусу многогранника $C \cap \mathcal{P}$ при грани $C \cap \Gamma$, а $\mathcal{F}_Y = \{D_j \mid \alpha_j \perp \langle\Gamma\rangle\}$. "Цветным" орбитам (для которых $\mathcal{F}_Y \neq \emptyset$) соответствуют грани, лежащие на границе камеры C. Примыканию орбит (т.е. вложению орбитных замыканий) отвечает включение соответствующих граней.*

Доказательство. Пусть $\overline{Y} \supseteq Y_i$, т.е. $\mathcal{C}_Y$ — грань $\Sigma_i^\vee$. При этом $\gamma \in \operatorname{int}\mathcal{C}_Y \iff \gamma$ — опорная функция для двойственной грани $\Sigma_Y = \Sigma_i \cap \mathcal{C}_Y^\perp$ конуса Σ_i, т.е. $\langle\gamma, \Sigma_i\rangle \geq 0$, а Σ_Y выделяется уравнением $\langle\gamma, \cdot\rangle = 0$. Таким образом, цветным граням $\Sigma_i^\vee$ соответствуют грани Σ_i, или $C\cap\mathcal{P}$ при вершине λ_i, высекаемые опорными функциями $\gamma\in -C$. Но такие грани $C\cap\mathcal{P}$ получаются пересечением с C граней $\Gamma\subseteq\mathcal{P}$ той же размерности, высекаемых γ в $\mathcal{P}$.

Описание красок вытекает из того, что $\Pi_{L_i}^\vee=\Pi^\vee\cap\lambda_i^\perp$, а $\mathcal{F}_Y=\Pi_{L_i}^\vee\cap|\Gamma|^\perp$. Утверждение о примыканиях следует из теоремы 3 ввиду того, что двойственность обращает включения граней. □

Сделаем приведённое описание орбит более явным. Введём следующие обозначения.

Для любого подпространства $N\subseteq\mathfrak{X}\otimes\mathbb{Q}$, ортогонального некоторому доминантному весу, обозначим через P_N параболическую подгруппу G, порождённую B и корнями $\alpha\in N$. Пусть $P_N^\pm=(P_N^\pm)_\mathrm{u}\leftthreetimes L_N$ — разложения Леви, $L_N\supseteq T$, L_N' — коммутант L_N. Для любой подрешётки $\Lambda\subseteq\mathfrak{X}$ обозначим через $T^\Lambda\subseteq T$ квазитор, являющийся пересечением ядер всех характеров $\lambda\in\Lambda$.

Для любой грани $\Gamma\subseteq\mathcal{P}$ обозначим через V_Γ сумму весовых подпространств V с весами в Γ, а V_Γ' — T-инвариантное дополнение. Пусть $e_\Gamma=\sum_{\mu\in\Gamma}v_\mu\otimes v_{-\mu}$ — проектор на V_Γ в разложении $V=V_\Gamma\oplus V_\Gamma'$.

Заметим, что подпространства V_Γ, V_Γ' $L_{|\Gamma|}$- и даже $L_{\|\Gamma\|}$-инвариантны, причём $L_{\|\Gamma\|}'=L_{|\Gamma|}'\times L_{\langle\Gamma\rangle^\perp}'$, и $L_{\langle\Gamma\rangle^\perp}':V_\Gamma$ тривиально. Действительно, прибавление корней $\alpha\in\|\Gamma\|\setminus|\Gamma|$ выводит Γ за пределы $\mathcal{P}$, т.е. соответствующие корневые векторы действуют на V_Γ тривиально. Это означает, что $\Delta\cap\|\Gamma\|=(\Delta\cap|\Gamma|)\sqcup(\Delta\cap\langle\Gamma\rangle^\perp)$ — дизъюнктное ортогональное объединение.

Рассмотрим в пространствах $|\Gamma|,\langle\Gamma\rangle$ порождающие их решётки

$$|\Gamma|_\mathbb{Z}=\sum_{\lambda_i,\lambda_j\in\Gamma}\mathbb{Z}(\lambda_i-\lambda_j)+Q\cap|\Gamma|$$
$$\langle\Gamma\rangle_\mathbb{Z}=\sum_{\lambda_i\in\Gamma}\mathbb{Z}\lambda_i+Q\cap|\Gamma|$$

(Строго говоря, эти решётки зависят не только от $\mathcal{P}$ и Γ, но и от исходной системы старших весов $\lambda_0,\dots,\lambda_m$.) Заметим, что $\langle\Gamma\rangle_\mathbb{Z}$ — решётка весов $T:V_\Gamma$.

Теорема 8. *Представителями орбит $Y\subset X$, отвечающих граням $\Gamma\subseteq\mathcal{P}$ являются $y=\langle e_\Gamma\rangle$. Стабилизаторы имеют вид*

$$(G\times G)_y=\big((P_{\|\Gamma\|})_\mathrm{u}\times(P_{\|\Gamma\|}^-)_\mathrm{u}\big)\leftthreetimes\big((L_{\langle\Gamma\rangle^\perp}'T^{|\Gamma|_\mathbb{Z}}\times L_{\langle\Gamma\rangle^\perp}'T^{|\Gamma|_\mathbb{Z}})\cdot\operatorname{diag}L_{|\Gamma|}\big)$$
$$\dim Y=\dim G-\dim L_{\langle\Gamma\rangle^\perp}+\dim\Gamma$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in (\operatorname{int}\mathcal{C}_Y) \cap \mathcal{V}$. Тогда

$$\gamma(t) = \left\langle \sum \gamma(t) v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle = \left\langle \sum t^{\langle \gamma, \mu \rangle} v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle \to y \qquad \text{при } t \to 0$$

следовательно, $y \in \overline{T}$. Кроме того, $f_\lambda(\gamma(t)) = t^{\langle \lambda, \gamma \rangle} c_\lambda$, $c_\lambda = f_\lambda(e) \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathfrak{X}$.

Выберем замкнутую орбиту $Y_0 \subseteq \overline{Y}$, отвечающую некоторой вершине $\lambda_0 \in C$ грани Γ. В обозначениях §8, $y \in \mathring{X}$, а значит $y \in Z$. Надо показать, что $y \in Y \cap Z$.

Из локальной структуры $\mathring{X}$ (§6) следует, что $Y \cap Z$ — $(L \times L)$-орбита в Z, и $\mathcal{C}_{Y \cap Z} = \mathcal{C}_Y$ — грань $\Sigma_0^\vee$. Идеал $\overline{Y \cap Z}$ (замыкания в Z) как $(L \times L)$-подмодуль в $\mathbb{C}[Z]$ задаётся своими старшими векторами f_λ, $\lambda \in \Sigma_0 \setminus \mathcal{C}_Y^\perp = \Sigma_0 \setminus |\Gamma|$, откуда $f_\lambda(y) = 0 \iff f_\lambda|_{Y \cap Z} = 0$.

Более того, для любых $(b, b^-) \in B \times B^-$ имеем

$$(b, b^-) f_\lambda(y) = f_\lambda(\langle b^{-1} e_\Gamma b^- \rangle) = f_\lambda(b_\Gamma^{-1} e_\Gamma b_\Gamma^-)$$

($b^\pm = u_\Gamma^\pm b_\Gamma^\pm$ — разложения в $B^\pm = \left(P_{|\Gamma|}^\pm\right)_{\mathrm{u}} \rtimes B_{|\Gamma|}^\pm$, $B_{|\Gamma|}^\pm = B^\pm \cap L_{|\Gamma|}$). Это выражение можно рассматривать как значение функции веса $(-\lambda, \lambda)$ на элементе $b_\Gamma^{-1} b_\Gamma^- \in L_{|\Gamma|}$, т.к. в представлении $L_{|\Gamma|} : V_\Gamma$ единице соответствует e_Γ. Так как две "большие клетки" $B_{|\Gamma|} B_{|\Gamma|}^-, B_{|\Gamma|}^- B_{|\Gamma|} \subseteq L_{|\Gamma|}$ пересекаются по плотному подмножеству, для почти всех (b, b^-) существуют $(c_\Gamma^-, c_\Gamma) \in B_{|\Gamma|}^- \times B_{|\Gamma|}$ такие, что $f_\lambda(b_\Gamma^{-1} e_\Gamma b_\Gamma^-) = f_\lambda(c_\Gamma^- e_\Gamma c_\Gamma) = d_\lambda f_\lambda(y)$, $d_\lambda \neq 0$ (ибо f_λ — весовая функция для $B_{|\Gamma|}^- \times B_{|\Gamma|}$).

