14-я проблема Гильберта и рациональные поверхности

1. 14-я проблема Гильберта

Пусть $\Bbbk$ — основное поле (алгебраически замкнуто, несчетно), и $G \subseteq GL_n(\Bbbk)$ — линейная группа. Она естественным образом действует на алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ линейными заменами координат.

14-я проблема Гильберта (1900). *Будет ли алгебра $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]^G$ конечно порождена?*

Сам Гильберт считал, что в этой формулировке проблема была положительно решена Маурером (1899), и ставил вопрос иначе:

Расширенная 14-я проблема Гильберта. *Пусть $\Bbbk \subseteq L \subseteq \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ — промежуточное функциональное поле. Будет ли алгебра $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \cap L$ конечно порождена?*

(В исходной постановке $L = \Bbbk(x_1, \ldots, x_n)^G$.)

Зарисский (1954) обобщил проблему следующим образом:

Обобщенная 14-я проблема Гильберта. *Пусть R — конечнопорожденная алгебра, целозамкнутая в своем поле частных K, и $\Bbbk \subseteq L \subseteq K$ — промежуточное функциональное поле. Будет ли алгебра $R \cap L$ конечно порождена?*

Зарисский [Z1] решил обобщенную проблему положительно в случае $\operatorname{tr.deg} L \leq 2$. Рис [R] построил контрпример с $\operatorname{tr.deg} L = 3$ (в котором, однако, L не унирационально, так как содержит поле функций на эллиптической кривой).

Вместе с тем в работе Маурера были обнаружены ошибки, и исходная 14-я проблема Гильберта осталась открытой. Как известно, она решается положительно для редуктивных G. Но в 1958 Нагата построил контрпример к расширенной 14-й проблеме, а в 1959 обнаружил, что он является контрпримером и к исходной проблеме [N1].

Пример Нагаты опирается на некоторую общую конструкцию, которая интересна сама по себе, так как она связана с классическими вопросами проективной геометрии.

2. Конструкция Нагаты

Пусть $V = \Bbbk^2 \oplus \cdots \oplus \Bbbk^2$ — $2l$-мерное векторное пространство с координатами $x_1, y_1, \ldots, x_l, y_l$. Рассмотрим линейные группы

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{matrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} t_l & 0 \\ 0 & t_l \end{matrix} \end{pmatrix}, \qquad t_1 \ldots t_l = 1 \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 1 & u_l \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}, \qquad \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u_j = 0, \quad i = 1, 2, 3 \right\}$$

$$G = T \times H \subset SL(V)$$

(считаем, что ранг системы уравнений на координаты в векторной группе H равен 3). Заметим, что $\dim G = 2l - 4$, стабилизатор общего положения $G : V$ тривиален, и орбиты общего положения образуют 4-параметрическое семейство.

Выясним устройство алгебр $A = \Bbbk[V]^H$, $S = \Bbbk[V]^G$.

Рассмотрим главное открытое подмножество $\mathring{V} = \{y_1 \dots y_l \neq 0\}$ с новыми координатами y_j, $z_j = x_j/y_j$. Действие $g = tu \in G$ в новых координатах задается формулами: $y_j \mapsto t_j y_j$, $z_j \mapsto z_j + u_j$.

Лемма 1. *Пусть* $w_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} y_1 \dots x_j \dots y_l$, $s = y_1 \dots y_l$. *Тогда* $w_1, w_2, w_3, y_1, \dots, y_l$ *алгебраически независимы и разделяют* H*-орбиты на* $\mathring{V}$, *а* w_1, w_2, w_3, s *разделяют* G*-орбиты, причем* $\Bbbk[\mathring{V}]^H = \Bbbk[w_1, w_2, w_3, y_1^{\pm 1}, \dots, y_l^{\pm 1}]$, $\Bbbk[\mathring{V}]^G = \Bbbk[w_1, w_2, w_3, s^{\pm 1}]$.

Доказательство. Ясно, что базисными инвариантами $H : \mathring{V}$ являются $y_j^{\pm 1}$ и $r_i = \sum a_{ij} z_j$. Остается заменить r_i на $w_i = r_i s$. $\square$

Таким образом,

$$A = \Bbbk[V] \cap \Bbbk[w_1, w_2, w_3, y_1^{\pm 1}, \dots, y_l^{\pm 1}] = \bigoplus_{\substack{m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z} \\ d \in \mathbb{Z}_+}} A_{d; m_1, \dots, m_l}$$

где $A_{d; m_1, \dots, m_l}$ состоит из функций $F(w_1, w_2, w_3) y_1^{-m_1} \dots y_l^{-m_l}$, таких что F — однородный многочлен степени d от w_1, w_2, w_3, делящийся на $y_1^{m_1} \dots y_l^{m_l}$ в $\Bbbk[x_1, y_1, \dots, x_l, y_l]$. При этом

$$S = \Bbbk[V] \cap \Bbbk[w_1, w_2, w_3, s^{\pm 1}] = \bigoplus_{d,m} S_{d,m}$$

где $S_{d,m} = A_{d; m, \dots, m}$ состоит из функций $F(w_1, w_2, w_3) s^{-m} \in \Bbbk[x_1, y_1, \dots, x_l, y_l]$.

Алгебра A и ее полиоднородные компоненты $A_{d; m_1, \dots, m_l}$ допускают следующую алгебро-геометрическую интерпретацию. Рассмотрим набор точек $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{P}^2$, $p_j = (a_{1j} : a_{2j} : a_{3j})$ (в предположении, что ни один столбец матрицы (a_{ij}) не равен 0). Будем интерпретировать w_1, w_2, w_3 как однородные координаты на $\mathbb{P}^2$.

Лемма 2. $F(w_1, w_2, w_3) y_1^{-m_1} \dots y_l^{-m_l} \in A_{d; m_1, \dots, m_l} \iff F \in \Bbbk[w_1, w_2, w_3]_d$ *имеет нули порядка* $\geq m_j$ *в* p_j, $j = 1, \dots, l$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть одну точку, скажем p_1. Линейной заменой однородных координат можно считать $p_1 = (0 : 0 : 1) \implies w_1, w_2 = y_1 \cdot (\dots)$, $w_3 = x_1 y_2 \dots y_l + y_1 \cdot (\dots)$. Рассматривая коэффициент при максимальной степени x_1, легко видеть, что $F \in \Bbbk[w_1, w_2, w_3]_d$ делится на y_1^m в $\Bbbk[x_1, y_1, \dots, x_l, y_l]$ тогда и только тогда, когда $F = \sum_k w_1^k w_2^{m-k} P_k$, т.е. $\operatorname{ord}_{p_1} F \geq m$. $\square$

Замечание 1. Условие $\operatorname{ord}_{p_j} \geq m_j$ тривиально в случае $m_j \leq 0$; при этом никаких ограничений на поведение формы F в точке p_j не накладывается. В частности, $S_{d,m} = \Bbbk[w_1, w_2, w_3]_d s^{-m}$ при $m \leq 0$.

Замечание 2. Если какой-либо из столбцов (a_{ij}) — нулевой, то соответствующая координата z_j может меняться под действием H произвольно и независимо от остальных координат, и вычисление A, S сводится к $l - 1$ столбцу и добавлению функции y_j.