Поэтому $f_\lambda(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}[Z]_{(\lambda)}$ обращается в 0 в y, откуда $y \in \overline{Y \cap Z}$, но не содержится в меньших орбитах, т.е. $y \in Y \cap Z$.

Перейдём к стабилизаторам. Для $(g, h) \in G \times G$ имеем $(g, h) y = y \iff g e_\Gamma h^{-1}$ пропорционально $e_\Gamma \iff$

(1) $g V_\Gamma = V_\Gamma$,

(2) $h V'_\Gamma = V'_\Gamma$,

(3) действия g, h на $V_\Gamma \cong V/V'_\Gamma$ отличаются скалярным множителем.

Условие (1) означает $g \in P_{\|\Gamma\|}$, (2) равносильно $h \in P_{\|\Gamma\|}^-$, причём ядрами действий $P_{\|\Gamma\|}^\pm : V_\Gamma \cong V/V'_\Gamma$ являются $\left(P_{\|\Gamma\|}^\pm\right)_{\mathrm{u}} \rtimes (L'_{\langle\Gamma\rangle^\perp} T^{\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{Z}}})$, т.е. дальше можно считать $g, h \in L_{|\Gamma|}$. Тогда условие (3) означает, что, с точностью до умножения на один и тот же элемент $L_{|\Gamma|}$, $g, h \in T^{|\Gamma|_{\mathbb{Z}}}$.

Формула для $\dim Y$ легко следует из вида $(G \times G)_y$ и структуры $L'_{\|\Gamma\|}$. $\square$

Замечание. Теорема обобщает результаты де Кончини–Прочези для превосходных и регулярных пополнений (см. [CP-I], [CP-II], [Br4]), а также Путчи–Реннера [PR], [Pu2], [Re2], и Винберга [Vin, теорема 7] для алгебраических полугрупп. Прямая связь с алгебраическими полугруппами видна из рассмотрения конуса над X в $\mathbb{V}$, который является алгебраической полугруппой, чья группа обратимых элементов — расширение G при помощи гомотетий (ср. [Re2]). Идея вычисления стабилизатора взята из [Vin, §7].

Результаты, близкие к предложению 8 и теореме 8, были получены для *нормальных* аффинных и проективных вложений G (и даже в более общем контексте) Алексеевым и Брионом [AB1], [AB2]. Когда первоначальный текст статьи был готов, автор узнал о работе Капранова [Kap] в которой были доказаны все утверждения предложения 8 и теоремы 8, кроме относящихся к стабилизаторам и размерностям, см. [Kap, 2.4.2]. Однако доказательство, приведённое в этой работе, представляется не вполне исчерпывающим. Этой ссылкой автор обязан М. Бриону.

Следствие. *$\overline{T}$ пересекает все $(G \times G)$-орбиты в X. T-орбиты в пересечении $\overline{T}$ с $(G \times G)$-орбитой транзитивно переставляются группой W.*

Замечание. Аналогичное первому утверждение справедливо для любого сферического многообразия [Br3, 2.4]. Простейшее "трансцендентное" доказательство следствия состоит в том, чтобы замкнуть в X разложение Картана $G = KTK$, где $K \subset G$ — максимальная компактная подгруппа. Можно дать и "алгебраическое" доказательство в том же духе, рассматривая разложение Ивахори группы $G\big(\mathbb{C}((t))\big)$ вместо разложения Картана, ср. [Br3, 2.4, Exemple 2].

С другой стороны, это следствие можно использовать для получения простого доказательства теоремы 8 следующим образом. Легким упражнением в торической геометрии (ср. §5) является тот факт, что точки $y = \langle e_\Gamma \rangle$ по *всем* граням $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ образуют полный набор представителей T-орбит в $\overline{T}$. Значит, эти y представляют все $(G \times G)$-орбиты в X. Теперь из структуры соответствующей орбиты Y как однородного пространства, задаваемой стабилизатором $(G \times G)_y$, легко вывести, что $Y^{\operatorname{diag} T}$ суть объединение T-орбит, транзитивно переставляемых группой W. Поэтому точки $y = \langle e_\Gamma \rangle$ по всем таким $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$, что $(\operatorname{int}\Gamma) \cap C \neq \emptyset$, образуют полный набор представителей $(G \times G)$-орбит в X.

Однако нас также интересуют комбинаторные данные этих орбит из теории вложений (цветные конусы), поэтому мы приводим другое доказательство.

10. Нормальность

Вопросы нормальности и гладкости носят локальный характер, поэтому достаточно исследовать их в точках какой-либо замкнутой орбиты $Y_0 \subset X$. Общий критерий нормальности по существу содержится в предложениях 6,7 и замечаниях к ним.

Будем говорить, что веса $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathfrak{X}^+$ *G-порождают* полугруппу S, если S состоит из всех старших весов $k_1\mu_1 + \dots + k_s\mu_s - \beta$ ($\beta \in \mathbb{Z}_+\Pi$) G-модулей $V(\mu_1)^{\otimes k_1} \otimes \dots \otimes V(\mu_s)^{\otimes k_s}$, $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 9. *В обозначениях §8, пусть $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathfrak{X}^+_L$ — все старшие веса $L : V$, кроме λ_0. Тогда X нормально в точках Y_0 тогда и только тогда, когда $\mu_1 - \lambda_0, \dots, \mu_s - \lambda_0$ L-порождают $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$.*

Доказательство. Заметим, что X нормально в точках Y_0 в том и только в том случае, когда Z нормально. По предложению 6, $Z \hookrightarrow \mathbb{V}_0 = \bigoplus \mathrm{L}(V_L(\mu_j - \lambda_0))$, поэтому $\mathbb{C}[Z] \subseteq \mathbb{C}[L]$ порождена компонентами $\mathbb{C}[L]_{(\mu_j - \lambda_0)}$. По предложению 4, $\mathbb{C}[Z] = \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}^+_L$ — полугруппа, L-порождённая $\mu_j - \lambda_0$, $j = 1, \dots, s$. Остаётся применить следствие предложения 7. $\square$

Применение этого критерия требует информации о разложении V на простые L-модули и о разложениях тензорных произведений L-модулей. Первую проблему устраняет следующая лемма:

Лемма 3. *Веса $\lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_m - \lambda_0$, $-\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ являются старшими для $L : V(-\lambda_0)$ и L-порождают все старшие веса $L : V(-\lambda_0)$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $v_{\lambda_i}, e_{-\alpha_j} v_{\lambda_0}$ — старшие векторы $L : V$. Далее, для каждого $i = 0, \dots, m$ существует единственный L-подмодуль $V_L(\lambda_i) \hookrightarrow V$ (порождённый старшим вектором v_{λ_i}) и

$$V = \sum_{k,i} \underbrace{\mathfrak{g} \cdots \mathfrak{g}}_{k} v_{\lambda_i} = \sum_{k,i} \underbrace{\mathfrak{p}^- \cdots \mathfrak{p}^-}_{k} \cdot V_L(\lambda_i)$$

Алгебра $\mathfrak{p}^-$ порождается $\mathfrak{l}$ и $e_{-\alpha_j}$, $\alpha_j \notin \Pi_L$, и содержит простые L-подмодули $\mathfrak{g}_L(-\alpha_j) \cong V_L(-\alpha_j)$ со старшими векторами $e_{-\alpha_j}$. Поэтому

$$V = \sum_{n,i,j_1,\dots,j_n} \mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_1}) \cdots \mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_n}) \cdot V_L(\lambda_i)$$

Но $\mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_1}) \cdots \mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_n}) \cdot V_L(\lambda_i)$ есть фактормодуль $V_L(-\alpha_{j_1}) \otimes \dots \otimes V_L(-\alpha_{j_n}) \otimes V_L(\lambda_i)$, откуда вытекает второе утверждение леммы. $\square$

Следовательно, в предложении 9 можно заменить $\mu_1-\lambda_0,\dots,\mu_s-\lambda_0$ на $\lambda_1-\lambda_0,\dots,\lambda_m-\lambda_0$, $-\alpha_j\in-(\Pi\setminus\Pi_L)$ (хотя иногда удобнее оперировать со всеми L-старшими весами, если они известны). Однако остаётся проблема разложения на простые L-модули тензорных произведений модулей с L-порождающими старшими весами. (Для нормальности нужно получить среди старших весов возникающих простых L-подмодулей все порождающие $\mathfrak{X}\cap\Sigma_0$.) Поэтому в общем случае критерий малоэффективен, однако из него вытекают простые достаточные условия.