Если $p_j = p_k = \dots = p$, то условие $\operatorname{ord}_p \geq m_j, m_k, \dots$ нужно проверить для $\max\{m_j, m_k, \dots\}$, и вычисление опять сводится к меньшему числу точек добавлением нескольких координат $y_j, y_k, \dots$ для кратной точки p и заменой соответствующей y-координаты на $(y_j y_k \dots)$.

Поэтому без ограничения общности можно считать, что столбцы (a_{ij}) задают различные точки $\mathbb{P}^2$.

Таким образом, изучение алгебр A, S связано с классической задачей проективной геометрии — изучением пространств плоских кривых, проходящих через данные точки с заданными кратностями. В частности, имеется очевидная нижняя оценка для размерностей

$$\dim A_{d;m_1,\ldots,m_l} \geq \binom{d+2}{2} - \sum_{j=1}^{l} \binom{m_j+1}{2} \tag{1}$$

(каждое условие на кратность в точке p_j накладывает $\binom{m_j+1}{2}$ уравнений на пространство форм степени d).

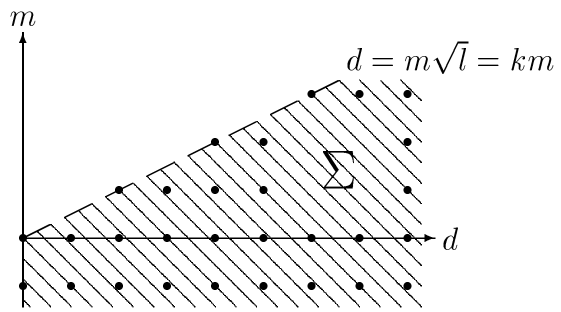
Проблема. *Будут ли алгебры A, S конечнопорожденными?*

Цель Нагаты состояла в построении контрпримера к 14-й проблеме Гильберта. При этом, отталкиваясь от обобщенной проблемы Гильберта–Зарисского, Нагата старался построить контрпример возможно меньшей степени трансцендентности, и в частности поэтому работал с S ($\operatorname{tr.deg} S = 4$, $\operatorname{tr.deg} A = l + 3$). Однако если S бесконечно порождена, то A тем более бесконечно порождена (т.к. $S = A^T$, а T — тор).

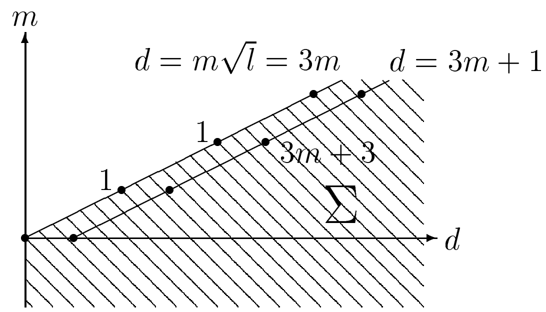
Подход к изучению конечной порожденности состоит в рассмотрении полугруппы $\Sigma = \{(d,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid S_{d,m} \neq 0\}$. Конус $\mathbb{Q}_+\Sigma$ — угол на плоскости $\mathbb{Q}^2$, содержащий 4-й квадрант $\{d \geq 0 \geq m\}$ и ограниченный сверху (в 1-м квадранте $\{d, m \geq 0\}$) неким предельным лучом.

Теорема 1 ([N1], [St]). *Пусть $l = k^2$, $k \geq 3$, и $p_1, \ldots, p_l$ — точки общего положения. Тогда S бесконечно порождена.*

Доказательство. Конечной порожденности препятствует устройство полугруппы Σ:



$l \geq 16$ [N1]



$l = 9$ [St]

При $l \geq 16$ конус не содержит предельный луч, а при $l = 9$ у точек (d,m) указаны $\dim S_{d,m}$. При $l \geq 16$ полугруппа Σ, а значит и S, бесконечно порождена. При $l = 9$ полугруппа Σ конечно порождена, $\dim S_{d,m}$ всегда достигают нижней оценки (1), однако на луче, соседнем с предельным лучом, растут слишком быстро, чтобы S могла быть конечнопорожденной. $\square$

Замечание 3. Почему в конструкции Нагаты естественно накладывать 3 уравнения на координаты в унипотентной группе H? Рассмотрим меньшее число уравнений. При этом лемма 1 сохраняет силу.

Если уравнений нет вообще, то $A = \Bbbk[y_1, \ldots, y_l]$.

Если уравнение одно, то $A = \Bbbk[w_1, y_1, \ldots, y_l]$, т.к. никакая степень w_1^d не делится на y_j.

Если уравнений два, то лемма 2 сохраняет силу с заменой $\mathbb{P}^2$ на $\mathbb{P}^1$. Тогда $\operatorname{ord}_{p_j} F \geq m \iff F$ делится на H_j^m, где линейная форма H_j — уравнение p_j на $\mathbb{P}^1$. Отсюда $A = \Bbbk[w_1, w_2, y_1, \ldots, y_l, H_1/y_1, \ldots, H_l/y_l]$.

Поэтому 3 уравнения — первый нетривиальный случай.

3. Когда полиградуированная алгебра конечно порождена?

Возникающие в конструкции Нагаты алгебры полиградуированы. Рассмотрим произвольную алгебру A, градуированную решеткой $\mathbb{Z}^r$. Для любого выпуклого конуса $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Q}^r$ можно рассмотреть подалгебру $A(\mathcal{C}) = \bigoplus_{\bar{n} \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^r} A_{\bar{n}}$. Положим $\mathcal{C} = \mathbb{Q}_+\{\bar{n} \in \mathbb{Z}^r \mid A_{\bar{n}} \neq 0\}$, тогда $A = A(\mathcal{C})$.

Теорема 2. *1) Алгебра A конечно порождена $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ конечно порожден.*

2) Рассмотрим разбиение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$ на несколько конечнопорожденных конусов, примыкающих друг к другу по граням. Тогда A конечно порождена $\Longleftrightarrow$ $\forall i = 1, \dots, k$: $A(\mathcal{C}_i)$ конечно порождены.

Доказательство. 1) Веса однородных образующих A порождают $\mathcal{C}$.

2) “ $\Longleftarrow$ ” очевидно: $A = \sum A(\mathcal{C}_i)$.

“ $\Longrightarrow$ ” Измельчив разбиение, мы можем считать, что $\forall \mathcal{C}_i$ *строго симплициален* (т.е. порожден базисом $\mathbb{Z}^r$). Пусть $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ — координатное представление вектора в этом базисе. Тор $T = (\Bbbk^\times)^r$ действует на A так, что $t = (t_1, \dots, t_r) \in T$ умножает $A_{\bar{n}}$ на скаляр $t^{\bar{n}} = t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}$. Продолжим это действие на алгебру многочленов $A[x_1, \dots, x_r]$, полагая $t(x_j) = t_j^{-1} x_j$. Тогда $A(C) \simeq A[x_1, \dots, x_r]^T$ — конечно порождена. □

4. Алгебры глобальных сечений

В алгебраической геометрии (поли)градуированные алгебры естественно возникают как алгебры глобальных сечений линейных расслоений на многообразиях. Напомним терминологию [Да].

Пусть X — произвольное полное многообразие, а D — дивизор Картье на X.

Обозначим $\mathcal{O}(D)$ линейное расслоение на X, отвечающее дивизору D. Его пучок локальных сечений — локально свободный подпучок постоянного пучка $\Bbbk(X)$, состоящий из рациональных функций f, таких что $\operatorname{div} f + D \geq 0$. В частности, $\mathcal{O}(D)$ имеет каноническое рациональное сечение s (отвечающее $f = 1$) с $\operatorname{div} s = D$. Допуская вольность обозначений, будем писать $H^i(D) = H^i(X, \mathcal{O}(D))$, $h^i(D) = \dim H^i(D)$.

Эффективные дивизоры $D \geq 0$ (т.е. $D = \sum m_i D_i$, D_i — неприводимые подмногообразия коразмерности 1, $m_i \geq 0$) индуцируют рациональные отображения $\phi_D : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(D)^*)$, регулярные вне базисного множества.

Свободные дивизоры (для которых базисное множество полной линейной системы пусто, т.е. D можно сдвинуть с любой точки, сохраняя эффективность) характеризуются тем, что $\mathcal{O}(D)$ порождено глобальными сечениями, или ϕ_D — морфизм.

Обильные дивизоры характеризуются тем, что ϕ_{mD} — замкнутое вложение при некотором m.

Будем говорить, что дивизор обладает $\mathbb{Q}$-свойством ($\mathbb{Q}$-эффективен, $\mathbb{Q}$-свободен, и т.д.), если некоторая его кратность обладает данным свойством.

Рассмотрим алгебру $A = A(D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nD)$. При каких условиях A конечно порождена? Как известно, это верно, если D обилен. Покажем, что это верно, если D $\mathbb{Q}$-свободен.

Назовем градуированную подалгебру $B \subseteq A$ *большой*, если $\forall x \in X\ \exists n > 0\ \exists s \in B_n$: $s(x) \neq 0$. Если большая подалгебра B конечно порождена, то имеется естественный сюръективный морфизм $\phi_B : X \to Z = \operatorname{Proj} B$. Положим $B^{(m)} = \bigoplus_{n \geq 0} B_{mn}$. Если B конечно порождена, то $\operatorname{Proj} B^{(m)} \simeq \operatorname{Proj} B$.

Пусть mD свободен $\Longrightarrow$ $R^{(m)} = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(mD)^n$ — конечнопорожденная большая подалгебра $\Longrightarrow$ $\phi = \phi_{mD} : X \to Y = \operatorname{Proj} R^{(m)}$ — сюръективный морфизм. Заменяя m на $m' = km$, получаем коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & Y \\ & Y' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

где $Y' \to Y$ — линейное проектирование на k-кратное вложение Y. При таких заменах $X_{\geq d} = \{x \mid \dim_x \phi^{-1}\phi(x) \geq d\}$ могут лишь уменьшиться, а значит стабилизируются при $\forall d \implies X_d = \{x \mid \dim_x \phi^{-1}\phi(x) = d\}$ стабилизируются при $\forall d \implies$ начиная с некоторого момента $Y' \to Y$ имеют конечные слои, т.е. конечны $\implies$ в конце концов всегда $Y' \tilde{\to} Y$. Таким образом, для некоторой $R = R^{(m)}$ многообразие Y *максимально*, т.е. для любой конечнопорожденной большой подалгебры B имеется коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi_B"] \arrow[dr, "\phi_R"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Действительно, $\exists n: \; B^{(n)} \subseteq R^{(n)} \implies Z \simeq \operatorname{Proj} B^{(n)} \leftarrow \operatorname{Proj} R^{(n)} \leftarrow Y$.

Лемма 3. *A цела над R.*

Доказательство. A цела над $A^{(m)} \implies$ можно считать $m = 1$, $R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(D)^n$. Тогда $s \in H^0(nD) \implies \forall q \in H^0(D)\; \exists p \in H^0(D)^k: \; s/q^n = p/q^k$ (действительно, $B = R[s] \implies Z \simeq Y \implies Z_q \simeq Y_q$). Следовательно, $\exists d: \; q^d s \in R \implies$ при достаточно большом d можно считать $R_d s \subseteq R_{d+n} \implies \forall i: \; R_d s^i \subseteq R \implies \forall s^i \in \frac{1}{q^d} R \implies s$ цел над R. $\square$

Следствие 1. *Если D $\mathbb{Q}$-свободен, то алгебра $A = A(D)$ конечно порождена, $A^{(n)} = R^{(n)}$ при достаточно большом n, а $Y = \operatorname{Proj} A$ — максимальный образ X при ϕ_{mD}, т.е.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & \phi_{mD}(X) \\ & Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

и $\exists m: \; Y \simeq \phi_{mD}(X)$.

Более общим образом, пусть $\Sigma \subseteq \operatorname{CaDiv} X$ — полугруппа дивизоров Картье. Рассмотрим пучок алгебр $\mathcal{A}(\Sigma) = \bigoplus_{D \in \Sigma} \mathcal{O}(D)$ и положим $A(\Sigma) = H^0(X, \mathcal{A}(\Sigma))$. Следующий результат о конечной порожденности $A(\Sigma)$ принадлежит, по существу, Зарисскому [Z2, §4].

Теорема 3. *Пусть Σ порождается конечным числом $\mathbb{Q}$-свободных дивизоров. Тогда $A(\Sigma)$ конечно порождена.*

Замечание 4. Теорема применима в ситуации $\Sigma = \mathcal{C} \cap N$, где $N \subset \operatorname{CaDiv} X$ — решетка конечного ранга, а $\mathcal{C} \subseteq N \otimes \mathbb{Q}$ — конечнопорожденный многогранный конус, ребра которого $\mathbb{Q}$-свободны.

Доказательство. Положим $N = \mathbb{Z}\Sigma$, $\mathcal{C} = \mathbb{Q}_+\Sigma \subseteq N \otimes \mathbb{Q}$, $\widetilde{\Sigma} = \mathcal{C} \cap N$ — насыщение Σ (ср. замечание 4). По лемме Гордана $\widetilde{\Sigma}$ конечно порождена и $\exists m \in \mathbb{N}: \; m\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma \implies A(\widetilde{\Sigma})$ цела над $A(\Sigma)$, поэтому достаточно доказать теорему для насыщенной полугруппы $\Sigma = \widetilde{\Sigma}$.

Рассмотрим симплициальное разбиение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$, $\Sigma_i = \mathcal{C}_i \cap N$. Достаточно доказать конечную порожденность $\forall A(\Sigma_i)$, т.е. можно считать $\mathcal{C}$ симплициальным.

Пусть $D_1, \dots, D_r \in N$ свободны и порождают ребра $\mathcal{C}$. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}: \; m\Sigma \subseteq \Sigma_0 = \sum \mathbb{Z}_+ D_j \implies A(\Sigma)$ цела над $A(\Sigma_0) \implies$ можно считать $\Sigma = \sum \mathbb{Z}_+ D_j$.