Следствие. *X нормально (в точках Y_0), если $\lambda_1-\lambda_0,\dots,\lambda_m-\lambda_0$, $-\alpha_j\in-(\Pi\setminus\Pi_L)$ порождают $\mathfrak{X}\cap\Sigma_0$.*

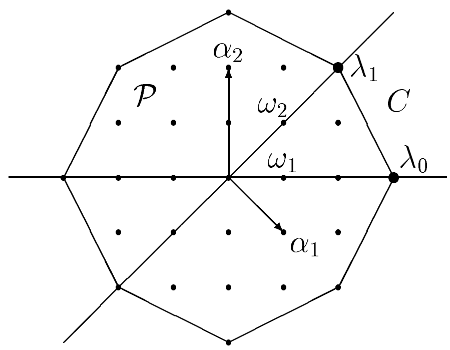
Необходимое условие нормальности, полученное Реннером для редуктивных алгебраических полугрупп (см. [Re1, 6.4]), переносится на случай проективных компактификаций.

Предложение 10. *Если X нормально, то $\overline{T}$ нормально.*

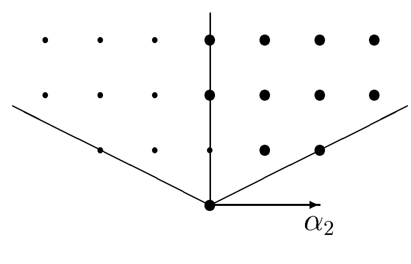
Доказательство. Заменив G на L, X на Z, $\overline{T}$ на замыкание T в L, мы сводим вопрос к случаю аффинного вложения. Имеем $Z\subseteq\mathbb{V}_0=\bigoplus\mathrm{L}(V_L(\nu_j))$, где $\nu_j\in\mathfrak{X}_L^+$ L-порождают $\Sigma_0\cap\mathfrak{X}$. Увеличив $\mathbb{V}_0$ добавлением новых L-старших весов, так чтобы ν_j порождали $\Sigma_0\cap\mathfrak{X}$, мы не изменим $Z=\overline{L}\subseteq\mathbb{V}_0$ (старшие веса $\mathbb{C}[Z]$ те же), но добъёмся того, что веса $T:V_L(\nu_j)$ порождают полугруппу $W_L\Sigma_0\cap\mathfrak{X}$ всех целых точек конуса $W_L\Sigma_0$ многогранника $\mathcal{P}$ в λ_0. Её полугрупповая алгебра суть координатная алгебра $\overline{T}\subseteq Z$ и стало быть $\overline{T}$ нормально. □

Замечание. Это условие эффективно проверяемо (§5), а в случае, когда все вершины $\mathcal{P}$ — регулярные веса, совпадает с общим критерием нормальности. Однако в общем случае оно не является достаточным.

Пример. Пусть $G=\mathrm{Sp}_4$ и старшие веса V суть $\{\lambda_0,\lambda_1\}=\{3\omega_1,2\omega_2\}$. Многогранник весов $\mathcal{P}$ изображён на рис. (а), старшие веса отмечены жирными точками.



(а)



(б)

Здесь $L = \mathrm{SL}_2 \times \mathbb{C}^*$, $\Delta_L = \{\pm\alpha_2\}$. Полугруппа весов $\mathbb{C}[\overline{T}]$ (замыкание в Z) изображена на рис. (б) точками, а жирные точки выделяют подполугруппу старших весов $\mathbb{C}[Z]$ (которую легко вычислить, используя формулу Клебша–Гордана). Теперь видно, что $\overline{T}$ нормально, а Z — нет.

11. Гладкость

В теории сферических многообразий гладкость обычно является гораздо более тонким свойством, чем нормальность. Общий критерий гладкости [Br2, 4.2] весьма замысловат. Как ни странно, для проективных компактификаций редуктивных групп гладкость проверить легче, чем нормальность. Сохраним обозначения §§8,10.

Теорема 9. *X гладко в точках Y_0 тогда и только тогда, когда $L \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_p}$ —* прямое *произведение, а в разложении L-модуля $V_0(-\lambda_0)$ (здесь, как и выше, $V = \mathbb{C}v_{\lambda_0} \oplus V_0$) встречаются только полиномиальные представления L и среди них минимальные представления всех сомножителей. На языке корней и весов это сводится к следующим условиями:*

(1) *Все простые компоненты L имеют тип* A, *и их число не больше* $\dim Z(L)$.

(2) *Σ_0 строго симплициален, т.е. порождён базисом $\mathfrak{X}$.*

(3) *Можно так занумеровать простые корни в порядке их следования на диаграммах Дынкина связных компонент $\Pi_L^{(k)} = \{\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{n_k-1}^{(k)}\}$ системы Π_L, $k = 1, \dots, q$, и разбить базис свободной полугруппы $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$ на группы $\{\pi_1^{(k)}, \dots, \pi_{n_k}^{(k)}\}$, $k = 1, \dots, p$, $p \geq q$, что $\langle \pi_j^{(k)}, \alpha_j^{(k)\vee} \rangle = 1$, $\pi_j^{(k)} \perp \Pi_L \setminus \{\alpha_j^{(k)}\}$, $n_k\pi_j^{(k)} - j\pi_{n_k}^{(k)} \perp \pi_{n_1}^{(1)}, \dots, \pi_{n_p}^{(p)}$, $\forall j, k$.*

(4) *Среди весов $\lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_m - \lambda_0$, $-\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ встречаются все $\pi_1^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$.*

Доказательство. Заметим, что X гладко (в точках Y_0) тогда и только тогда, когда Z гладко, т.е. вопрос сводится к аффинным вложениям.

Пусть, как и выше, $\mu_1, \dots, \mu_s$ — все старшие веса $L : V$. Имеем вложение $Z \hookrightarrow \mathbb{V}_0 = \bigoplus \mathrm{L}(V_L(\mu_j - \lambda_0))$, $y_0 \mapsto 0$.

Если Z гладко, то по фундаментальной лемме Луны (§3), Z изоморфно проектируется на T_0Z при $(L \times L)$-эквивариантном проектировании $\mathbb{V}_0 \to T_0Z$. Перенумеровав μ_j, получаем $Z \cong \mathrm{L}(V_L(\mu_1 - \lambda_0)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{L}(V_L(\mu_p - \lambda_0))$, $p \leq s$.

Пусть при этом изоморфизме $e \mapsto (e_1, \dots, e_p)$. При проекции $Z \to \mathrm{L}(V_L(\mu_k - \lambda_0))$ плотная орбита $L \subset Z$ проектируется на плотную орбиту Le_k, поэтому e_k — ненулевой скалярный оператор, и после перенормировки изоморфизма можно считать его единичным. Тогда проекция гомоморфно отображает L на $\mathrm{GL}(V_L(\mu_k - \lambda_0))$. По соображениям размерности $L \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_p}$, $n_k = \dim V_L(\mu_k - \lambda_0)$, а $\mu_k - \lambda_0$ — старшие веса минимальных представлений GL_{n_k}, $k = 1, \dots, p$.

Полугруппа $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$ L-порождается весами $\mu_k - \lambda_0$ и состоит из старших весов всевозможных полиномиальных представлений L (т.е. продолжаемых на Z). Из описания полиномиальных представлений GL_n следует, что $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$ свободно порождается весами $\pi_j^{(k)}$, где $\pi_1^{(k)}$ — старший вес минимального представления GL_{n_k} и $V_L(\pi_j^{(k)}) = \bigwedge^j V_L(\pi_1^{(k)})$. Отсюда с учётом леммы 3 легко вытекают условия (1)–(4).

Обратно, если условия (1)–(4) выполнены, то $L \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_p}$, и старшие веса в $\mathbb{C}[Z]$ отвечают всевозможным полиномиальным представлениям L, откуда $Z \cong \mathrm{Mat}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{Mat}_{n_p}$, т.е. гладко. □

Замечание. В случае регулярного веса λ_0, $L = T$, и критерий гладкости сводится к условиям (2) и (4): X гладко (в точках Y_0) $\iff$ Σ_0 порождён базисом $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(p)}$ решётки $\mathfrak{X}$, и $\lambda_0 + \pi^{(k)}$ лежат в системе весов $T : V$.

Пример. Пусть $G = \mathrm{SO}_{2l+1}$ и $V = V(\lambda_0)$ — неприводимое представление фундаментального старшего веса $\lambda_0 = \omega_i$. При $i < l$ многообразие X не будет гладким — нарушается условие (1) (или (3) при $l = 2$).