Рассмотрим линейные расслоения $\mathcal{L}_j = \mathcal{O}(D_j) \to X$, векторное расслоение $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_r \to X$ и проективное расслоение $\pi: \mathbb{P}_X(\mathcal{E}^*) \to X$. Положим $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(1)$. Тогда $\pi_* \mathcal{L}^n = S^n \mathcal{E} = \bigoplus_{n_1 + \dots + n_r = n} \mathcal{L}_1^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_r^{n_r}$ и $A = \bigoplus_{n_1, \dots, n_r \geq 0} H^0(\mathcal{L}_1^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_r^{n_r}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{L}^n)$.

Лемма 4. *$\mathcal{L}$ свободно (обильно) $\iff$ $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$ свободны (обильны).*

Доказательство леммы. Рассмотрим $\lambda = (\lambda_1 : \cdots : \lambda_r) \in \pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(\mathcal{E}^*(x)) = \mathbb{P}(\mathcal{L}_1^*(x) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r^*(x))$, $x \in X$, $\lambda_j \in \mathcal{L}_j^*(x)$. Для $\forall s = (s_1, \dots, s_r) \in H^0(\mathcal{L})$, $s_j \in H^0(\mathcal{L}_j)$, имеем $s(\lambda) = \sum \langle s_j(x), \lambda_j \rangle$. Расслоение $\mathcal{L}$ порождено глобальными сечениями $\iff$ $\forall \lambda \; \exists s : \; s(\lambda) \neq 0$ $\iff$ $\forall j = 1, \dots, r \; \exists s_j \in H^0(\mathcal{L}_j) : \; s_j(x) \neq 0$ $\iff$ $\forall \mathcal{L}_j$ порождены глобальными сечениями. Об обильности см. [Ha]. $\square$

По лемме 4 можно считать $r = 1$, $A(\Sigma) = A(D)$ для некоторого $\mathbb{Q}$-свободного дивизора D. Следствие 1 завершает доказательство. $\square$

Замечание 5. В условиях теоремы, если Σ содержит обильные дивизоры, то $\operatorname{tr.deg} A(\Sigma) = \dim X + r$, $r = \operatorname{rk} N$.

Замечание 6. Если X нормально и Σ насыщена, то $A(\Sigma)$ целозамкнута, т.к. пучок $\mathcal{A}(\Sigma)$ локально изоморфен $\mathcal{O}_X \otimes \Bbbk[\Sigma]$, и полугрупповая алгебра $\Bbbk[\Sigma]$ — координатная алгебра нормального аффинного торического многообразия.

5. Алгебраические поверхности

Для алгебро-геометрической интерпретации конструкции Нагаты потребуются сведения из теории алгебраических поверхностей [ИШ].

Пусть X — гладкая проективная алгебраическая поверхность. Под *кривыми* на X будем понимать неприводимые подмногообразия коразмерности 1. Наряду с обычными дивизорами будем рассматривать $\mathbb{Q}$-дивизоры на X, т.е. формальные линейные комбинации кривых с рациональными коэффициентами. Целую часть $\mathbb{Q}$-дивизора D обозначим $[D]$.

Линейную эквивалентность дивизоров обозначим символом "$\sim$", а численную эквивалентность символом "$\approx$". Пусть $\operatorname{Pic} X = \operatorname{Div} X / \sim$ — группа Пикара, а $N_X = \operatorname{Div} X / \approx$ — решетка Нерона–Севери.

Теорема Ходжа. *Форма пересечения $(\cdot, \cdot)$ на $\operatorname{Div} X$ индуцирует псевдоскалярное умножение на $N_X \otimes \mathbb{Q}$ сигнатуры $(+ - \cdots -)$.*

Обозначим через $K = K_X$ канонический класс поверхности.

Теорема Римана–Роха. $\chi(\mathcal{O}(D)) = h^0(D) - h^1(D) + h^2(D) = \dfrac{(D,D) - (D,K)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X)$

Двойственность Серра. $h^i(D) = h^{2-i}(K - D)$

Конус Мори E_X — замкнутый выпуклый конус в $N_X \otimes \mathbb{Q}$, порожденный эффективными дивизорами.

Из теоремы Римана–Роха следует, что одна из пол конуса $\{\delta \in N_X \otimes \mathbb{Q} \mid (\delta, \delta) \geq 0\}$ содержится в E_X и содержит обильные дивизоры. Назовем эту полу *конусом будущего* Ω_+.

Известно, что E_X порождается (как выпуклый конус) Ω_+ и *исключительными кривыми* $C \subset X$, $(C, C) < 0$, причем исключительные кривые образуют дискретное множество ребер E_X.

Nef-конус $E_X^\vee$ двойственен конусу Мори относительно формы пересечения. Поскольку $\Omega_+^\vee = \Omega_+$, то $E_X \supseteq \Omega_+ \supseteq E_X^\vee$. Обильные $\mathbb{Q}$-дивизоры заполняют внутренность $E_X^\vee$, а свободные (но не обильные) лежат на границе $\partial E_X^\vee$.

Лемма 5. *$E_X^\vee \cap \partial\Omega_+ = E_X^\vee \cap \partial E_X = \Omega_+ \cap \partial E_X$, причем любой вектор δ из пересечения порождает экстремальный луч $E_X^\vee$, а $\delta^\perp$ — единственная опорная гиперплоскость к E_X в δ.*

Доказательство. $\delta \in E_X^\vee \cap \partial\Omega_+ \implies (\delta, E_X) \geq 0 \implies \delta \in \Omega_+ \cap \partial E_X \implies (\delta, E_X^\vee) \geq 0$, и равенство достигается (что возможно только в δ) $\implies \delta \in E_X^\vee \cap \partial\Omega_+$. Наконец, $\delta^\perp$ — опорная гиперплоскость к E_X, а значит и к Ω_+, в $\delta \in \implies$ единственность $\implies \mathbb{R}_+\delta \subset E_X^\vee$ — экстремальный луч. ☐

Теорема об обращении в 0 (Кодаира–Рамануджам). $D \in E_X^\vee \backslash \partial\Omega_+$ *(например, D обилен)* $\implies h^1(-D) = h^1(K+D) = 0$.

Следствие 2. $D \in K + (E_X^\vee \setminus \partial\Omega_+) \implies h^1(D) = h^2(D) = 0$

Доказательство. $D \in K + (E_X^\vee \backslash \partial\Omega_+) \implies h^1(D) = 0$ (теорема об обращении в 0), $D \notin K - E_X$ (т.к. $E_X^\vee \cap (-E_X) = 0$) $\iff K - D \notin E_X \iff h^2(D) = h^0(K-D) = 0$. ☐

Разложение Зарисского ([Z2, §7]). *Для любого $\mathbb{Q}$-эффективного дивизора имеется единственное разложение $D = D_+ + D_-$, где D_+ — nef $\mathbb{Q}$-дивизор, $D_- = \sum m_j C_j$, $m_j \geq 0$, C_j — исключительные кривые, и матрица пересечений (C_i, C_j) отрицательно определена, причем $\forall j : (D_+, C_j) = 0$. Если D — целый дивизор, то его неподвижная часть содержит D_-, и $H^0(D) \simeq H^0([D_+])$.*

Пусть $\sigma : X \to Y$ — раздутие поверхности Y в точке p, $E = \sigma^{-1}(p)$ — исключительная кривая. Кривые $E \subset X$, стягиваемые σ-процессами, называются (-1)-*кривыми* и характеризуются эквивалентными условиями:

1) $(E,E), (E,K) < 0$
2) $(E,E) = (E,K) = -1$
3) $(E,E) = -1$, $E \simeq \mathbb{P}^1$

Обозначим $\sigma^* D \in \operatorname{Div} X$ полный прообраз $D \in \operatorname{Div} Y$, а $\sigma^+ C$ — собственный прообраз кривой $C \subset Y$. Тогда σ^* индуцирует вложения $\operatorname{Pic} Y \hookrightarrow \operatorname{Pic} X = \operatorname{Pic} Y \oplus \mathbb{Z}E$, $N_Y \hookrightarrow N_X = N_Y \oplus \mathbb{Z}E$, причем $E \perp N_Y$, $K_X = K_Y + E$, и $\sigma^* C = \sigma^+ C + mE$, где $m = \operatorname{ord}_p C$.

Лемма 6. *Пусть $D \in \operatorname{Div} Y$. Тогда $H^0(X, D - mE) \simeq H^0(Y, D)_m$ — пространство сечений D на Y, имеющих $\operatorname{ord}_p \geq m$.*

Доказательство. Пусть $s_E \in H^0(E)$, $\operatorname{div} s_E = E$. Тогда $s \in H^0(X, D - mE) \implies q = s \otimes s_E^m \in H^0(X \setminus E, D) \simeq H^0(Y \setminus \{p\}, D) = H^0(Y, D)$, причем $\operatorname{ord}_E q \geq m$. Обратно, $q \in H^0(Y, D)$, $\operatorname{ord}_E \sigma^* q \geq m \implies \sigma^* q / s_E^m \in H^0(X \setminus E, D - mE)$, $\operatorname{ord}_E(\sigma^* q / s_E^m) \geq 0 \implies \sigma^* q / s_E^m \in H^0(X, D - mE)$. Наконец, легко видеть в локальных координатах, что $\operatorname{ord}_E \sigma^* q = \operatorname{ord}_p q$. ☐

Лемма 7. $\forall D \in \operatorname{Div} Y \; \forall n : \; H^n(X, \sigma^* D) = H^n(Y, D)$

Доказательство. Спектральная последовательность $H^n(X, \mathcal{O}(\sigma^* D)) \Longleftarrow H^i(Y, R^j \sigma_* \mathcal{O}(\sigma^* D))$ вырождается, т.к. $R^j \sigma_* \mathcal{O}(\sigma^* D) = R^j \sigma_* \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}(D) = \mathcal{O}(D)$ при $j = 0$ и 0 при $j > 0$. ☐

6. Рациональные поверхности

В дальнейшем X — рациональная поверхность, получаемая раздутием $\mathbb{P}^2$ в точках $p_1, \ldots, p_l$. Пусть $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ — отображение стягивания, $E_j = \sigma^{-1}(p_j)$ — исключительные (-1)-кривые, $H \in \operatorname{Pic} X$ — класс прямой на $\mathbb{P}^2$, не проходящей через $p_1, \ldots, p_l$. Результаты §5 приобретают следующий вид.

$\operatorname{Pic} X = N_X = \langle H, E_1, \dots, E_l \rangle_{\mathbb{Z}}$, ненулевые скалярные произведения базисных векторов $(H,H) = 1$, $(E_j, E_j) = -1$, $K_X = -3H + \sum E_j$. Удобно ввести на N_X координаты $d, m_1, \dots, m_l$, полагая $D = dH - \sum m_j E_j$ для $\forall D \in N_X$.

Дивизор H свободен, но не обилен $\implies H \in \partial E_X^\vee \implies \sum \mathbb{Q}_+ E_j \subset E_X$ — *стенка* (т.е. грань коразмерности 1).

Из леммы 6 вытекает

Следствие 3. *$A_{d;m_1,\dots,m_l} \simeq H^0(X, dH - m_1E_1 - \dots - m_lE_l)$.*

При этом форме $F \in \Bbbk[w_1, w_2, w_3]_d$ с $\operatorname{ord}_{p_j} F \geq m_j$ соответствует, в силу лемм 2,6, сечение $s = F/s_1^{m_1} \dots s_l^{m_l} \in H^0(X, dH - \sum m_j E_j)$, где $s_j \in H^0(E_j)$, $\operatorname{div} s_j = E_j$, так что $y_j \in A$ отождествляются с s_j.

Тем самым конструкция Нагаты переносится в контекст теории рациональных поверхностей: мы можем рассмотреть пучок алгебр $\mathcal{A}_X = \bigoplus_{d,m_1,\dots,m_l \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(dH - \sum m_j E_j)$, и тогда $A = H^0(X, \mathcal{A}_X)$.

Теорема Римана–Роха приобретает вид:

Следствие 4. $D = dH - \sum m_j E_j \in E_X \implies h^0(D) = \binom{d+2}{2} - \sum \binom{m_j+1}{2} + h^1(D)$

Доказательство. Из леммы 7 следует $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 1 \implies$ правая часть без $h^1(D)$ есть правая часть формулы Римана–Роха. Кроме того, $D \in E_X \implies K - D \notin E_X$ (иначе $K \in E_X$, что неверно) $\implies h^2(D) = h^0(K - D) = 0$. ☐

Тем самым степень неточности нижней оценки (1) интерпретируется как $h^1(D)$.

7. Поверхности дель-Пеццо

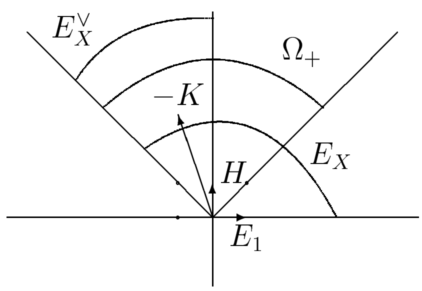
В обозначениях §6, пусть $l \leq 8$ и $p_1, \dots, p_l$ — точки общего положения (степень общности положения уточняется в замечании 7). Тогда антиканонический дивизор $-K = 3H - \sum E_j$ обилен, т.е. $X = X_l$ — *поверхность дель-Пеццо*. О поверхностях дель-Пеццо см. [ИШ, 13.3], [Ma], [De].