В случае спинорного представления имеем $\lambda_0 = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l)/2$, где $\pm\varepsilon_1, \dots, \pm\varepsilon_l$ — ненулевые веса тавтологического представления SO_{2l+1}. Веса спинорного представления имеют вид $(\pm\varepsilon_1 \pm \dots \pm \varepsilon_l)/2$, $\Pi = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \varepsilon_l\}$, $\Pi_L = \Pi \setminus \{\varepsilon_l\}$. При ограничении на L старшие веса V имеют вид $\mu_1 = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)/2$, $\mu_2 = (\varepsilon_1 + \dots - \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)/2, \dots$, $\mu_l = (-\varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)/2$. Векторы $\pi_k = \mu_k - \lambda_0$ порождают Σ_0 и образуют базис $\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \rangle$: $\pi_1 = -\varepsilon_1, \pi_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \pi_l = -\varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_l$. Легко видеть и условие (3). Таким образом, X гладко.

Замечание. Используя более тонкую версию локальной структуры в окрестности незамкнутой орбиты, можно получить условия нормальности и гладкости в любой точке X.

12. Примеры

В качестве иллюстрации доказанных выше общих теорем опишем геометрические свойства эквивариантных компактификаций простых алгебраических групп в пространствах проективно-линейных операторов фундаментальных и присоединённых представлений. В каждом случае мы опишем структуру множества орбит и выясним нормальность и гладкость компактификации.

Результаты представлены в таблицах 1–2. Мы рассматриваем представление простой алгебраической группы G, указанной с точностью до конечнолистного накрытия в столбце “Группа”, в модуле $V = V(\lambda_0)$, где λ_0 — фундаментальный вес или старший корень. Фундаментальные представления обозначаются в столбце “Модуль” указанием старшего веса λ_0, а присоединённые, если они не являются фундаментальными, символом Ad. Простые корни и, соответственно, фундаментальные веса нумеруются согласно [BO] (так что $V(\omega_1)$ всегда имеет минимальную размерность).

Мы рассматриваем $(G \times G)$-многообразие $X = \overline{\operatorname{Ad} G} \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{L}(V))$. В столбце “Орбиты” указаны размерности и граф примыкания $(G \times G)$-орбит в X. Для классических групп указаны также представители орбит (задаваемые проекторами $V \twoheadrightarrow V_\Gamma$; если $V = \mathfrak{g}$, то V_Γ — центр $(\mathfrak{p}_{|\Gamma|})_{\mathrm{u}}$ или $(\mathfrak{p}_{||\Gamma||})_{\mathrm{u}}$). Эта информация может быть легко получена из теоремы 8 и следующей леммы (ср. [PR, Thm. 2]):

Лемма 4. *Пусть $V = V(\lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathfrak{X}^+$, и $L \subseteq P = P(\lambda_0)$ — стандартная подгруппа Леви. Грани $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$, пересекающие C, суть $\Gamma = \mathcal{P} \cap (\lambda_0 + \langle \Pi_\Gamma \rangle)$, где $\langle \Pi_\Gamma \rangle \subseteq \Pi$ — подсистема простых корней, никакая связная компонента которой не содержится в Π_L, или $\Pi_\Gamma = \emptyset$. При этом $|\Gamma| = \langle \Pi_\Gamma \rangle$, системы простых корней $L_{|\Gamma|}$ и $L_{\langle \Gamma \rangle^\perp}$ суть Π_Γ и $\Pi_{\Gamma^\perp} = \Pi_L \cap (\Pi_\Gamma)^\perp$, а e_Γ — $L_{|\Gamma|}$-эквивариантный проектор на $V_{L_{|\Gamma|}}(\lambda_0) \subseteq V_G(\lambda_0)$.*

В частности, при $\lambda_0 = \omega_i$, Π_Γ суть связная подсистема Π, содержащая α_i, или $\emptyset$, а $\Pi_{\Gamma^\perp} = (\Pi_\Gamma)^\perp \cap \Pi \setminus \{\alpha_i\}$.

Доказательство. Грани $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$, $\operatorname{int} \Gamma \cap C \neq \emptyset$, высекаются опорными функциями $\gamma \in -C$. Рассмотрим подсистему корней $\Delta_\gamma = \Delta \cap \gamma^\perp$ с простыми корнями из $\Pi_\gamma = \Delta_\gamma \cap \Pi$. Пространство $|\Gamma|$ порождается корнями $\alpha \in \Delta_\gamma^+$, для которых $e_{-\alpha} v_{\lambda_0} \neq 0$, т.е. $\alpha \in \Delta_\gamma^+ \setminus \Delta_L^+$ или, что равносильно, α выражается с положительными коэффициентами через связную подсистему простых корней $\Pi' \subseteq \Pi_\gamma$, $\Pi' \not\subseteq \Pi_L$. Через такие α линейно выражаются все такие Π', поэтому $|\Gamma| = \langle \Pi_\Gamma \rangle$, где Π_Γ — объединение связных компонент Π_γ, не содержащихся в Π_L. Отсюда следует описание Γ, описание e_Γ вытекает из $V_\Gamma = V_{L_{|\Gamma|}}(\lambda_0)$, а остальные утверждения леммы очевидны. □

Графы примыкания орбит совпадают с графами примыкания орбит в неприводимых простых алгебраических полугруппах (которые являются конусами над нашими проективными компактификациями), вычисленными в [PR].

В столбце “L” мы указываем подгруппу Леви в $P = P(\lambda_0)$, а в столбце “L-веса” — ненулевые старшие веса $L : V(-\lambda_0)$. Если их слишком много, то мы указываем только $-\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ (которые L-порождают остальные старшие веса по лемме 3). Используются следующие обозначения: ε — базисный вес центрального (одномерного) тора; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — веса тавтологического представления классической подгруппы GL_n в $\mathbb{C}^n$ (для ортогональной и симплектической групп $\varepsilon_{n-i} = -\varepsilon_i$); $\pi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ — старший вес $\bigwedge^i \mathbb{C}^n$; если L представлена, как факторгруппа прямого произведения нескольких групп, то веса сомножителей различаются отметками $'$, $''$, ...

В столбцах “Нормальность” и “Гладкость” отмечено, обладает ли X указанным свойством. Если свойство нормальности нарушается, мы указываем причину (см. предложения 7,9): если S — полугруппа старших весов $L : \mathbb{C}[Z]$ и $\mu \notin S$, но $k\mu \in S$, то мы пишем “$\nexists\mu, \exists k\mu$”. При проверке нормальности полезны следующие две леммы:

Лемма 5. *Пусть $G_i : V_i$ $(i = 1, \dots, s)$ — точные представления связных редуктивных групп, причем $Z(G_i)$ действуют гомотетиями. Пусть Z_i, Z — замыкания образов G_i, $G_1 \times \dots \times G_s$ в $\mathrm{L}(V_i)$, $\mathrm{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_s)$, соответственно. Тогда Z нормально $\iff$ $Z_1, \dots, Z_s$ нормальны.*

Доказательство. Алгебра $\mathbb{C}[Z_1 \times \dots \times Z_s]$ полиградуирована действием s-мерного тора $Z(G_1) \times \dots \times Z(G_s)$, причём $\mathbb{C}[Z]$ — алгебра инвариантов подтора $T_0 = \{(t_1, \dots, t_s) \mid t_1 \dots t_s = 1\}$. Поэтому нормальность Z следует из нормальности $Z_1, \dots, Z_s$, прямых произведений и факторов нормальных многообразий [Кр, Приложение I, 4.4, II.3.3, теорема 1].

С другой стороны, действие $Z(G_i) : Z_i$ гомотетиями поднимается на $\widetilde{Z}_i$. Пусть $f_i \in \mathbb{C}[\widetilde{Z}_i]$ — произвольная однородная функция. Выберем для всех $j \neq i$ однородные функции $f_j \in \mathbb{C}[\widetilde{Z_j}]$ той же степени и рассмотрим $f = f_1 \dots f_s \in \mathbb{C}[\widetilde{Z_1 \times \dots \times Z_s}]^{T_0}$. Это рациональная функция на $Z_1 \times \dots \times Z_s$, постоянная на T_0-орбитах. Легко видеть, что все T_0-орбиты в $(Z_1 \setminus \{0\}) \times \dots \times (Z_s \setminus \{0\})$ замкнуты в $Z_1 \times \dots \times Z_s$, т.е. T_0-орбиты общего положения замкнуты. Поскольку замкнутые орбиты разделяются инвариантыми многочленами, то f спускается до рациональной функции на Z, целой над $\mathbb{C}[Z]$ [Кр, Приложение I, 3.7, теорема 2, III.3.3, теорема 1]. Поэтому если Z нормально, то $f \in \mathbb{C}[Z]$, откуда $f_i \in \mathbb{C}[Z_i]$, а следовательно, Z_i нормально. $\square$

Лемма 6. *Пусть G — одна из групп GL_n, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{2l}$, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{SO}_{2l}$, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_n$, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{E}_l$ ($l = 6, 7$), а $V = V(\mu_0)$, $\mu_0 = \pi_k$, $\varepsilon+\omega_1$, $\varepsilon+\omega_1$, $\varepsilon+\omega_{[n/2]}$, $\varepsilon+\omega_1$, соответственно. Тогда замыкание $Z \subseteq \mathrm{L}(V)$ образа G нормально.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа старших весов $G : \mathbb{C}[Z]$ (G-порождённая μ_0). Согласно предложению 7 и последующим замечаниям, Z нормально $\iff$ S *насыщена*, т.е. $S = \mathfrak{X} \cap \Sigma_0$, где $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}S$, а $\Sigma_0 = \mathbb{Q}_+S$ — конус над $C \cap \mathcal{P}$.