При вычислении $h^0(D)$ полезно вытекающее из следствия 2 и антиобильности K

Следствие 5. $D \in E_X^\vee \implies h^1(D) = h^2(D) = 0$

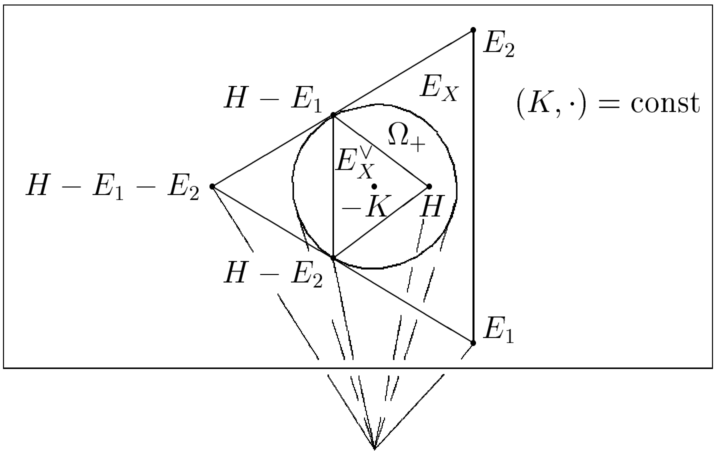
Доказательство. $-K \in \operatorname{int} E_X^\vee \implies E_X^\vee \subset \operatorname{int}(K + E_X^\vee)$ ☐

Пример 1. При $l = 1$ решетка Нерона–Севери, конусы Мори, будущего, и nef-конус имеют следующий вид:



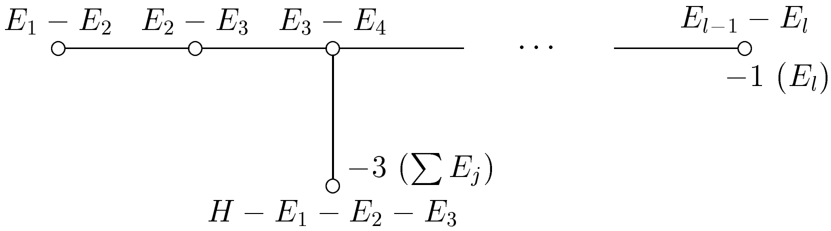
При $l \geq 2$ конус Мори E_X порождается множеством $I_X = \{C \in N_X \mid (C,C) = (C,K) = -1\}$ (-1)-кривых. Известно, что I_X состоит из элементов вида E_i, $H - E_i - E_j$, $2H - E_{i_1} - \dots - E_{i_5}$, $3H - 2E_i - E_{j_1} - \dots - E_{j_6}$, $4H - 2E_{i_1} - 2E_{i_2} - 2E_{i_3} - E_{j_1} - \dots - E_{j_5}$, $5H - 2E_{i_1} - \dots - 2E_{i_6} - E_j - E_k$, $6H - 3E_i - 2E_{j_1} - \dots - 2E_{j_7}$ (серия отсутствует в списке для данного l, если для нее не хватает индексов).

Пример 2. При $l = 2$ решетка Нерона–Севери, конусы Мори, будущего, и nef-конус имеют вид:



Здесь $I_X = \{E_1, E_2, H - E_1 - E_2\}$.

При $l \geq 3$ множество $\Delta_X = \{\alpha \in N_X \mid (\alpha, \alpha) = -2,\ (\alpha, K) = 0\}$ образует в $K_X^\perp$ систему корней ранга l относительно скалярного умножения $-(\cdot, \cdot)$. Ее диаграмма Дынкина и простые корни имеют вид:



Отрицательная камера Вейля C_- задается уравнениями

$$d \geq m_1 + m_2 + m_3, \qquad m_1 \geq \cdots \geq m_l. \tag{2}$$

Множество исключительных векторов I_X (а точнее, его проекция на $K_X^\perp$) является системой ненулевых весов представления с младшим весом E_l (его ненулевая числовая отметка указана на диаграмме Дынкина).

Группа Вейля $W = W_X$ транзитивна на I_X и совпадает с группой $\mathrm{Aut}(N_X, K_X)$ псевдоортогональных автоморфизмов решетки, сохраняющих канонический вектор, а также с группой $\mathrm{Aut}(I_X)$ автоморфизмов конфигурации (-1)-кривых, сохраняющих отношения инцидентности.

Геометрический смысл действия $W_X : N_X$ состоит в следующем. Отражения вдоль корней $E_i - E_{i+1}$ порождают группу перестановок $E_1, \ldots, E_l$, т.е. их действие сводится к перенумерации компонент исключительного множества, стягиваемого при $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$, или к перенумерации $p_1, \ldots, p_l$. Отражение вдоль $H - E_1 - E_2 - E_3$ действует следующим образом: $E_i \mapsto H - E_j - E_k$ при $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $E_i \mapsto E_i$ при $i > 3$. Таким образом, исключительное множество при стягивании $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ переходит под действием этого отражения в исключительное множество при другом стягивании $\sigma' : X \to \mathbb{P}^2$, так что $\tau = \sigma' \sigma^{-1} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ — квадратичное преобразование Кремоны с центрами в p_1, p_2, p_3 (если $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, то $\tau(x : y : z) = (yz : zx : xy)$).

Лемма 8. *Любое свойство конфигурации дивизоров в* $\operatorname{Div} X$*, не зависящее от конкретного выбора точек общего положения* $p_1, \ldots, p_l$*, т.е. определяемое только расположением конфигурации относительно исключительного множества* $E_1, \ldots, E_l$ *(например, эффективность, обильность,* $h^i(D)$*, конечная порожденность алгебры глобальных сечений и т.д.) сохраняется под действием* W_X*.*

Доказательство. Действительно, действие W_X сводится к перенумерации компонент исключительного множества и к замене одного исключительного множества на другое, стягиваемое в другую конфигурацию точек на $\mathbb{P}^2$. $\square$

Замечание 7. Условие общности положения точек $p_1, \ldots, p_l$ состоит как раз в том, чтобы под действием W_X, т.е. любой цепочки квадратичных преобразований Кремоны с центрами в 3 точках из $p_1, \ldots, p_l$ никакие 3 точки не оказались на одной прямой.

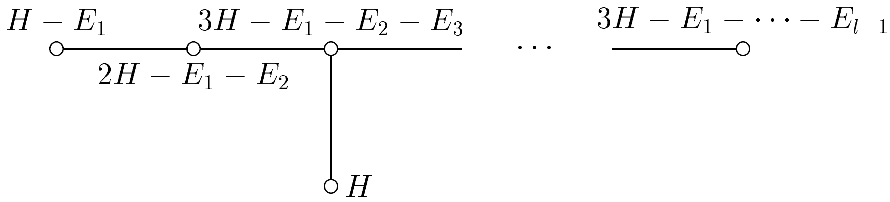
Изучим структуру конусов E_X, $E_X^\vee$. Оба конуса W_X-инвариантны, поэтому достаточно изучить их пересечение с C_-.

Лемма 9. *Пусть* $\mathcal{C} \subset N_X \otimes \mathbb{Q}$ *—* W_X*-инвариантный конус. Грань* $\Gamma \subset \mathcal{C}$ *пересекает* $\operatorname{int} C_-$ $\iff$ *двойственная грань* $\Gamma^* = \Gamma^\perp \cap \mathcal{C}^\vee$ *содержится в* C_-*.*

Доказательство. “ $\Longrightarrow$ ” Грань Γ^* образована нормалями ν к опорным гиперплоскостям $\mathcal{C}$, содержащим Γ. Для $\lambda \in \Gamma \cap \operatorname{int} C_-$ имеем $(\nu, \mathcal{C}) \geq 0 = (\nu, \lambda) \implies (s_\alpha \nu, \mathcal{C}) = (\nu, s_\alpha \mathcal{C}) \geq 0$ для любого простого корня α ($s_\alpha \in W_X$ — соответствующее отражение) $\implies (s_\alpha \nu, \lambda) = (\nu, s_\alpha \lambda) = (\nu, \lambda) + (\lambda, \alpha)(\nu, \alpha) \geq 0 = (\nu, \lambda) \implies (\nu, \alpha) \geq 0 \implies \nu \in C_-$.

“ $\Longleftarrow$ ” Поменяем $\mathcal{C}, \mathcal{C}^\vee$ ролями. Пусть $\Gamma \subset C_-$, тогда $\operatorname{int} \Gamma \subset \operatorname{int}(C_- \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}^\perp)$ для некоторого набора простых корней α_i. Взяв $\nu \in \operatorname{int} \Gamma^*$ и усреднив по параболической подгруппе $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subset W$, мы можем считать $\nu \perp \alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Теперь $\lambda \in \operatorname{int} \Gamma \implies \lambda + \epsilon\alpha \in \mathcal{C} \setminus \Gamma$ для любого простого корня $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (при малом ϵ) $\implies (\nu, \lambda + \epsilon\alpha) = (\nu, \lambda) + \epsilon(\nu, \alpha) > (\nu, \lambda) \implies (\nu, \alpha) > 0$. Осталось малым шевелением добиться $(\nu, \alpha_i) > 0 \implies \nu \in \operatorname{int} C_-$. $\square$

Единственное ребро E_X, лежащее в C_-, есть $\mathbb{Q}_+ E_l$. По лемме 9, единственная стенка $E_X^\vee$, пересекающая $\operatorname{int} C_-$, высекается уравнением $m_l = 0$. Следовательно, $E_X^\vee \cap C_-$ — симплициальный конус, задаваемый уравнениями (2) и $m_l \geq 0$. Образующие ребер $E_X^\vee \cap C_-$ суть $-K$ и векторы, проекции которых на $K^\perp$ пропорциональны фундаментальным весам:



В частности, $E_X^\vee \cap C_-$ строго симплициален.

Зная ребра E_X и $\partial E_X^\vee \cap C_-$, мы получаем описание ортогональных последним граней E_X, причем по лемме 9 l-грани суть в точности стенки E_X, пересекающие $\operatorname{int} C_-$, а двойственные им ребра суть в точности ребра $E_X^\vee$, лежащие в C_-. Поскольку любое ребро W_X-инвариантного конуса действием W_X загоняется в C_-, а любая стенка W_X-эквивалентна пересекающей $\operatorname{int} C_-$, это дает описание всех ребер и стенок E_X, $E_X^\vee$. Результаты суммированы в таблицах 1–3:

Теорема 4. *1) Антидоминантная часть конуса Мори имеет строго симплициальное разбиение* $E_{X_l} \cap C_- = \mathcal{C}_0 \cup \ldots \mathcal{C}_l \cup \mathcal{C}_*$*, где*

$$\mathcal{C}_k = E_{X_k}^\vee \cap C_- \oplus \langle E_{k+1} + \cdots + E_l, \ldots, E_l \rangle_{\mathbb{Q}_+}, \qquad (k = 0, \ldots, l)$$
$$\mathcal{C}_* = \langle H - E_1, 2H - E_1 - E_2 \rangle_{\mathbb{Q}_+} \oplus \langle H - E_1 - E_2 + E_3 + \cdots + E_l, E_3 + \cdots + E_l, \ldots, E_l \rangle_{\mathbb{Q}_+}$$

— ортогональные суммы строго симплициальных конусов.

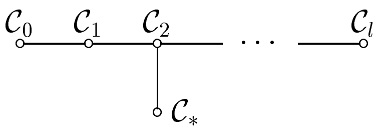
Таблица 1. Грани nef-конуса, пересекающие камеру Вейля

Ребра $E_X^\vee \cap C_-$	Минимальные грани $E_X^\vee$, их содержащие	Двойственные грани E_X
H	ребро	l-грань $\langle E_i \mid i = 1, \ldots, l\rangle$
$H - E_1$	ребро	l-грань $\langle E_i, H - E_1 - E_i \mid i > 1\rangle$
$2H - E_1 - E_2$	2-грань	$(l-1)$-грань $\langle H - E_1 - E_2, E_i \mid i > 2\rangle$
$3H - E_1 - E_2 - E_3$	4-грань	$(l-3)$-грань $\langle E_i \mid i > 3\rangle$
....	....	....
$3H - E_1 - \cdots - E_{l-1}$	l-грань	ребро $\langle E_l\rangle$

Таблица 2. Ребра и стенки конуса Мори и nef-конуса

Конус	Представители W-орбит	
	ребра	стенки
E_{X_l}	$\langle E_l\rangle$	$\langle E_i \mid i = 1, \ldots, l\rangle$, $\langle E_i, H - E_1 - E_i \mid i > 1\rangle$
$E_{X_l}^\vee$	$\langle H\rangle$, $\langle H - E_1\rangle$	$E_{X_{l-1}}^\vee$

2) Граф примыкания $\mathcal{C}_i$ *— диаграмма Дынкина, причем* $\operatorname{codim}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$ *равна длине пути между соответствующими вершинами:*



3) Разложение $D \in \mathcal{C}_i$ *по компонентам ортогональной прямой суммы есть разложение Зарисского* $D = D_+ + D_-$*, причем*

$$D \in \mathcal{C}_k \implies \begin{cases} D_+ = dH - \sum_{j \le k} m_j E_j \\ D_- = \sum_{j > k} (-m_j) E_j \end{cases} \qquad k = 0, \ldots, l$$

$$D \in \mathcal{C}_* \implies \begin{cases} D_+ = (d-\delta)H - (m_1 - \delta)E_1 - (m_2 - \delta)E_2 \\ D_- = \delta(H - E_1 - E_2) + \sum_{j > 2} (-m_j) E_j \end{cases} \qquad \delta = m_1 + m_2 - d$$

4) Для $\forall D \in E_X \cap C_-$ *имеем*

$$h^0(D) = h^0(D_+) = \binom{d+2}{2} - \sum_{m_j > 0} \binom{m_j + 1}{2} + \binom{\delta}{2}, \qquad \delta = m_1 + m_2 - d$$

(последнее слагаемое существенно лишь для $D \in \mathcal{C}_*$*).*

Таблица 3. Пересечения конусов с камерой Вейля

Конус	Определяющие неравенства	Ребра
$E_X \cap C_-$	$0 \le d \ge m_1 \ge \dots \ge m_l$ $d \ge m_1 + m_2 + m_3$	$E_1 + \dots + E_l, \dots, E_l$, $H - E_1, H - E_1 - E_2 + E_3 + \dots + E_l, -K$
$E_X^\vee \cap C_-$	$m_1 \ge \dots \ge m_l \ge 0$ $d \ge m_1 + m_2 + m_3$	$H, H - E_1, 2H - E_1 - E_2$, $3H - E_1 - E_2 - E_3, \dots, 3H - E_1 - \dots - E_l$

Доказательство. 1) Рассмотрим разбиение $E_X \cap C_-$ гиперплоскостями $\{m_1 = 0\}, \dots, \{m_l = 0\}$, $\{d = m_1 + m_2\}$. Конусы разбиения, задаваемые в дополнение к неравенствам из таблицы 3 неравенствами $\{m_1 \le 0\}$, $\{m_1 \ge 0 \ge m_2\}$, $\{m_2 \ge 0 \ge m_3,\ d \ge m_1 + m_2\}$, $\{m_2 \ge 0 \ge m_3,\ d \le m_1 + m_2\}$, $\{m_3 \ge 0 \ge m_4\}, \dots, \{m_l \ge 0\}$, суть в точности $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_*$, $\mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_l$.