В случае $G = \mathrm{GL}_n$ все веса в S полиномиальны, т.е. имеют вид $\mu = m_1\varepsilon_1 + \cdots + m_n\varepsilon_n$, $m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$. Из формулы Пьери для разложения $V(\mu) \otimes V(\pi_k)$, где μ — любой полиномиальный вес, легко следует, что S — насыщенная полугруппа, состоящая из всех полиномиальных весов μ, таких что $m_2 + \cdots + m_n \geq (k-1)m_1$ и $m_1 + \cdots + m_n$ делится на k.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{2l}$ доминантные веса $V(\mu_0)^{\otimes m}$ суть $\mu = m\varepsilon + m_1\varepsilon_1 + \cdots + m_l\varepsilon_l$, $m_1 \geq \cdots \geq m_l \geq 0$, $m - m_1 - \cdots - m_l \in 2\mathbb{Z}_+$. Все они принадлежат S: $k\varepsilon + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ — старшие веса $\bigwedge^k V(\mu_0)$, 2ε — старший вес $V(\mu_0)^{\otimes 2}$, а прочие μ — их $\mathbb{Z}_+$-линейные комбинации. Поэтому S насыщена.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SO}_{2l}$ ситуация аналогична, только доминантные веса имеют вид $\mu = m\varepsilon + m_1\varepsilon_1 + \cdots + m_{l-1}\varepsilon_{l-1} \pm m_l\varepsilon_l$.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{2l+1}$ доминантные веса $V(\mu_0)^{\otimes m}$ суть $\mu = m\varepsilon + (m_1\varepsilon_1 + \cdots + m_l\varepsilon_l)/2$, $m \geq m_1 \geq \cdots \geq m_l \geq 0$, $m \equiv m_1 \equiv \cdots \equiv m_l \pmod 2$. Все они принадлежат S: $2\varepsilon + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ ($0 \leq k < l$) — старшие веса $V(\mu_0)^{\otimes 2}$, $\mu_0 = \varepsilon + (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l)/2$, а прочие μ — их $\mathbb{Z}_+$-линейные комбинации. Поэтому S насыщена.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{2l}$ доминантные веса $V(\mu_0)^{\otimes m}$ суть $\mu = m\varepsilon + (m_1\varepsilon_1 + \cdots + m_l\varepsilon_l)/2$, $m \geq m_1 \geq \cdots \geq m_{l-1} \geq |m_l|$, $(l-2)m \geq m_1 + \cdots + m_{l-1} - m_l$, $m \equiv m_1 \equiv \cdots \equiv m_l \pmod 2$, $lm \equiv m_1 + \cdots + m_l \pmod 4$. Задаваемая этими условиями насыщенная полугруппа порождается весами $\mu_0 = \varepsilon + \omega_l$, $2\varepsilon + \omega_{l-2k}$ ($1 \leq k \leq l/2$), $4\varepsilon + \omega_i + \omega_j$ ($0 \leq i \leq j \leq l-2$, $i \equiv j \pmod 2$), $k\varepsilon + \omega_{l-i} + (k-2)\omega_{l-1}$ ($2 \leq k \leq i \leq l$, $k \equiv i \pmod 2$), $(k+2)\varepsilon + \omega_{l-i} + \omega_{l-j} + (k-2)\omega_{l-1}$ ($2 \leq k \leq i \leq j \leq l$, $i \equiv j + k \pmod 2$). (Здесь $\omega_0 = 0$.) Легко убедиться, что все они являются старшими весами в соответствующих $V(\mu_0)^{\otimes m}$ (где m — коэффициент при ε), а значит, наша полугруппа совпадает с S.

Аналогичное рассуждение применяется для $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{E}_l$: рассматривается полугруппа $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$, где $\Sigma_0 = \mathbb{Q}_+(C \cap \mathcal{P})$. Её образующие суть следующие веса: $k\varepsilon + \omega_k$, $(k + 9 - l)\varepsilon + \omega_k$ ($0 \leq k \leq l-3$, $\omega_0 = 0$), $(l-2)\varepsilon + \omega_{l-2} + \omega_l$, $(l-1)\varepsilon + 2\omega_{l-2}$, $4\varepsilon + \omega_{l-2}$, $2\varepsilon + \omega_{l-1}$, $(l-1)\varepsilon + \omega_{l-1} + 2\omega_l$, $l\varepsilon + 3\omega_l$, $3\varepsilon + \omega_l$. Можно проверить, что все они возникают как старшие веса в $V(\mu_0)^{\otimes m}$, а значит $S = \mathfrak{X} \cap \Sigma_0$. Рутинные вычисления мы опустим. $\square$

Замечание. Заметим, что веса μ_0 из леммы 6, ограниченные на максимальный тор в G', суть в точности всевозможные микровеса простых алгебраических групп, с точностью до диаграммных автоморфизмов. Очевидно, что если (ограничение) μ_0 — не микровес, то полугруппа S не насыщена, откуда Z не нормально. Это наблюдение впервые было сделано Фальтингсом [Fal], который также доказал нормальность Z для некоторых микровесов. Единое доказатеьство нормальности для любого микровеса было недавно получено де Кончини [Con] с использованием одной леммы из теории представлений [Kan]. Когда первоначальный текст статьи был готов, автор узнал о работах [Fal], [Con], [Kan] от М. Бриона, которому он признателен за эти ссылки.

Таблица 1: Орбиты и примыкания

<table>
<tr><th>Группа</th><th>Модуль</th><th>Орбиты</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\mathrm{A}_l = \mathrm{SL}_n$
$n = l + 1$</td><td>ω_1, ω_l</td><td>$Y_r \ni \langle\phi\rangle$, $\operatorname{rk}\phi = r$, $\dim Y_r = 2nr - r^2 - 1$
$Y_n \to \cdots \to Y_1$</td></tr>
<tr><td>ω_k
$1 < k < l$</td><td>$Y_{sr} \ni \left\langle \bigwedge^k \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes \bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{r-s} \right\rangle$
$\dim Y_{sr} = 2nr - r^2 - s^2 - 1$, $\dim Y_{kk} = 2nk - 2k^2$
$$\begin{tikzcd} Y_{0n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & Y_{0,k+1} \arrow[d] & \\ \vdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ Y_{k-1,n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_{k-1,k+1} \arrow[r] & Y_{kk} \end{tikzcd}$$</td></tr>
<tr><td>Ad</td><td>$\dim Y_0 = n^2 - 1$, $\dim Y_{sr} = n^2 - (r-s)^2 - 2$
$$\begin{tikzcd} & Y_{11} \arrow[dr] & & & \\ & & Y_{12} \arrow[dr] & & \\ & Y_{22} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \ddots \arrow[dr] & \\ Y_0 \arrow[uuur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dddr] & & \vdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y_{1,n-1} \\ & \vdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] & \\ & & Y_{n-2,n-1} \arrow[ur] & & \\ & Y_{n-1,n-1} \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$</td></tr>
</table>

Таблица 1: (продолжение)