2) легко получить из неравенств, задающих $\mathcal{C}_i$.

3) Первая компонента состоит из nef-дивизоров, а образующие 2-й компоненты выражаются через ортогональную систему (-1)-кривых с неотрицательными коэффициентами. Явный вид $D_\pm$ — непосредственная проверка.

4) Как видно из 3), если D — целый дивизор, то $D_\pm$ — целые $\implies$ $h^0(D) = h^0(D_+)$. Формула вытекает из 3) и следствий 4–5. □

Замечание 8. Теорема по существу принадлежит Нагате [N2, II].

Замечание 9. Поскольку любой вектор действием W_X загоняется в отрицательную камеру Вейля, теорема описывает разложение Зарисского и $h^0(\cdot)$ для всех эффективных дивизоров.

Следствие 6. *Алгебра A конечно порождена при $l \le 8$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $A(C_-) = \sum A(\mathcal{C}_i)$ конечно порождена, т.е. что $A(\mathcal{C}_i)$ конечно порождены. Пусть $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i^+ \oplus \mathcal{C}_i^-$ — разложение Зарисского. Тогда $A(\mathcal{C}_i) = A(\mathcal{C}_i^+) \otimes A(\mathcal{C}_i^-)$. Из таблицы 2 видно, что образующие, а значит и все элементы $E_X^\vee$ $\mathbb{Q}$-свободны $\implies$ $A(\mathcal{C}_i^+)$ конечно порождена по теореме 3, а $A(\mathcal{C}_i^-) = \Bbbk[s_1, \dots, s_r]$, где $s_j \in H^0(D_j)$, $D_1, \dots, D_r$ — базис $\mathcal{C}_i^-$. □

Замечание 10. В недавней работе В. Батырева и О. Попова [BP] получен гораздо более точный результат: A порождена сечениями всех эффективных дивизоров D с $(D, K) = -1$ (это в точности элементы I_X, причем $h^0(D) = 1$, и $-K$ для $l = 8$, причем $h^0(-K) = 2$), и соотношения между образующими квадратичны, по крайней мере с точностью до радикала.

8. Раздутие 9 точек

Следующий за поверхностями дель-Пеццо случай — раздутие $l = 9$ точек общего положения на $\mathbb{P}^2$. Результаты §7 остаются в силе со следующими изменениями.

Δ_X — аффинная система корней в $N_X \otimes \mathbb{Q}$. Об аффинных системах корней см. [K].

Примитивный мнимый корень равен $-K$, двойственный ему относительно инвариантной билинейной формы $-(\cdot,\cdot)$ вектор равен $K_8 = -3H + E_1 + \dots + E_8$.

Множества Δ_X, I_X и группа W_X бесконечны.

Отрицательный конус Титса $\bigcup_{w \in W_X} wC_- = \{(K, \cdot) < 0\} \cup \mathbb{Q}_+(-K)$ содержит бесконечное дискретное множество лучей, порожденных I_X, с единственным предельным лучом $\mathbb{Q}_+(-K)$ $\implies$ $-K \in \partial E_X \cap \partial\Omega_+ = E_X^\vee \cap \partial\Omega_+$ (лемма 5) $\implies$ E_X порождается I_X и $-K$.

Следствие 5 сохраняет силу.

Доказательство. При $(K, D) < 0$ действует следствие 2, а при $D = -mK$ достаточно показать $h^0(D) = 1$. Для этого проведем через $p_1, \ldots, p_9$ гладкую кубическую кривую C (это можно сделать, т.к. $h^0(-K) \geq 1$ и точки — в общем положении). Имеем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-(m-1)K) \longrightarrow \mathcal{O}(-mK) \longrightarrow \mathcal{O}(-mK|_C) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow H^0(-(m-1)K) \longrightarrow H^0(-mK) \longrightarrow H^0(-mK|_C)$$

Дивизор $-K|_C = -3H|_C + p_1 + \cdots + p_9$ на эллиптической кривой C имеет степень 0 и бесконечный порядок в $\operatorname{Pic} C$ (т.к. $p_1, \ldots, p_9$ — точки общего положения) $\implies$ $H^0(-mK|_C) = 0$. Индукция по m завершает доказательство. □

Структура конуса Мори и nef-конуса, их пересечений с отрицательной камерой Вейля, разложения Зарисского такая же как при $l \leq 8$ (лишь в число образующих $E_X, E_X^\vee$ добавляется "предельный вектор" $-K$).

E_X бесконечно порожден $\implies$ A бесконечно порождена. Из теоремы 4 и следствия 5 вытекает, что S бесконечно порождена (см. доказательство теоремы 1).

9. Проблемы

1) W_X не может действовать на общую поверхность дель-Пеццо автоморфизмами при $l > 4$. Не действует ли она преобразованиями Галуа?

2) Свернуть ряды Гильберта A и S в рациональные функции при $l \leq 8$.

3) Какова ситуация при $l > 9$: как выглядят $E_X, E_X^\vee$, разложение Зарисского, каковы $h^0(D)$, может ли S быть конечно порождена?

4) Как изменится картина, если раздувать точки необщего положения? Например, сохранится ли конечная порожденность A при $l \leq 8$?

Литература

[Да] В. И. Данилов, *Алгебраические многообразия и схемы*, Совр. пробл. мат. Фунд. напр., т. 23, с. 172–302, ВИНИТИ, Москва, 1988.

[ИШ] В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич, *Алгебраические поверхности*, Совр. пробл. мат. Фунд. напр., т. 35, с. 131–263, ВИНИТИ, Москва, 1989.

[К] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, Москва, 1993, 425 с.

[Ма] Ю. И. Манин, *Кубические формы*, Наука, Москва, 1972, 304 с.

[BP] V. V. Batyrev, O. N. Popov, *The Cox ring of a del Pezzo surface*, Preprint, 2003, `arXiv:math.AG/0309111`.

[De] M. Demazure, *Surfaces de del Pezzo*, Lect. Notes Math. **777** (1980), 22–69.

[Ha] R. Hartshorne, *Ample vector bundles*, Publ. Math. IHES **29** (1966), 63–94.

[N1] M. Nagata, *On the 14-th problem of Hilbert*, Amer. J. Math. **81** (1959), 766–772.

[N2] M. Nagata, *On rational surfaces*, I, II, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, **32** (1960), no. 3, 351–370, **33** (1960), no. 2, 271–293.

[R] D. Rees, *On a problem of Zariski*, Illinois J. Math. **2** (1958), 145–149.

[St] R. Steinberg, *Nagata's example*, Algebraic groups and Lie groups, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., vol. 9, pp. 375–384, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Z1] O. Zariski, *Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert*, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.

[Z2] O. Zariski, *The theorem of Riemann–Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface*, Ann. Math. **76** (1962), no. 3, 560–615.