<table>
<tr><th>Группа</th><th>Модуль</th><th>Орбиты</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathrm{B}_l = \mathrm{SO}_n$
$n = 2l+1$</td><td>ω_k
$k < l$</td><td>$Y_{sr} \ni \left\langle \bigwedge^k \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes \bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{r-s} \right\rangle$
$Y_s \ni \left\langle \bigwedge^k \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes \bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{n-2s} \right\rangle$
$\mathbb{C}^s \perp \mathbb{C}^{n-2s} \supset \mathbb{C}^{r-s}$ — подпространства в $\mathbb{C}^n$
$\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^{r-s}$ изотропны, а $\mathbb{C}^{n-2s}$ невырождено
$\dim Y_{sr} = (2n-2r-1)r - s^2 - 1$
$\dim Y_{kk} = (2n-3k-1)k$, $\dim Y_s = n(n-1)/2 - s^2$
$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r]\arrow[d] & Y_{0l} \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \arrow[r]\arrow[d] & Y_{0,k+1} \arrow[d] & \\ \vdots \arrow[r]\arrow[d] & \vdots \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \arrow[r]\arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ Y_{k-1} \arrow[r] & Y_{k-1,l} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_{k-1,k+1} \arrow[r] & Y_{kk} \end{tikzcd}$$</td></tr>
<tr><td>ω_l</td><td>$Y_s \ni \left\langle S^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes S^{n-2s} \right\rangle$
S^m — пространство спиноров над $\mathbb{C}^m$
$\mathbb{C}^s \perp \mathbb{C}^{n-2s}$ — подпространства в $\mathbb{C}^n$
$\mathbb{C}^s$ изотропно, а $\mathbb{C}^{n-2s}$ невырождено
$\dim Y_s = n(n-1)/2 - s^2$
$Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathrm{C}_l = \mathrm{Sp}_n$
$n = 2l$</td><td>ω_k</td><td>Орбиты и примыкания аналогичны случаю B_l, лишь $\bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{n-2s}$ $(s = 0, \ldots, k)$ заменяется на старшую компоненту; $\dim Y_{sr} = (2n-2r+1)r - s^2 - 1$,
$\dim Y_{kk} = (2n-3k+1)k$, $\dim Y_s = n(n+1)/2 - s^2$</td></tr>
<tr><td>Ad</td><td>$\dim Y = n(n+1)/2$, $\dim Y_r = (2n-2r+1)r - 1$
$Y \longrightarrow Y_l \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{D}_l = \mathrm{SO}_n$
$n = 2l$</td><td>ω_k
$k \le l-2$</td><td>Y_s, Y_{sr} такие же, как для B_l, но Y_{sl} разбивается на 2 орбиты $Y_{sl}^{\pm}$ в соответствии с выбором $\mathbb{C}^l = \mathbb{C}^s \oplus \mathbb{C}^{l-s}$ в одной из 2-х связных компонент изотропного грассманиана.
$$\begin{tikzcd} & Y_{0l}^{+} \arrow[dr]\arrow[dd] & & & & \\ Y_0 \arrow[ur]\arrow[r]\arrow[d] & Y_{0l}^{-} \arrow[r]\arrow[d] & Y_{0,l-1} \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \arrow[r]\arrow[d] & Y_{0,k+1} \arrow[d] & \\ \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots \arrow[r]\arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ Y_{k-1} \arrow[r]\arrow[dr] & Y_{k-1,l}^{+} \arrow[r] & Y_{k-1,l-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_{k-1,k+1} \arrow[r] & Y_{kk} \\ & Y_{k-1,l}^{-} \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$</td></tr>
</table>

Таблица 1: (продолжение)

Группа	Модуль	Орбиты
	ω_{l-1}, ω_l	$Y_s \ni \left\langle S_{\pm}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes S_{\pm}^{n-2s} \right\rangle$ $Y'_s \ni \left\langle S_{\pm}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^l \mathbb{C}^l \otimes \mathbb{C}^{l-s} \right\rangle$ $S_{\pm}^m \subset S^m$ — пространства полуспиноров $\mathbb{C}^l = \mathbb{C}^s \oplus \mathbb{C}^{l-s} \subset \mathbb{C}^n$ изотропно $\dim Y_s = n(n-1)/2 - s^2$, $\dim Y'_s = n(n-1)/2 - s^2 - 1$ $(0 \le s \le l-3)$ $\dim Y_{l-2} = l^2 + 3l - 7$, $\dim Y_{l-1} = l(l-1)$ $\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] \arrow[dd] & Y_{l-3} \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\ & & & Y_{l-2} \arrow[r] & Y_{l-1} \\ Y'_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y'_{l-3} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$
G_2	ω_1, ω_2	$14 \to 13 \to 10$
F_4	ω_1, ω_4	$52 \to 51 \to 48 \to 43 \to 30$
	ω_2, ω_3	$\begin{tikzcd} 52 \arrow[r] \arrow[d] & 51 \arrow[r] \arrow[d] & 48 \arrow[d] & \\ 51 \arrow[r] & 50 \arrow[r] & 47 \arrow[r] & 40 \end{tikzcd}$
E_6	ω_1, ω_5	$\begin{tikzcd} 78 \arrow[r] \arrow[d] & 77 \arrow[r] \arrow[d] & 74 \arrow[d] & & & \\ 77 \arrow[r] & 76 \arrow[r] & 73 \arrow[r] & 66 \arrow[r] & 53 \arrow[r] & 32 \end{tikzcd}$
	ω_2, ω_4	$\begin{tikzcd} & & & & 66 \arrow[dr] & & \\ & & 74 \arrow[r] \arrow[dr] & 73 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 65 \arrow[r] & 50 \\ & 77 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 76 \arrow[ur] \arrow[dr] & 73 \arrow[r] & 72 \arrow[ur] & & \\ 78 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 77 \arrow[ur] \arrow[dr] & 76 \arrow[ur] \arrow[r] & 75 \arrow[ur] & & & \\ & 77 \arrow[ur] \arrow[r] & 76 \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$
	ω_3	$\begin{tikzcd} & & 74 \arrow[r] \arrow[dr] & 73 \arrow[dr] & & & \\ & 77 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 76 \arrow[ur] \arrow[dr] & 73 \arrow[r] \arrow[dr] & 72 \arrow[dr] & & \\ 78 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 77 \arrow[ur] \arrow[dr] & 76 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 75 \arrow[ur] \arrow[dr] & 70 \arrow[r] & 69 \arrow[r] & 58 \\ & 77 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 76 \arrow[ur] \arrow[dr] & 73 \arrow[ur] \arrow[r] & 72 \arrow[ur] & & \\ & & 74 \arrow[ur] \arrow[r] & 73 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$
	ω_6	$\begin{tikzcd} & & 74 \arrow[dr] & & & & \\ & 77 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 73 \arrow[dr] & & & \\ 78 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 76 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 70 \arrow[r] & 61 \arrow[r] & 42 \\ & 77 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 73 \arrow[ur] & & & \\ & & 74 \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$
E_7	ω_1	$\begin{tikzcd} 133 \arrow[r] \arrow[d] & 132 \arrow[r] \arrow[d] & 129 \arrow[d] & & & & \\ 132 \arrow[r] & 131 \arrow[r] & 128 \arrow[r] & 121 \arrow[r] & 108 \arrow[r] & 87 \arrow[r] & 54 \end{tikzcd}$

Таблица 1: (продолжение)

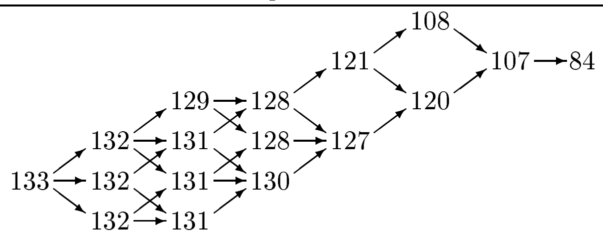
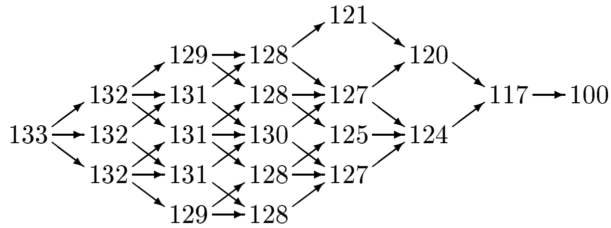
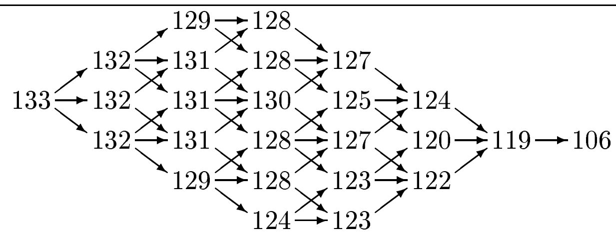
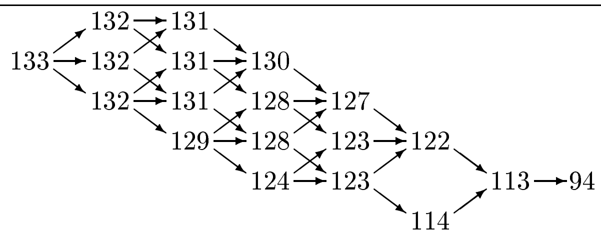
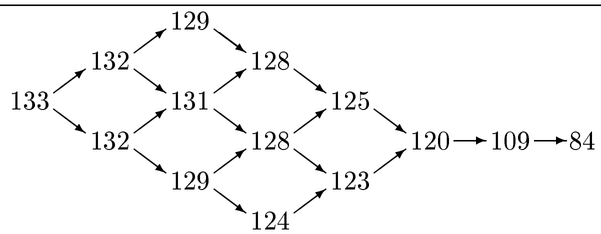
Группа	Модуль	Орбиты
	ω_2	
	ω_3	
	ω_4	
	ω_5	
	ω_6	$\begin{tikzcd} 133 \arrow[r] \arrow[d] & 132 \arrow[r] \arrow[d] & 129 \arrow[r] \arrow[d] & 124 \arrow[d] & & & \\ 132 \arrow[r] & 131 \arrow[r] & 128 \arrow[r] & 123 \arrow[r] & 114 \arrow[r] & 97 \arrow[r] & 66 \end{tikzcd}$
	ω_7	
E_8	ω_1	$\begin{tikzcd} 248 \arrow[r] \arrow[d] & 247 \arrow[r] \arrow[d] & 244 \arrow[d] & & & & & \\ 247 \arrow[r] & 246 \arrow[r] & 243 \arrow[r] & 236 \arrow[r] & 223 \arrow[r] & 202 \arrow[r] & 169 \arrow[r] & 114 \end{tikzcd}$

Таблица 1: (продолжение)

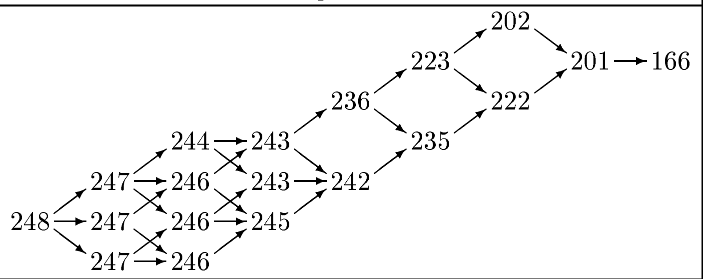
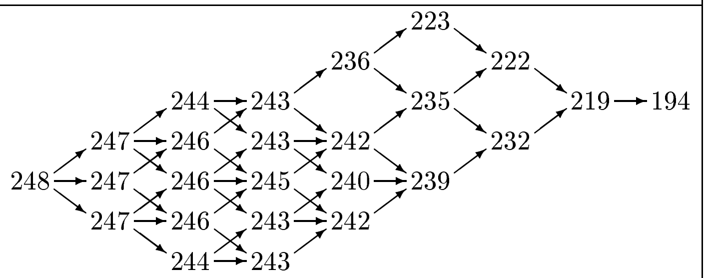
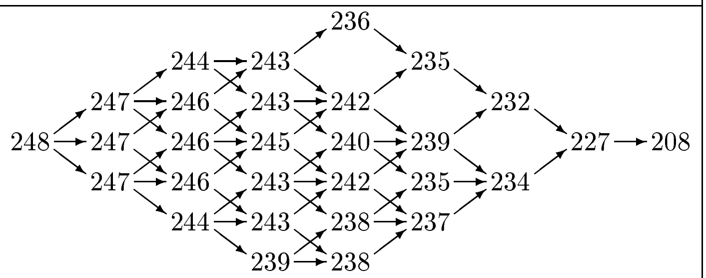
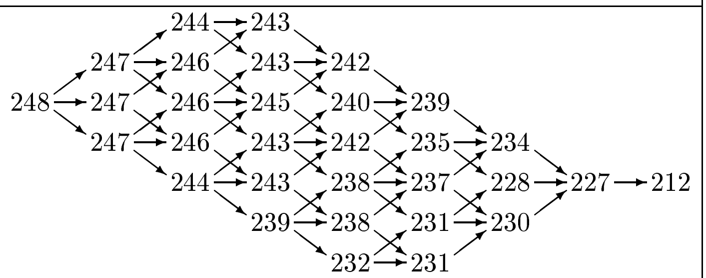
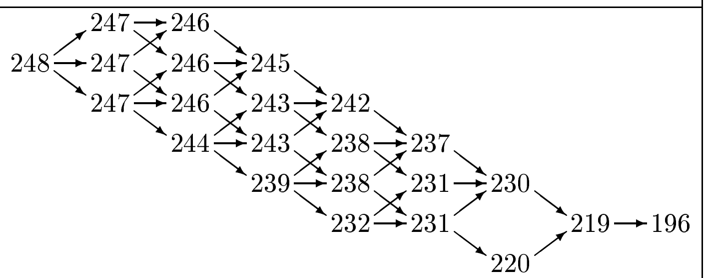
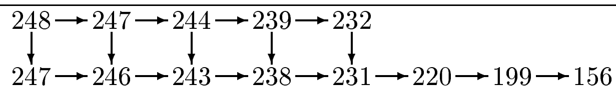
Группа	Модуль	Орбиты
	ω_2	
	ω_3	
	ω_4	
	ω_5	
	ω_6	
	ω_7	

Таблица 1: (продолжение)

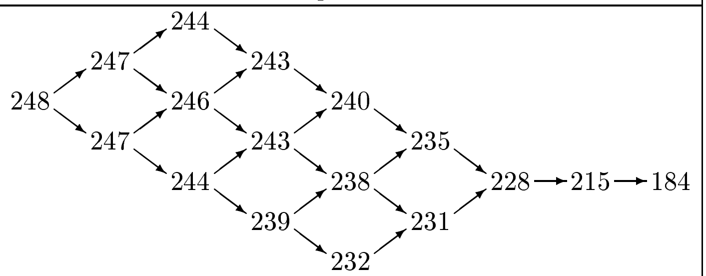
Группа	Модуль	Орбиты
	ω_8	

Таблица 2: Нормальность и гладкость

Группа	Модуль	L	L-веса	Нормальность	Гладкость
$\mathrm{A}_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l+1$	ω_1, ω_l	GL_l	π_1'	Да	Да
	ω_k $1 < k < l$	$\mathrm{PG}(\mathrm{L}_k \times \mathrm{L}_{n-k})$	$\pi_i' + \pi_i''$ $i \leq k,\ n-k$	Да	Нет
	Ad	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}_{n-2}$	$\varepsilon', 2\varepsilon', \pi_1'', \varepsilon' + \pi_1''$, $\varepsilon' + \pi_{n-3}'' - \pi_{n-2}''$, $2\varepsilon' + \pi_{n-3}'' - \pi_{n-2}''$, $\varepsilon' + \pi_1'' + \pi_{n-3}'' - \pi_{n-2}''$	Да	$n \leq 3$
$\mathrm{B}_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l+1$	ω_k $k < l$	$\mathrm{GL}_k \times \mathrm{SO}_{n-2k}$	$\pi_i' + \pi_j' + \pi_m''$ $m \leq i-j$ $m \equiv i-j \pmod 2$	Нет $\nexists \pi_1'$, $\exists 2\pi_1'$	Нет
	ω_l	GL_l	$\pi_1', \ldots, \pi_l'$	Да	Да
$\mathrm{C}_l = \mathrm{Sp}_n$ $n = 2l$	ω_k $k < l$	$\mathrm{P}(\mathrm{GL}_k \times \mathrm{Sp}_{n-2k})$	$\pi_1' + \pi_1'', \ldots$	Да	$n = 4$
	ω_l	$\mathrm{GL}_l / \mathrm{Z}_2$	$2\pi_1', \ldots, 2\pi_l'$	$n = 2$ $\nexists \pi_2'$, $\exists 2\pi_2'$	$n = 2$
	Ad	$\mathrm{P}(\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{n-2})$	$\varepsilon' + \pi_1'', 2\varepsilon', 4\varepsilon'$, $2\varepsilon' + 2\pi_1'', 3\varepsilon' + \pi_1''$	Да	$n \leq 4$
$\mathrm{D}_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l$	ω_k $k \leq l-2$	$\mathrm{P}(\mathrm{GL}_k \times \mathrm{SO}_{n-2k})$	Те же, что для B_l, и получаемые заменой $\varepsilon_l'' \leftrightarrow \varepsilon_{l+1}''$	Да	Нет
	ω_{l-1}, ω_l	$\mathrm{GL}_l / \mathrm{Z}_2$	$\pi_2', \pi_4', \ldots$	Да	$n = 6$
G_2	ω_1	GL_2	$\pi_1', \pi_2', \pi_1' + \pi_2', 2\pi_2'$	Да	Да
	ω_2	GL_2	$2\pi_1', 3\pi_1', \pi_2', 2\pi_2'$ $3\pi_1' - \pi_2'$	Нет $\nexists \pi_1'$, $\exists 2\pi_1'$	Нет
F_4	ω_1	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_7$	$\varepsilon' + \omega_3'', 2\varepsilon', 4\varepsilon'$, $2\varepsilon' + \omega_1'', 3\varepsilon' + \omega_3''$	Да	Нет
	ω_2	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3$	$\pi_1' + \pi_1'', \ldots$	Да	Нет
	ω_3	$\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{GL}_2$	$2\pi_1' + \pi_1'', \ldots$	Нет $\nexists\ \pi_2' + \pi_1''$ $\exists\ 2\pi_2' + 2\pi_1''$	Нет
	ω_4	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_6$	$\varepsilon' + \omega_3'', 2\varepsilon', 4\varepsilon'$, $2\varepsilon' + 2\omega_1'', 3\varepsilon' + \omega_3''$	Нет $\nexists\ \varepsilon' + \omega_1''$ $\exists\ 2\varepsilon' + 2\omega_1''$	Нет

Таблица 2: (продолжение)

Группа	Модуль	L	L-веса	Нормальность	Гладкость
E_6	ω_1, ω_5	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{10}$	$\varepsilon' + \omega_5'', 2\varepsilon' + \omega_1''$	Да	Нет
	ω_2, ω_4	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	Да	Нет
	ω_3	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$	$\pi_1' + \pi_1'' + \pi_1''', \dots$	Да	Нет
	ω_6	$\mathrm{GL}_6/\mathrm{Z}_3$	$\pi_3', \pi_6', 2\pi_6',$ $\pi_3' + \pi_6', \pi_1' + \pi_5'$	Да	Нет
E_7	ω_1	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{E}_6$	$\varepsilon' + \omega_1'', 2\varepsilon' + \omega_5'', 3\varepsilon'$	Да	Нет
	ω_2	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{Spin}_{10}$	$\pi_1' + \omega_5'', \dots$	Да	Нет
	ω_3	$\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	Да	Нет
	ω_4	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_4$	$\pi_1' + \pi_1'' + \pi_1''', \dots$	Да	Нет
	ω_5	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_6$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	Да	Нет
	ω_6	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{12}/\mathrm{Z}_2$	$\varepsilon' + \omega_6'', 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + \omega_2'', 3\varepsilon' + \omega_6''$	Да	Нет
	ω_7	$\mathrm{GL}_7/\mathrm{Z}_3$	$\pi_3', \dots$	Да	Нет
E_8	ω_1	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{E}_7$	$\varepsilon' + \omega_1'', 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + \omega_6'', 3\varepsilon' + \omega_1''$	Да	Нет
	ω_2	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{E}_6$	$\pi_1' + \omega_1'', \dots$	Да	Нет
	ω_3	$\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{Spin}_{10}$	$\pi_1' + \omega_5'', \dots$	Да	Нет
	ω_4	$\mathrm{GL}_4 \times \mathrm{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	Да	Нет
	ω_5	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_1'' + \pi_1''', \dots$	Да	Нет
	ω_6	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_7$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	Да	Нет
	ω_7	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{14}$	$\varepsilon' + \omega_7'', \dots$	Да	Нет
	ω_8	$\mathrm{GL}_8/\mathrm{Z}_3$	$\pi_3', \dots$	Да	Нет

Литература

[ВО] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, Москва, 1988.

[Кр] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, Москва, 1987.

[По] В. Л. Попов, *Стягивания действий редуктивных алгебраических групп*, Мат. сб. **130** (1986), №3, 310–334.

[AB1] V. Alexeev, M. Brion, *Stable reductive varieties I: Affine varieties*, preprint, 2002, `arXiv:math.AG/0207272`, `http://xxx.lanl.gov`.

[AB2] V. Alexeev, M. Brion, *Stable reductive varieties II: Projective case*, preprint, 2002, `arXiv:math.AG/0207274`, `http://xxx.lanl.gov`.

[BCP] E. Bifet, C. de Concini, C. Procesi, *Cohomology of regular embeddings*, Adv. Math. **82** (1990), no. 1, 1–34.

[Br1] M. Brion, *Groupe de Picard et nombres charactéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. **58** (1989), no. 2, 397–424.

[Br2] M. Brion, *Sur la géométrie des variétés sphériques*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 237–262.

[Br3] M. Brion, *Variétés sphériques*, Notes de la session de la S. M. F. “Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques”, Grenoble, 1997, 59 p.
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps`

[Br4] M. Brion, *The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), 137–174.

[BI] M. Brion, S. P. Inamdar, *Frobenius splitting of spherical varieties*, Algebraic groups and their generalizations: Classical methods (W. J. Haboush, B. J. Parshall, eds.), Proc. Symp. Pure Math., vol. 56, part 1, pp. 207–218, AMS, Providence, 1994.

[BLV] M. Brion, D. Luna, Th. Vust, *Espaces homogènes sphériques*, Invent. Math. **84** (1986), 617–632.

[BP] M. Brion, P. Polo, *Large Schubert varieties*, Representation Theory **4** (2000), 97–126.

[Con] C. de Concini, *Normality and non-normality of certain semigroups and orbit closures*, preprint, 2003.

[CP-I] C. de Concini, C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, Lect. Notes in Math., vol. 996, 1983, pp. 1–44.

[CP-II] C. de Concini, C. Procesi, *Complete symmetric varieties, II*, Algebraic groups and related topics (R. Hotta, ed.), Adv. Studies in Pure Math., no. 6, pp. 481–513, Kinokuniya, Tokio, 1985.

[CP] C. de Concini, C. Procesi, *Cohomology of compactifications of algebraic groups*, Duke Math. J. **53** (1986), 585–594.

[Fal] G. Faltings, *Explicit resolution of local singularities of moduli-spaces*, J. Reine Angew. Math. **483** (1997), 183–196.

[Kan] S. S. Kannan, *Projective normality of the wonderful compactification of semisimple adjoint groups*, Math. Z. **239** (2002), 673–682.

[Kap] M. M. Kapranov, *Hypergeometric functions on reductive groups*, Integrable systems and algebraic geometry (M.-H. Saito, ed.), pp. 236–281, World Scientific, Singapore, 1998.

[Kn] F. Knop, *The Luna–Vust theory of spherical embeddings*, Proc. Hyderabad Conf. on Algebraic Groups (S. Ramanan, ed.), pp. 225–249, Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[LP] P. Littelmann, C. Procesi, *Equivariant cohomology of wonderful compactifications*, Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and Invariant Theory, (Paris, 1989), Progress in Math., vol. 92, pp. 219–262, Birkhäuser, Boston, 1990.

[Lu] D. Luna, *Slices étales*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **33** (1973), 81–105.

[LV] D. Luna, Th. Vust, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186–245.

[Ner] Yu. A. Neretin, *Hinges and the Study–Semple–Satake–Furstenberg–De Concini–Procesi–Oshima boundary*, Kirillov's Seminar on Representation Theory, AMS Transl. (2) **181** (1998), 165–230.

[Pu1] M. S. Putcha, *Linear algebraic monoids*, Cambridge University Press, 1988.

[Pu2] M. S. Putcha, *Monoids on groups with BN pair*, J. Algebra **120** (1989), 139–169.

[PR] M. S. Putcha, L. E. Renner, *The system of idempotents and the lattice of $\mathcal{J}$-classes of reductive algebraic monoids*, J. Algebra **116** (1988), 385–399.

[Re1] L. E. Renner, *Classification of semisimple algebraic monoids*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 193–223.

[Re2] L. E. Renner, *Classification of semisimple varieties*, J. Algebra **122** (1989), 275–287.

[Rit] A. Rittatore, *Algebraic monoids and group embeddings*, Transformation Groups **3** (1998), 375–396.

[Sem] J. G. Semple, *The variety whose points represent complete collineations of S_r on S'_r*, Rend. Mat. Univ. Roma (5), **10** (1951), 201–208.

[St1] E. S. Strickland, *A vanishing theorem for group compactifications*, Math. Ann. **277** (1987), 165–171.

[St2] E. S. Strickland, *Computing the equivariant cohomology of group compactifications*, Math. Ann. **291** (1991), no. 2, 275–280.

[Vin] E. B. Vinberg, *On reductive algebraic semigroups*, Lie Groups and Lie Algebras: E. B. Dynkin Seminar (S. Gindikin, E. Vinberg, eds.), AMS Transl. (2) **169** (1995), 145–182.

[Vu] T. Vust, *Plongements d'espaces symétriques algébriques: une classification*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **XVII** (1990), no. 2, 165–194.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры
ГЗ МГУ, Ленинские горы, ГСП-2, 119992 Москва, Россия

E-mail: `timashev@mech.math.msu.su`